

مدل سازی ترک چسبنده با استفاده از روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته

حامد ارزانی* (استادیار)

سجاد رستمیان (کارشناس ارشد)

دانشکده‌ی هندی‌سی عمان، دانشگاه تربیت دبیر شهید رجایی

مهندسی عمران شریف، (تابستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۲-۱۳۳، شماره‌ی ۱/۲، ص. ۲۳-۳۰

مدل سازی عددی ترک در مهندسی، یکی از دغدغه‌های اساسی برای پژوهشگران این رشته است. اگرچه اجزاء محدود، قابلیت‌های مناسبی برای مدل سازی ترک دارد، اما به‌کارگیری توابع شکل و اجزاء خاص محدودیت‌هایی را در حل مسائل ناپیوسته ایجاد می‌کند. یکی از اهداف به‌کارگیری روش‌های عددی بدون شبکه و از جمله روش کمینه مربعات غلبه بر مشکل مذکور است. در این پژوهش، روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته جهت پیش‌بینی بازشدگی نوک ترک توسعه داده شده است، که بر مبنای آن، تئوری ترک چسبنده برای بررسی رفتار ترک و روش معیار مشاهده‌ی برای مدل سازی فیزیکی آن استفاده شده است. تئوری ترک چسبنده، ساده‌ترین روش برای ایجاد ناپیوستگی در تقریب‌های بدون شبکه است و سازگاری مناسبی با نحوه‌ی گسسته‌سازی حوزه‌ی فیزیکی دارد. مدل عددی و مدل ترک در محیط ویزوال فترن برنامه‌نویسی شده و در نهایت، کارایی و دقت بالای روش کمینه مربعات گسسته با حل مسائل استاندارد و مقایسه‌ی نتایج حاصل از حل عددی با نتایج آزمایشگاهی و نتایج روش اجزاء محدود نشان داده شده است.

واژگان کلیدی: روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته، تئوری ترک چسبنده، روش مشاهده‌ی.

h.arzani@srttu.edu
rostamian62@yahoo.com

۱. مقدمه

ترک، رشد ترک، تغییرشکل‌های بزرگ، و سونامی‌ها از این دسته هستند. به‌کارگیری المان محدود در این دسته از مسائل به فرایند مداوم تولید شبکه و شبکه‌بندی حوزه‌ی مسئله برای جلوگیری از انحراف فرایند حل و کج‌شکلی شدید المان‌ها نیازمند است. همچنین حل این‌گونه از مسائل با روش اجزاء محدود به علت نیاز به المان‌بندی خاص دامنه و محدودیت‌های آن همواره پرهزینه خواهد بود.

از سوی دیگر، به جهت ماهیت توابع شکل به‌کاررفته در روش اجزاء محدود، این روش قادر به مدل‌سازی دقیق ناحیه‌هایی از دامنه، که در آن گرادین شدید و یا ناپیوستگی در پاسخ به چشم می‌خورد، نیست. از این رو نظریه‌هایی مطرح شده است، که بدون استفاده از المان، فقط با تعیین مشخصات گره‌ی و هندسه‌ی مسئله بتوان معادله‌ی دیفرانسیل حاکم را حل کرد، این روش‌ها به روش‌های بدون شبکه مشهور شده‌اند.

از جمله روش‌های بدون شبکه، روش کمینه مربعات گسسته (DLS)^[۱] است، یکی از جدیدترین روش‌های بدون شبکه و بر پایه‌ی کمینه مربعات است. در روش ذکرشده همانند دیگر روش‌های بدون شبکه، حوزه‌ی مسئله توسط تعداد محدودی نقطه‌ی گره‌ی به صورت پراکنده و با توزیع دلخواه گسسته‌سازی می‌شود. از ویژگی‌های روش کمینه مربعات گسسته، انعطاف‌پذیری در برابر حذف یا افزودن نقاط گره‌ی است، که در مسائلی که نحوه‌ی توزیع نقاط گره‌ی حائز اهمیت است، مزیت بزرگی محسوب می‌شود؛ و از دیگر مزایای آن، بی‌نیازی به انتگرال‌گیری، تقارن ماتریس

در سال‌های اخیر، استفاده از میانی مکانیک شکست در تحلیل و طراحی سازه‌ها به خصوص سازه‌های حجیم مانند: سد‌های بتنی، کشتی‌ها، و سایر سازه‌های بتنی و فولادی اهمیت زیادی پیدا کرده است. مکانیک شکست به بررسی رشد ترک و اثر آن در رفتار و مقاومت سازه‌ها می‌پردازد. وجود ترک در سازه‌ها اجتناب‌ناپذیر است، بنابراین بدون در نظر گرفتن اثر آن ممکن است ایمنی سازه به خطر افتد. از طرفی رشد ترک در اثر بارگذاری تکراری، که عموماً به سازه‌ها اعمال می‌شود، موضوعی است که بدون در نظر گرفتن آن در طراحی، امکان کاهش قابل توجه عمر مفید سازه وجود دارد.

روش‌های عددی به‌عنوان جایگزین اصلی جهت تحلیل مسائل عملی مطرح شده است. با در نظر گرفتن وابستگی روش‌های عددی به رایانه و نیز پیشرفت روزافزون در سرعت رایانه‌ها، بر اهمیت این‌گونه روش‌ها به عنوان ابزار قوی جهت تجزیه و تحلیل مسائل مهندسی روز به روز افزوده می‌شود. قوی‌ترین روشی که طی سال‌های اخیر به دفعات در حل مسائل متفاوت از آن در الگوریتم‌های رایانه‌ی استفاده شده است، روش المان محدود است. اما روش المان محدود، در مواردی فاقد توانایی‌های لازم است و یا کاستی‌هایی جهت تحلیل مسائلی با مرزهای پیچیده یا متحرک و یا مسائلی که در زمان دچار تغییر در هندسه‌ی حوزه هستند، دارند. مسائلی مانند مدل‌سازی

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۳/۱۰/۹، اصلاحیه ۱۳۹۴/۶/۱۰، پذیرش ۱۳۹۴/۸/۲۷.

اعمال و نهایتاً روش معیار مشاهده‌ی برای مدل‌سازی توابع شکل ناپیوسته در بخش ناپیوسته‌ی فیزیکی دامنه (ترک) اعمال شده است. به‌منظور صحت‌یابی مثال‌های عددی ارائه‌شده، نتایج به‌دست‌آمده با روش‌های تجربی و نتایج حل المان محدود مقایسه و نتیجه‌گیری‌های لازم ارائه شده است.

۲. تقریب تابع به کمک کمینه مربعات متحرک

در روش کمینه مربعات متحرک، تابع تخمین زنده $u(x)$ از طریق رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود:

$$u(x) \cong \bar{u}(x) = \sum_{i=1}^m P_i(x)a(x) = P_i^T(x)a(x) \quad (1)$$

که در آن، $P(x)$ یک تابع چندجمله‌ی پایه و m تعداد کل پارامتر موجود در پایه است. به‌عنوان مثال، برای حالت دو بُعدی و غیرخطی $m = 6$ است و تابع پایه به‌صورت $P^T = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$ نوشته می‌شود. $a(x)$ بردار ضرایب است، که در این روش از کمینه‌سازی تابع ۲ تعیین می‌شود:

$$J(x) = \sum_{k=1} W_k [u_k - P_i^T(x)a(x)]^2 \quad (2)$$

که در آن، W_k تابع وزنی در نقطه‌ی k به‌گونه‌ی تعریف می‌شود که با فاصله‌گرفتن از نقطه‌ی k از مقدار تابع کاسته می‌شود و در خارج از ناحیه‌ی Ω_k ، که x_k را احاطه کرده است، از بین می‌رود. در نوشتار حاضر، تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی ۳ به‌صورت رابطه‌ی ۳ به‌کار گرفته شده است:

$$W(d) = \begin{cases} \frac{1}{6} - \frac{1}{2}d + \frac{1}{3}d^2; & d \leq \frac{1}{3} \\ \frac{1}{6} - \frac{1}{2}d + \frac{1}{3}d^2 - \frac{1}{6}d^3; & \frac{1}{3} < d \leq 1 \\ 0; & d > 1 \end{cases} \quad (3)$$

که در آن‌ها، $d = \frac{\|x_k - x\|}{d_{\max}}$ و d_{\max} اندازه‌ی شعاع حوزه‌ی تأثیر گره x_k است. با کمینه‌ساختن تابع $J(x)$ در رابطه‌ی ۲، بردار ضرایب به‌صورت رابطه‌ی ۴ به‌دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned} a(x) &= A^{-1}(x)B(x)u_k \\ A(x) &= \sum W_k P(x_k)P^T(x_k) \\ B(x) &= W_k P(x_k) \end{aligned} \quad (4)$$

با به‌دست‌آوردن بردار ضرایب تابع تقریب را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۵ نوشت:

$$\phi(x_k) = P^T(x)A^{-1}(x)B(x)u_k \quad (5)$$

که در آن، $\phi(x)$ ماتریس توابع شکل کمینه مربعات متحرک است.

۳. روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته

در روش کمینه مربعات گسسته، گسسته‌سازی حوزه‌ی مسئله توسط تعداد محدودی نقاط گره‌ی صورت می‌گیرد. یکی از اساسی‌ترین رکن‌های روش‌های بدون شبکه، نحوه‌ی گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل است. هر کدام از روش‌های بدون شبکه

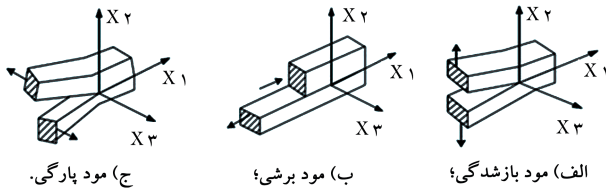
ضرایب و سادگی به‌کارگیری آن است. این روش تاکنون علاوه بر حل مسائل پواسون برای حل مسئله‌ی تراوش^[۱] و نظریه تطبیقی برای مسائل هذلولی در حالت یک بُعدی^[۲] استفاده شده و همچنین کارایی آن جهت حل مسائل کشسانی و برآورد خطا^[۳] و نظریه تطبیقی^[۴] در مسائل کشسانی دو بُعدی و نیز در مسائل مکانیک سیالات به اثبات رسیده است. در تازه‌ترین مطالعات صورت‌گرفته، نظریه تطبیقی مدل ترک دو بُعدی با استفاده از روش سیستم جستجوی ذرات باردار مورد بررسی قرار گرفته است.^[۵]

در روش‌های بدون شبکه از مش‌بندی استفاده نمی‌شود و گسسته‌سازی حوزه‌ی مسئله از طریق نقاط گره‌ی و همچنین استفاده از درون‌یاب‌های مرتبه‌ی بالا انجام می‌پذیرد. به‌دلیل عدم وجود پیوستگی المانی بین نقاط گره‌ی و در نتیجه، بی‌نیازی از تأمین محدودیت‌هایی در المان‌بندی و شکل المان‌ها قبل از حل مسئله و همچنین مزایای محاسباتی ذکرشده، روش مذکور در حل مسائلی نظیر مدل‌سازی ترک و بررسی پیشرفت آن و نیز در حل مسائل با مرزهای متحرک، عملکرد خوب و مناسبی دارد.

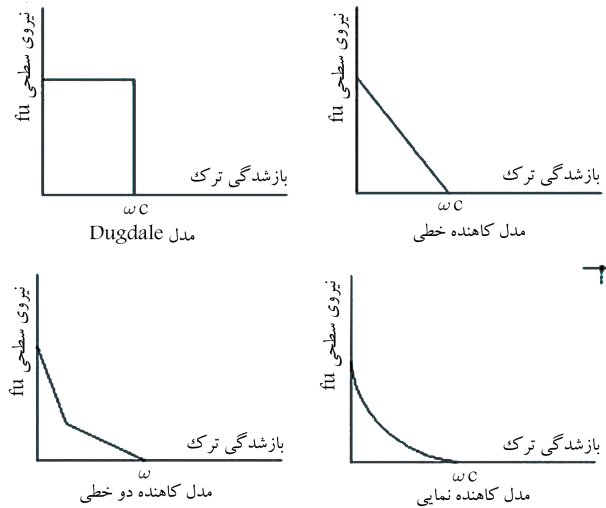
حل تحلیلی مسئله‌ی ترک با استفاده از تئوری کشسانی و با کمک مفهوم نابه‌جایی، منتج به مقادیر نامحدود و تکین کرنش و تنش در نوک ترک می‌شود. با توجه به اینکه در واقعیت ایجاد تنش‌های نامحدود در ماده ناممکن است و ماده در نزدیکی نوک ترک وارد محدوده‌ی رفتار غیرخطی می‌شود، دقت حل کشسان در این موارد ناکافی است. این رفتار غیرخطی باعث مقاومت ماده در برابر گسترش ترک و استهلاک انرژی می‌شود. برای حل مشکل ذکرشده، مدل‌هایی برای معادل‌سازی رفتار غیرخطی ماده و مقاومت آن در برابر گسترش ترک در حوالی نوک ترک ارائه شده است، که یکی از آنها مدل ترک چسبیده است. البته در مواردی که محدوده‌ی رفتار غیرخطی حول ترک در قیاس با ابعاد مدل کوچک و قابل صرف‌نظر باشد (مانند آنچه در مواد ترد اتفاق می‌افتد)، حل کشسان، دقت مناسبی دارد؛ ولی در مورد مواد نیمه ترد (مانند بتن)، وجود محدوده‌ی خمیری قابل چشم‌پوشی نخواهد بود.

افراد متعددی ترک چسبیده را مدل‌سازی و مسائل استاندارد را در این زمینه حل کرده‌اند، که از آن‌جمله می‌توان به پژوهش‌هایی با استفاده از روش‌های المان محدود^[۶] المان محدود بسط یافته^[۴]، اثر اندازه^[۵]، گالرکین بدون المان^[۸]، بدون شبکه‌ی بسط یافته بدون شاخه‌ی غنی‌شده^[۱۰] و بازتولید ذره کرنل^[۷] اشاره کرد، که در تمام روش‌های مذکور، چه روش‌های متکی به شبکه و چه روش‌های بدون شبکه، با شبکه‌بندی زمینه‌ی مانند روش بازتولید ذره کرنل، به‌ازاء هر مقدار گسترش ترک و افزایش بازشدگی، شبکه‌بندی مجدد در اطراف ناپیوستگی ضروری است، که منتج به پیچیدگی مسئله و افزایش حجم و زمان محاسبات می‌شود. هدف از به‌کارگیری روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته در پژوهش حاضر با توجه به گسسته‌سازی مبتنی بر گره آن، غلبه بر مشکل مذکور است. در غالب روش‌های پیشین مورد اشاره، مثال تیر خمشی سه نقطه، که یک تیر دو سر ساده با یک بار متمرکز است، و نمودار نیرو - جابه‌جایی آن نیز به‌دست آمده است، به‌عنوان مسئله‌ی استاندارد حل شده است.

در نوشتار حاضر، روش کمینه مربعات گسسته برای حل مسائل مکانیک شکست استفاده شده است. بدین منظور، ابتدا توابع شکل کمینه مربعات متحرک برای همه‌ی نقاط گره‌ی دامنه محاسبه و سپس معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسائل شکست در مسائل کشسانی خطی با استفاده از روش کمینه مربعات برای کلیه‌ی نقاط گره‌ی گسسته‌سازی شده است. در ادامه، مدهای تغییرشکل در مکانیک شکست به همراه مدل ترک چسبیده و مدل شبیه‌سازی رفتار غیرخطی حول نوک ترک در مدل



شکل ۱. انواع مود بازشدگی.



شکل ۲. نمودار رفتاری مدل‌های چسبیده‌ی مختلف.

الف) مود ۱ یا مود بازشدگی: در این مود سطوح ترک به طور عمود برهم در جهت مخالف یکدیگر تغییر مکان می‌دهند.

ب) مود ۲ یا مود برشی: در این مود دو سطح ترک نسبت به هم در جهت عمود بر خط نوک ترک می‌لغزند.

ج) مود ۳ یا مود پارگی: در این مود لغزش دو صفحه در جهتی به موازات خط ترک اتفاق می‌افتد.

در نوشتار حاضر، جهت مدل‌کردن و نحوه‌ی تغییر شکل ناپیوستگی، از مود ۱، یعنی مود بازشدگی برای تعریف شکست استفاده شده است.

۲.۴. مدل ترک چسبیده

ترک چسبیده روشی برای شبیه‌سازی رفتار غیرخطی مصالح در محدوده‌ی فرایند شکست است، و بدین منظور فرض می‌شود نیروهای سطحی چسبیده‌ی متقابل بین لبه‌های ترک اعمال می‌شود. نحوه‌ی اعمال این زوج نیروهای دوزنده به گونه‌ی است که در لحظه‌ی گسترش ترک، مساحت زیر نمودار نیروی سطحی - بازشدگی ترک، که نشان‌گر انرژی صرف‌شده برای جداسدن دو سطح یا مساحت واحد است، برابر با انرژی شکست ترک (G_f) خواهد بود. مدل‌های مختلف رفتاری نیرو - بازشدگی ترک برای مواد مختلف پیشنهاد شده است. نمونه‌هایی از این مدل‌ها، که در سال ۲۰۰۷ ارائه شده‌اند،^[۱۵] در شکل ۲ نمایش داده شده است. چسبندگی بین دو لبه‌ی ترک در ماتریس سختی و نیروهای معادل گره‌ی سیستم تأثیرگذار است.

در شرایط ترک مود مرکب، پس از تفکیک مقادیر بازشدگی و لغزش نسبی، مؤلفه‌های قائم و مماسی نیروهای سطحی محاسبه می‌شود. برای شبیه‌سازی رفتار مود مرکب ترک چسبیده در پژوهش‌ها از مدل‌های رفتاری مختلفی استفاده شده

از شیوه‌ی برای گسسته‌سازی استفاده می‌کنند. در روش کمیته مربعات گسسته، گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل با استفاده از فرم قوی معادلات انجام می‌شود. معادله‌ی دیفرانسیل ۶ را در نظر بگیرید:

$$A(\phi) + F = 0 \quad \text{in } \Omega \quad (6)$$

که برای آن شرایط مرزی در مرزهای نیومن و در پیچله به صورت روابط ۷ و ۸ تعریف شده‌اند:

$$B(\phi) - \bar{t} = 0 \quad \text{on } \Gamma_t \quad (7)$$

$$\phi - \bar{\phi} = 0 \quad \text{on } \Gamma_u \quad (8)$$

که در آن‌ها، A و B عملگرهای دیفرانسیلی هستند. F بردار نیروهای خارجی یا منابعی‌اند که بر حوزه‌ی مسئله عمل می‌کنند، \bar{t} بردار تنش وارد بر مرز و $\bar{\phi}$ بردار تغییر مکان است.

گسسته‌سازی در روش کمیته مربعات گسسته مبتنی بر کمیته‌سازی مربعات باقیمانده‌ها در تعدادی از نقاط همسایه با نقطه‌ی اصلی استوار است. با جایگذاری تابع شکل از رابطه‌ی ۵ در روابط ۶ الی ۸، مقدار باقیمانده‌ها را در حوزه‌ی مسئله R_Ω و مرز نیومن R_t و مرز در پیچله‌ی R_u به ترتیب به صورت روابط ۹ می‌توان نوشت:

$$R_\Omega(x) = A(\phi(x_k)) + F(x_k)$$

$$R_t(x) = B(\phi(x_k)) - \bar{t}(x_k)$$

$$R_u(x_k) = \phi_n - \bar{\phi}(x_k) \quad (9)$$

بنابراین تابع J به عنوان تابع مجموع مربعات باقیمانده را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۱۰ نوشت:

$$J = \sum_{k=1}^{N_\Omega} (R_\Omega^T(x)) + \alpha_t \sum_{k=1}^{N_t} (R_t^T(x)) + \alpha_u \sum_{k=1}^{N_u} (R_u^T(x)) \quad (10)$$

که در آن، N_Ω تعداد نقاط گره‌ی در حوزه‌ی مسئله، N_u تعداد نقاط گره‌ی در مرز در پیچله، و N_t تعداد نقاط گره‌ی در مرز نیومن هستند. در روش مذکور، جهت اعمال شرایط مرزی از روش ضرایب پنازتی استفاده شده است. در رابطه‌ی ۱۰، α_t و α_u به ترتیب ضرایب پنازتی برای شرایط مرزی نیومن و در پیچله هستند. با به کمیته‌رساندن تابع J در رابطه‌ی ۱۰، ماتریس معادلات ۱۱ به دست می‌آید:

$$K\phi = F \quad (11)$$

که در آن، F ماتریس نیروهای اعمالی خارجی و K ماتریس سختی به صورت متقارن و مربعی است.

۴. مکانیک شکست

۴.۱. کلیات

بررسی روابط تحلیلی برای قطعات با ترک‌های ریز نشان می‌دهد که میزان تنش در نوک ترک با گرا دیان شدیدی افزایش پیدا می‌کند، از طرفی بیشتر قطعات ساخته‌شده‌ی دست بشر، حاوی ترک‌های ریز و مویی هستند. در تئوری‌های مکانیک شکست پژوهش‌ها نشان داده شده است که می‌توان هر شکستی را توسط ترکیب خطی سه مدل تغییر شکل مطابق شکل ۱، بدین شرح تعریف کرد.

است. در حالت کلی، نیروهای سطحی اصطکاکی و نرمال بین دو لبه‌ی ترک، تابع لغزش و همچنین بازشدگی دولبه‌ی ترک خواهد بود.

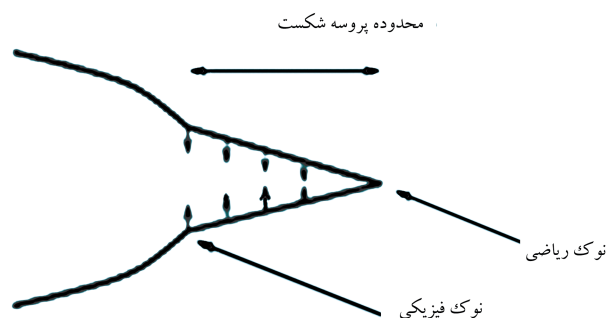
در مثال‌های حل شده در نوشتار حاضر، از اثر اصطکاکی دولبه‌ی ترک به منظور ساده‌سازی صرف‌نظر و به بیان دیگر، مؤلفه‌های مماسی نیروهای متبادل بین دولبه‌ی ترک برابر صفر در نظر گرفته شده است. این فرض برای مواد نیمه‌ترد، در حالتی که مود اول حاکم است، مناسب خواهد بود.

۳.۴. شبیه‌سازی رفتار غیرخطی حول نوک ترک

تمام تأثیر رفتار غیرخطی ماده در محدوده‌ی پروسه‌ی شکست^۸ در سطح ترک و با کمک تنش‌های رد و بدل شده بین دو لبه‌ی ترک، که خاصیت جلوگیری از بازشدن دو لبه‌ی ترک را دارد، مدل می‌شود و رفتار بقیه‌ی ماده به صورت کشسان فرض می‌شود. در این صورت، نقطه‌ی که به لحاظ حل ریاضی جابه‌جایی در آن برابر صفر است، به عنوان نوک ریاضی ترک^۹ و محلی که تنش‌های رد و بدل شده بین دو لبه‌ی ترک به اتمام می‌رسد، با عنوان نوک فیزیکی ترک^{۱۰} مطابق شکل ۳ نام‌گذاری می‌شود.

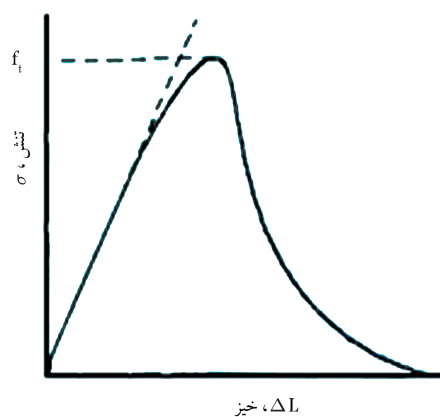
شرط اساسی مدل‌های ترک چسبیده، حذف تکیه‌نگی در نوک ترک به واسطه‌ی برهم‌نهی میدان تنش ناشی از ترک و میدان تنش ناشی از برهم‌کنش^{۱۱} دو لبه‌ی ترک است.

مدل‌های ترک چسبیده برای شبیه‌سازی و ساده‌سازی رفتار پیچیده این نوع ترک در شکل ۴ ارائه شده‌اند.



ترک چسبیده و محدوده پروسه شکست (Fracture Process Zone)

شکل ۳. ناحیه‌ی شکست و نوک ترک.



شکل ۴. رفتار غیرخطی ایده‌آل شده برای ترک چسبیده.

با توجه به اینکه مقاومت ماده در مقابل بازشدگی ترک، با افزایش میزان بازشدگی کاهش می‌یابد، در مدل‌های ارائه شده برای ترک چسبیده شدت تنش ردوبدل شده بین دو لبه‌ی ترک، دارای رفتار نرم‌شونده^{۱۲} است. بدین ترتیب میزان نیروهای سطحی چسبیده در نوک ترک بیشینه بوده و در جایی که میزان بازشدگی ترک برابر با حد بحرانی بازشدگی است، برابر صفر است.

قابل ذکر است که در تمام مدل‌های رفتاری ترک چسبیده، سطح زیر نمودار تنش - بازشدگی مساوی و برابر مقدار انرژی شکست است. در پژوهش حاضر از مدل خطی برای شبیه‌سازی رفتار تنش - بازشدگی استفاده شده است.

۵. روش معیار مشاهده‌ی^{۱۳} جهت معرفی ترک

ساده‌ترین روش برای ایجاد ناپیوستگی در تقریب‌های بدون شبکه، روش مشاهده‌ی است، که نخستین بار در سال ۱۹۹۵^{۱۴} جهت مدل‌سازی ناپیوستگی و مرزهای محدب تعریف شده است. در روش مذکور، ناحیه‌ی تأثیر یک گره به عنوان میدان دید در نظر گرفته می‌شود و تمامی مرزها (چه داخلی و چه خارجی) به عنوان سطح مات و غیر شفاف طوری در نظر گرفته می‌شوند که میدان دید در صورت مواجهه با چنین مرزی منقطع شود. این شرایط از طریق روابط ۱۲ قابل بیان است:

$$\Omega_I = \{X | X \in \Omega, W(X_I - X) > 0\}$$

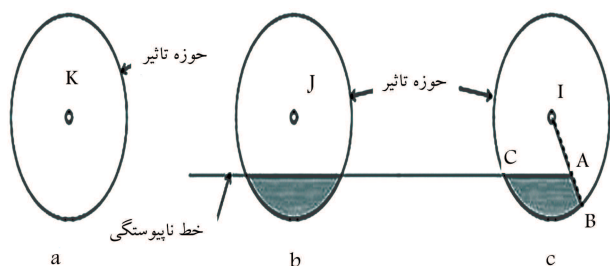
$$\Omega_I^{VIS} = \{X | S_{x \rightarrow x_I} \cap \Theta = \emptyset\} \quad (12)$$

که در آن، $S_{x \rightarrow x_I}$ مجموعه‌ی از تمام نقاطی است که بر روی یک خط مستقیم وصل بین X و X_I قرار دارند و Θ مجموعه‌ی کلیه‌ی مرزهای دامنه‌ی مشتمل بر ناپیوستگی‌ها و مرزهای محدب است. با توجه به آنچه ذکر شده است، دامنه‌ی تأثیر ذره با استفاده از معیار دید به صورت رابطه‌ی ۱۳ حاصل می‌شود:

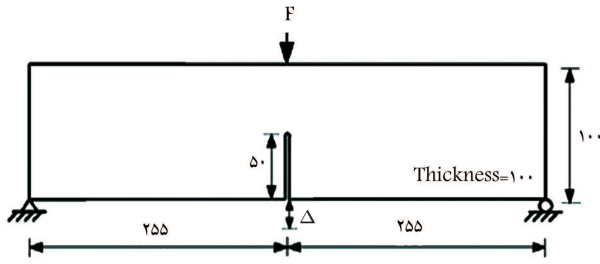
$$\Omega_I^{DI} = \Omega_I^{VIS} \cap \Omega_I \quad (13)$$

در شکل ۵، حوزه‌ی تأثیر گره در موقعیت‌های مختلف نشان داده شده است.

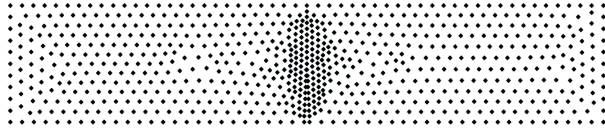
ترسیم کانتوری توابع وزن برای حالات b و c در شکل ۶ نشان داده شده است. از آنجا که توابع شکل از تأثیر متقابل توابع وزنی حاصل شده‌اند، بنا براین ناپیوستگی را در توابع شکل خواهیم داشت. روش معیار مشاهده‌ی در پژوهشی در سال ۲۰۱۳^{۱۷} برای مدل‌سازی رفتار ترک با روش کمینه مربعات گسسته استفاده و قابلیت‌های آن نشان داده شده است.



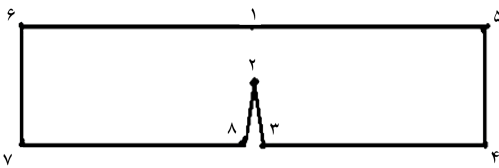
شکل ۵. حوزه‌ی اثر در موقعیت‌های مختلف ناپیوستگی.



شکل ۷. هندسه‌ی آزمایش خمش سه نقطه (اندازه‌ها برحسب میلی‌متر).

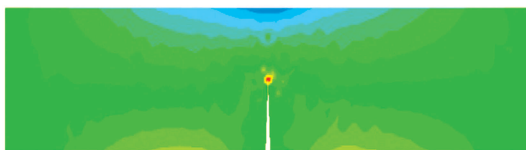
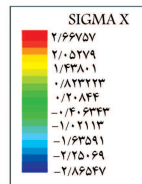


شکل ۸. توزیع نقاط گره‌یی در حوزی مسئله‌ی ۷۵۸ نقطه‌ی گره‌یی.

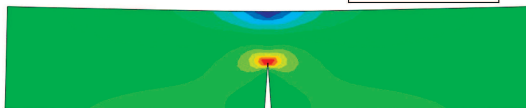
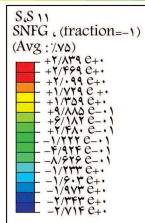


	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸
X	۰	۰	۲/۵	۲۵۵	۲۵۵	-۲۵۵	-۲۵۵	-۲/۵
Y	۵۰	۰	-۵۰	-۵۰	۵۰	۵۰	-۵۰	-۵۰

شکل ۹. مختصات نقاط گره‌یی (mm) مدل اجزاء محدود در نرم‌افزار آباکوس.

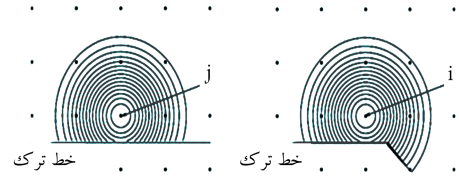


الف) مدل عددی؛



ب) اجزاء محدود.

شکل ۱۰. توزیع تنش.



الف) تابع وزن گره ۱؛ ب) تابع وزن گره ۲؛



ج) تابع شکل گره ۱؛ د) تابع شکل گره ۲؛

شکل ۶. توابع وزن و توابع شکل تولیدشده با استفاده از شیوه‌ی معیار مشاهده‌یی.

۶. مثال عددی

۱.۶. مقدمه

در این بخش جهت بررسی قابلیت‌ها و کارایی روش کمینه مربعات گسسته در حل مسائل مکانیک شکست براساس تئوری ترک چسبیده، مسئله‌ی استاندارد از صفحات حاوی ترک بررسی و نتایج عددی منتج از روش کمینه مربعات گسسته، که با استفاده از نرم‌افزار ویزوال فرترن نسخه‌ی ۱۴،۶/۵، برنامه‌نویسی شده است، با نتایج حاصل از تحلیل المان محدود (نرم‌افزار آباکوس) و نیز نتایج منتج از آزمایش تجربی ارائه‌شده در برخی پژوهش‌ها، [۱۲،۱۳،۹] مقایسه شده است.

در این مثال، روش معیار مشاهده‌یی و مود تغییرشکل پارگی (مود ۱) به‌منظور مدل‌سازی و معرفی ناپوستگی موجود در در مدل ترک چسبیده با رفتار خطی استفاده شده است.

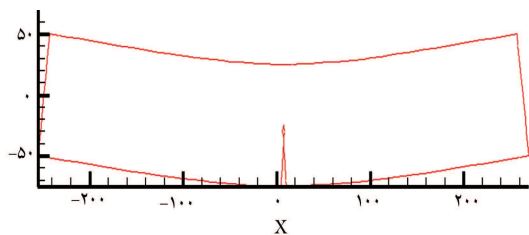
۲.۶. آزمایش خمش سه نقطه

در شکل ۷، هندسه و شرایط مرزی این مسئله نشان داده شده است. خصوصیات ماده‌ی به‌کاررفته بدین قرار است: E ضریب کشسانی برابر ۲۰۰ GPa ، ν ضریب پواسون برابر $۰/۲$ ، f_t مقاومت کششی برابر $۲/۴\text{ MPa}$ و G_F انرژی شکست (سطح زیر نمودار کشش - نرم‌شدگی) برابر $۰/۱۱۳\text{ N/m}$ هستند.

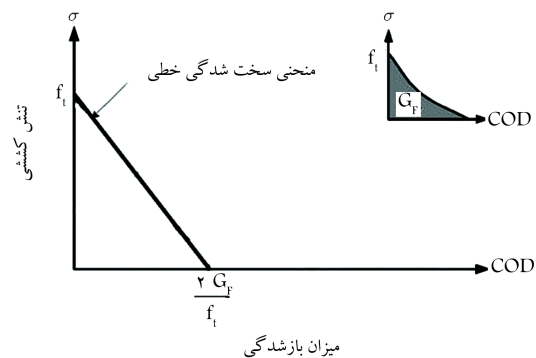
گسسته‌سازی حوزی حل مسئله، با آرایش گره‌یی نامنظم انجام شده است. شکل ۸، آرایش گره‌یی نامنظم با ۷۵۸ نقطه‌ی گره‌یی را نشان می‌دهد.

به منظور صحت‌یابی عملکرد مدل ترک چسبیده، تیر مورد بررسی تحت یک تغییرمکان مشخص به میزان $۰/۵$ میلی‌متر در محل اعمال نیرو مطابق شکل ۷ قرار گرفته است. شکل ۹ مدل‌سازی مثال را در نرم‌افزار آباکوس نشان می‌دهند. در شکل ۱۰ الف، نحوه‌ی توزیع تنش در راستای X با استفاده از روش DLS و بهره‌گیری از معیار مشاهده‌یی، و شکل ۱۰ ب، تنش حاصل از روش اجزاء محدود نشان داده شده است. مقایسه‌ی دو شکل مذکور نشان می‌دهد که توزیع تنش‌ها در مدل عددی به درستی محاسبه شده است.

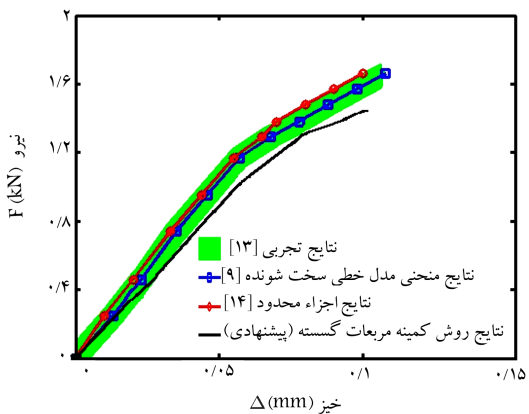
در ادامه، روند بازشدگی ترک و تغییرشکل‌ها در مدل عددی بررسی شده است. با افزایش تغییرمکان اعمالی در بالای تیر، میزان بازشدگی ترک نیز بررسی شده است. این تغییرمکان از مقدار $۰/۵$ میلی‌متر تا $۰/۲۵$ میلی‌متر با نمو $۰/۵$ میلی‌متر



شکل ۱۲. بسته شدن ترک در اثر اعمال نیرو بر دو لبه‌ی ترک.



شکل ۱۳. نمودار نیروی چسبندگی ترک بر اساس میزان بازشدگی ترک.

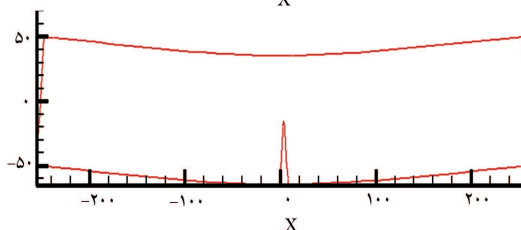
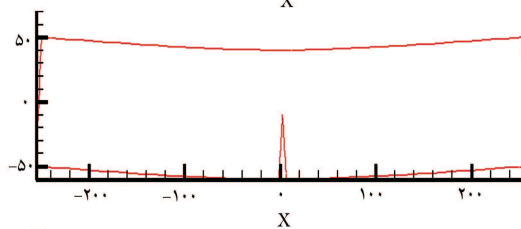
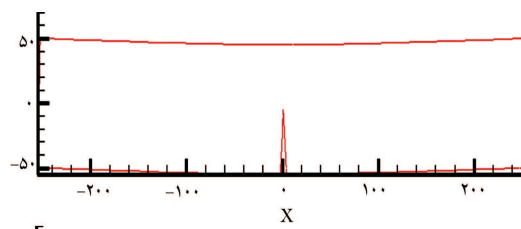


شکل ۱۴. نمودار نیرو-خیز در خمش تیر سه نقطه‌یی.

دوم به بعد میزان نیروی وارده بر مرزهای ترک بر اساس نمودار شکل ۱۳ محاسبه شده است. در پایان حل هر مرحله، مقادیر نیروی وارده و خیز تیر ثبت شده است تا بتوان نمودار نیروی جابه‌جایی را رسم کرد.

توانایی روش در ارائه‌ی شکل کیفی باز و بسته شدن ترک تحت خیز اعمال شده و مقدار کمی خیز و نیرو در شکل ۱۴ قابل مشاهده است.

نتایج تجربی آزمایشگاهی [۱۳]، [۱۲] و نتایج حاصل از روش اجزاء محدود بدون المان، [۹] که در نوشتاری با عنوان تحلیل رشد ترک چسبیده با روش گالرکین بدون المان، [۹] به آن‌ها ارجاع داده شده است و همچنین نتایج منحنی خطی که از روش گالرکین بدون المان (۲۰۰۸)، [۹] به دست آمده است و نتایج به دست آمده از روش DLS (پیشنهادی مقایسه)، برای تیر سه نقطه با خصوصیات مندرج شکل ۷ در شکل ۱۴ ارائه شده است. با مقایسه‌ی نتایج ارائه شده و نتایج حاصل از روش کمیته مربعات گسسته مشخص می‌شود که این روش به خوبی قادر به پیش‌بینی رفتار جسم و مدل ترک چسبیده تا قبل از مرحله‌ی از دست دادن مقاومت شده است. الگوریتم محاسباتی و ترتیب محاسبات در شکل ۱۵ ارائه شده است.



شکل ۱۱. رشد بازشدگی ترک با افزایش خیز اعمال شده به تیر با نمو ۵ mm.

انجام و رشد بازشدگی ترک بررسی شده است. به دلیل کاهش اساسی مقطع تیر با تشدید بازشدگی ترک، در مدل به جای تغییر بار و نیروی وارده از تغییر مکان استفاده شده است.

مرحله‌ی نهایی رفتارنگاری برای بررسی تئوری ترک چسبیده، قابلیت اعمال نیرو بر دو لبه‌ی ترک و بستن آن در اثر اعمال دو نیروی هم‌سو با وجود تغییر شکل اعمال شده در بالای تیر است.

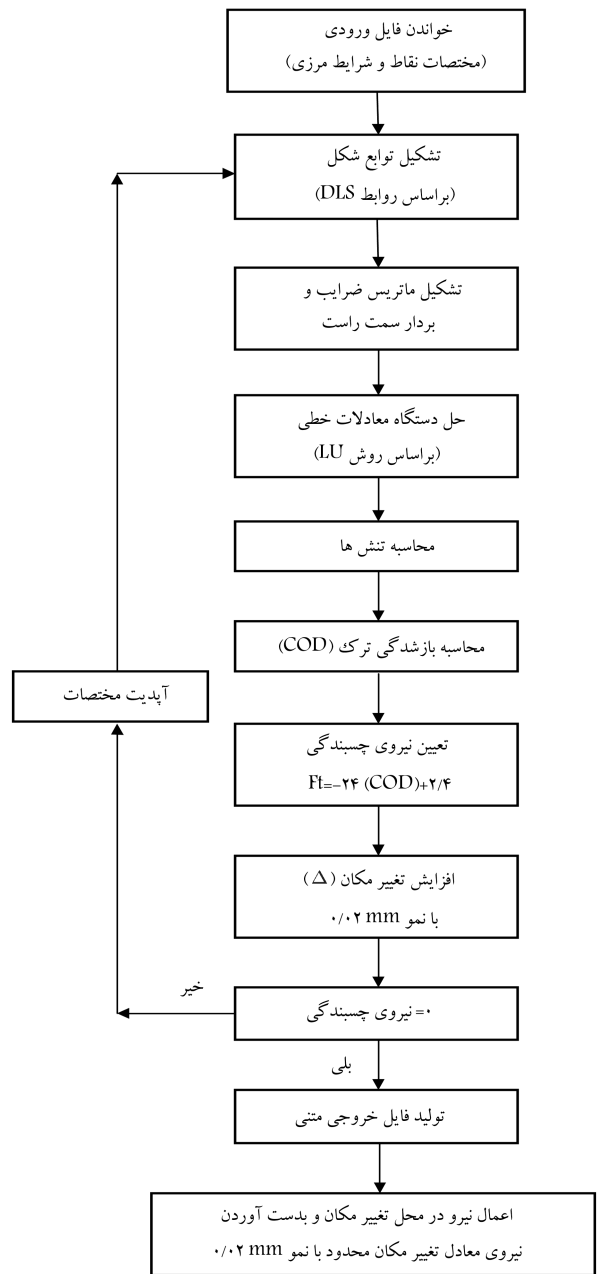
شکل ۱۱، رشد بازشدگی ترک در مدل عددی به ازاء افزایش خیز اعمال شده به تیر را نشان می‌دهد، که برای خیز ۵ mm، مقدار بازشدگی ۰.۴۶۷ میلی‌متر و برای خیز ۱ mm، مقدار بازشدگی برابر ۰.۹۹۸ میلی‌متر است. شکل ۱۲، نیز بسته شدن ترک در اثر اعمال نیرو (f_t) بر دو لبه‌ی ترک را نشان می‌دهد.

نیروی چسبندگی در مرز ترک طبق نمودار شکل ۱۲ محاسبه و اعمال شده است. بدین صورت که با فرض مقدار صفر برای بازشدگی ترک در شروع حل مسئله، مقدار تنش چسبندگی بر لبه‌های ترک برابر با f_t در نظر گرفته شده است. پس از یک بار حل و محاسبه‌ی میزان بازشدگی ترک در هر نقطه از طول آن، در مرحله‌ی

۷. نتیجه گیری

در پژوهش حاضر، مدل سازی تئوری ترک چسبیده براساس رفتار خطی ترک و کاهش نیروی چسبیده در اثر افزایش بازشدگی ترک با روش عددی بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته انجام شده است. یکی از اهداف پژوهش حاضر، به کارگیری توابع شکل ناپیوسته به منظور مدل سازی فیزیکی ترک با روش معیار مشاهده‌ی در روش عددی بدون شبکه‌ی کمینه مربعات به همراه مدل سازی تئوری ترک چسبیده به منظور رفتارنگاری آن است. در تئوری ترک چسبیده و رفتارنگاری آن در مدل ارائه شده، تغییر شکل نهایی نسبت به تغییر شکل اولیه بسیار بزرگ تر است، که مدل کردن چنین حالتی در روش‌های وابسته به المان یا اجزاء محدود با پیچیدگی‌های زیادی همراه است. مزیت به کارگیری روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات به دلیل اینکه روشی کاملاً بدون شبکه است، در صورت وجود چنین تغییر شکل‌های بزرگی فقط نقاط محدودی ترک به هم نزدیک ترمی شوند و در نتیجه در روند حل مسئله تغییری به وجود نمی آید. در پژوهش حاضر، روش بدون شبکه‌ی کمینه مربعات گسسته جهت مدل سازی رفتار ترک چسبیده تا قبل از مرحله‌ی از دست دادن مقاومت توسعه داده شده است. هدف از این مدل سازی، نشان دادن توانایی روش مورد نظر در پیش بینی بازشدگی نوک ترک است، که این موضوع با توجه به منحنی ارائه شده (نمودار $F - \Delta$)، شکل ۱۴، نقطه‌ی اوج منحنی در واقع شروع بازشدگی نوک ترک در نیرو و خیز مشخص است، که تنش چسبیده‌ی ترک (f_t) در این نقطه صفر و منحنی نزولی می شود، که این همان لحظه‌ی از دست دادن مقاومت ترک و بازشدگی نوک ترک است. نتایج به دست آمده گویای این مطلب است که رفتار تغییر شکل تیر مورد آزمایش در مقابل بار اعمال شده جهت مدل سازی ترک چسبیده قابل قبول است و همخوانی خوبی با نتایج روش اجزاء محدود و روش گالریکن مستقل از شبکه و نیز نتایج آزمایشگاهی دارد.

روش کمینه مربعات توانایی پیش بینی رفتار اجسام ترک دار در شرایط دو بعدی را تا نقطه‌ی پیشینه‌ی نمودار نیرو - جابه جایی دارد. در این فرایند، رفتار غیرخطی مواد در مکانیک جامدات به صورت غیرمستقیم و به صورت حل تکراری مدل شده است. با توجه به اینکه گسسته سازی حوزه‌ی فیزیکی مسئله در روش کمینه مربعات گسسته مستقل از المان و المان بندی است، بنابراین نگرانی از بابت به هم خوردن فاصله‌ی نقاط و المان‌ها، که معمولاً در روش‌های مبتنی بر شبکه وجود دارد، در هنگام مدل سازی رشد ترک وجود ندارد و این از مزایای روش مذکور است. در مجموع می توان گفت روش کمینه مربعات گسسته در حل مسائل با حوزه‌ی فیزیکی حاوی ترک، کارایی و دقت بالایی دارد.



شکل ۱۵. الگوریتم محاسباتی مدل ترک چسبیده.

پانویسها

1. discrete least square
2. error estimate
3. adaptive refinement
4. extended finite element method
5. size effect
6. element free Galerkin method
7. reproduce Kernel particle method

8. fracture process zone
9. mathematical crack tip
10. physical crack tip
11. traction
12. softening
13. visibility criterion
14. Visual-Fortran 6.5

منابع (References)

1. Arzani, H. and Afshar, M.H. "Solving poisson`s equations by the discrete least square meshless method", *WIT Transactions on Modelling and Simulation*, **42**, pp. 23-32 (2004).
2. Firoozjaee, A.R. and Afshar, M.H. "Collocation discrete least square meshless method for the solution of free surface seepage problem", *International Journal of Civil Engineering*, **5**(2), pp. 134-143 (2007).
3. Naisipour, M. "Extending collocation discrete least square meshless method for elasticity problems, error estimate and adaptive refinement", Master of Engineering in Hydraulic Structures, Iran University of Science and Technology (2008).
4. Naisipour, M., Afshar, M.H., Hassani, B. and Firoozjaee, A.R. "Collocation discrete least square (CDLS) method for elasticity problem and grid irregularity effect assessment", *American Journal of Applied Sciences*, **5**(11), pp. 1595-1601 (2008).
5. Arzani, H., Kaveh, A. and Dehghan, M. "Adaptive node moving refinement in discrete least squares meshless method using charged system search", *ScientiaIranica A*, **21**(5), pp. 1529-1538 (2014).
6. Wells, G.N. and Sluys, L.J. "A new method for modeling cohesive cracks usings finite elements", *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, **50**, pp. 2667-2682 (2001).
7. Moes, N. and Belytschko, T. "Extended finite element method for cohesive crack growth", *Engineering Fracture Mechanics*, **69** pp. 813-833 (2002).
8. Cusatis, G. and Schaufert, E.A. "Cohesive crack analysis of size effect", *Elsevier, Engineering Fracture Mechanics*, **76**, pp. 2163-2173 (2009).
9. Soparat, P. and Nanakorn, P. "Analysis of cohesive crack growth by the element-free Galerkin method", *Journal of Mechanics*, **24**(1), pp. 45-54(2008).
10. Zi, G., Rabczuk, T. and Wall, W. "Extended meshfree method without branch enrichment for cohesive cracks", Springer-Verlag, 16 p. (2006).
11. Mohammad Nataj, M. "Analysis of cohesive crack via reproducing kernel particle method (RKPM)", Master of Science Thesis, Sharif University of Technology (2009).
12. Forghani, A. "Analysis of cohesive crack via the extended finite element", Master of Science Thesis, Sharif University of Technology (2005).
13. Kormeling, H.A. and Reinhardt, H.W., *Determination of the Farcture Energy of Normal Concrete and Epoxy Modified Concrete*, Report No. 5-83-18,. Delft University of Technology. Delft (1983).
14. Prasad, M.V.K.V. and Krishnamoorthy, C.S. "Computational model for discrete crack growth in plain and reinforced concrete", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **191**, pp. 2699-2725 (2002).
15. Unger, J.F. and CarstenKonke, S.E. "Modeling of cohesive crack growth in concrete structures with the extended finite element method", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **196**, pp. 4087-4100 (2007).
16. Belytschko, T., Organ, D.J. and Krongauz, Y. "A coupled finite element-element- free galerkin method", *Comput. Mech.*, **17**, pp. 186-195 (1995).
17. Afrosha, K. "Modeling and Analyzing of crackin plane stress problems using discrete least square meshless method based in transparency theorem", Master of Science Thesis, Shahid Rajae Teacher Training University (2013).