Original Article

مهندسی عمران شریف، (تابستان ۱۳۹۶)
دوره‌ی ۲-۳۳، شماره‌ی ۲/۲، ص. ۸۷-۹۷

تقریب ضرایب سری ویلیامز در مسائل مکانیک شکست ارتجاعی خطی با استفاده از روش معادلات مجزا

مهدی یزدانی (دانشجوی دکتری)
ناصر خاجی* (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

mahdi.yazdani@modares.ac.ir
nkhaji@modares.ac.ir

یکی از مهم‌ترین مسائل در تحلیل و طراحی سازه‌ها، وجود ترک و نقص در سازه‌هاست. بسیاری از سازه‌ها که ترک دارند، به‌صورت تحلیلی قابل حل نیستند؛ از این‌رو، حل مسائل مکانیک شکست با روش‌های عددی به یکی از مسائل مهم تبدیل شده است. نوشتار حاضر به توسعه‌ی یک روش نیمه‌تحلیلی جدید به نام روش معادلات مجزا پرداخته است، که در آن با استفاده از نظریه‌ی مکانیک شکست ارتجاعی خطی، ضرایب میدان ارتجاعی مجانبی نوک ترک، که به ضرایب سری ویلیامز شهرت دارند، محاسبه و با محاسبه‌ی ۴ ضریب اول سری ویلیامز، میدان جابه‌جایی و تنش تقریب زده شده است. در ادامه، با تعریف دستگاه مختصات مرجع در نوک ترک و تعریف یک فرم جدید از بردار نیروهای گرهیی، مسئله‌ی ترک در روش معادلات مجزا پیاده‌سازی شده و با حل دو مثال عددی، روش معادلات مجزا مورد صحت‌سنجی قرارگرفته است.

واژگان کلیدی: روش معادلات مجزا، مکانیک شکست ارتجاعی خطی، سری ویلیامز، مسائل دوبُعدی.

۱. مقدمه

پژوهش‌ها نشان می‌دهند که بیشتر فروریختگی‌های ایجادشده در سازه‌ها به‌علت ایجاد ناپیوستگی در هندسه‌ی سازه‌ها و به‌وجود آمدن تمرکز تنش است. ناپیوستگی در هندسه می‌تواند به‌صورت تغییرات در شکل هندسی، بازشدگی، سوراخ، ترک و شکاف باشد. بنابراین یکی از مسائل مهم در تحلیل و طراحی سازه‌ها، درنظرگرفتن اثر وجود ترک در سازه است. بسیاری از مسائلی که ترک دارند، به‌صورت تحلیلی قابل حل نیستند؛ و لازم است این مسائل با روش‌های عددی حل شوند. حل مسئله‌ی ترک با استفاده از برخی از روش‌های عددی از لحاظ فرمول‌بندی، تا حدی پیچیده است و از لحاظ محاسباتی، هزینه‌ی نسبتاً بالایی دارند. از این‌رو، توسعه و بهبود روش‌های عددی برای حل این قبیل مسائل، امری اجتناب‌ناپذیر است. مهم‌ترین روش‌های عددی که تاکنون برای حل مسائل مکانیک شکست توسعه داده شده‌اند، عبارتند از: روش اجزاء محدود، المان مرزی، اجزاء محدود توسعه‌یافته، روش‌های بدون المان، و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس شده. روش اجزاء محدود به‌طور وسیعی در مسائل مکانیک شکست به‌کار برده شده است، ولی المان‌های رایج که در روش مذکور به کار می‌روند، در نزدیکی ترک‌ها و حفره‌ها، دقت خوبی ندارند و حتی اگر تعداد المان‌ها را در این محدوده زیاد کنیم، به دقت موردنیاز نخواهیم رسید. برای حل مشکل عنوان‌شده، پژوهشگران تدابیر خاصی اتخاذ کرده‌اند.

به‌طورکلی، برای به‌دست آوردن ضریب شدت تنش با استفاده از روش اجزاء محدود از المان‌های تکین یک‌چهارم (یا المان نوک ترک) استفاده می‌شود.[۱-۳] در ادامه، به‌علت بعضی از مشکلات موجود در روش اجزاء محدود، روش‌های عددی دیگری توسعه یافته‌اند. مثلاً به دلیل پیچیدگی‌های موجود در فرایند الگوریتم‌های المان‌بندی متوالی در روش اجزاء محدود، روش اجزاء محدود توسعه‌یافته به‌وجود آمده است.[۴-۶] همچنین، به‌دلیل نیاز به المان‌های فراوان در اطراف نوک ترک‌های بسیار ریز و هزینه‌های محاسباتی و زمانی بالا، روش المان مرزی توسعه داده شده است.[۷-۸] توسعه‌ی روش المان مرزی برای حل مسائل مکانیک شکست، اولین بار در سال ۱۹۷۲ ارائه شده است،[۹] که در آن ضریب شدت تنش با دقت کمی به‌دست آمده بود. با به‌دست آوردن تابع گرین ترک، که در آن فرم دقیق ترکشن وجود داشت، نیاز به مدل‌سازی لبه‌های ترک از بین رفت و دقت حل ضرایب تنش بهبود یافت و تا به امروز این روش بسیار توسعه یافته است. از آنجایی که در روش المان مرزی فقط مرز حوزه المان‌بندی می‌شود، از لحاظ هزینه‌های محاسباتی نسبت به روش اجزاء محدود، کاهش چشم‌گیری دارد. در روش المان مرزی، تنش‌ها در نقاط داخل میدان، دقت بالایی دارند، زیرا در روش المان مرزی، تقریبی در جواب داخل میدان اعمال نمی‌شود و جواب در داخل میدان دقیق و پیوسته است. بنابراین روش المان مرزی در مسائلی که در آن تغییرات تنش زیاد است (همانند مسئله ترک)، بسیار مناسب است.

---

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۴/۵/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۴/۹/۲۳، پذیرش ۱۳۹۴/۱۰/۲.

البته لازم به‌ذکر است که روش المان مرزی، انعطاف‌پذیری روش اجزاء محدود را ندارد.[۹-۱۰] روش‌های بدون المان، باتوجه به اینکه نیازی به گسسته‌سازی ندارند، برای حل مسائل ترک نیز مورد توجه قرار گرفته‌اند.[۱۱] همچنین در سال‌های اخیر، روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده با توجه به دقت مناسبی که دارد، برای حل مسائل مکانیک شکست بسیار مورد توجه قرار گرفته است. روش مذکور با ترکیب روش‌های اجزاء محدود و المان مرزی، ویژگی‌های منحصر به فردی دارد. در روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده مشابه المان مرزی فقط مرز مسئله گسسته‌سازی می‌شود، با این تفاوت که نیازی به حل اساسی ندارد.[۱۲-۱۳] روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده، بسیاری از مشکلات موجود در روش اجزاء محدود از جمله مش‌بندی بسیار ریز در اطراف نوک ترک و یا استفاده از المان‌های مخصوص تقویت‌شده در اطراف نوک ترک را حذف می‌کند. در مطالعه‌یی نشان داده شده است که روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده به راحتی می‌تواند ضریب شدت تنش را محاسبه کند.[۱۴] در ادامه، برخی پژوهشگران، مسائل مختلف مکانیک شکست را در روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده مورد ارزیابی قرار داده‌اند.[۱۵-۱۷]

در مکانیک شکست، سری ویلیامز یکی از مفاهیم پایه‌یی و مهم است. با توجه به تکینگی‌های موجود در نوک ترک، میدان جابه‌جایی و تنش در محیط ترک‌دار به‌صورت یک سری نامتناهی ویژه بیان می‌شود، که اولین بار توسط ویلیامز (۱۹۵۷) پیشنهاد شده است.[۱۸] اولین جمله از سری ویلیامز مربوط به ضریب شدت تنش است.[۱۹] ضریب شدت تنش در محاسبه‌ی رشد ترک، انتگرال J، و محاسبه‌ی انرژی محیط ترک‌دار کاربرد فراوانی دارد، و به‌همین منظور مطالعات وسیعی برای محاسبه‌ی آن صورت گرفته است.[۲-۱۱، ۱۴-۲۰] ضریب دوم از سری ویلیامز مربوط به تنش T است. تنش T در محاسبه‌ی جهت رشد ترک، پایداری ترک، و محاسبه‌ی چقرمگی در مکانیک شکست کاربرد دارد. با توجه به محدودیت‌های موجود در پژوهش‌های آزمایشگاهی و روش‌های عددی، مطالعات کمتری در محاسبه‌ی تنش T نسبت به ضریب شدت تنش انجام شده است.[۲۱-۲۴]

مطالعات سال‌های اخیر نشان داده است که علاوه بر جمله‌های اول و دوم سری ویلیامز، جملات بالاتر آن نیز اهمیت به‌سزایی دارند. مهم‌ترین کاربرد ضرایب بالاتر سری ویلیامز مربوط به محاسبه‌ی اثر اندازه در محیط ترک‌دار است.[۲۵] در محاسبه‌ی ضرایب بالاتر سری ویلیامز، مطالعات بسیار کمتری انجام شده است. در سال ۲۰۱۲، جهت محاسبه‌ی ضرایب سری ویلیامز، روشی تحلیلی برای ورق بی‌نهایت با ترک مرکزی پیشنهاد شده است.[۲۶] در مورد روش‌های عددی، پژوهش‌های نادری توانسته‌اند که ضرایب سری ویلیامز را محاسبه کنند. در این میان می‌توان به روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده،[۲۷] روش ترکیبی بدون المان و روش اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده،[۲۸] روش المان ترک ترکیبی،[۲۹و۳۰] و روش اجزاء محدود ترکیبی فراکتال،[۳۱] اشاره کرد، که ۵ جمله‌ی اول سری ویلیامز را برای مود اول محاسبه کرده‌اند.

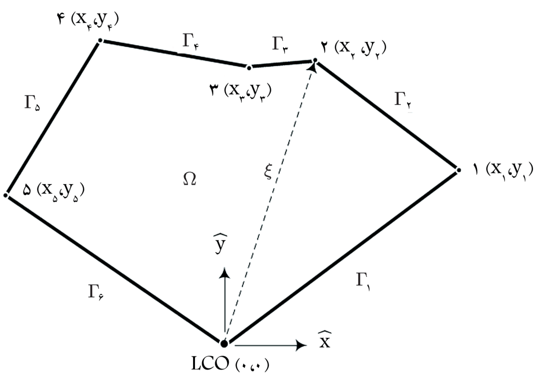
یکی از روش‌های نسبتاً جدید، روش معادلات مجزاست، که توسط خاجی و همکاران پیشنهاد شده است، و برای حل مسائل مختلفی مورد بررسی قرار گرفته است. از مهم‌ترین دستاوردهای روش معادلات مجزا می‌توان به حل مسائل پتانسیل،[۳۲] الاستواستاتیک،[۳۳و۳۴] الاستودینامیک،[۳۵و۳۶] و انتشار امواج ارتجاعی،[۳۷] اشاره کرد. هدف از پژوهش حاضر، توسعه‌ی روش معادلات مجزا برای تقریب‌زدن سری ویلیامز است. برای این منظور در بخش ۲، خلاصه‌یی از روش نیمه‌تحلیلی معادلات مجزا؛ در بخش ۳، توسعه‌ی روش مذکور در محیط‌های ترک‌دار؛ در بخش ۴، نحوه‌ی استخراج ضرایب سری ویلیامز با استفاده از روش معادلات مجزا؛ در بخش ۵، اعتبارسنجی روش حاضر با استفاده از ۲ مثال؛ و سرانجام در بخش ۶، دستاوردهای نوشتار حاضر ارائه شده است.

۲. مبانی روش معادلات مجزا

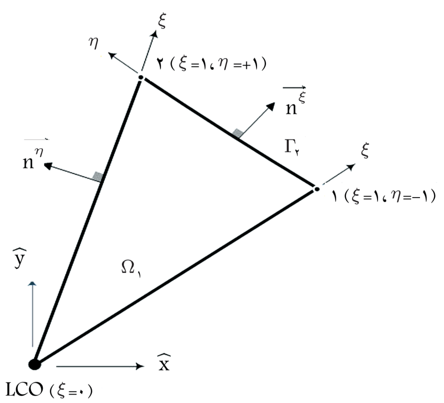
در روش معادلات مجزا از ۴ ابزارکلیدی استفاده می‌شود، تا ماتریس ضرایب معادلات حاکم قطری شود و دستگاه معادلات حاکم به‌صورت مجزا و مستقل از هم نوشته شوند. رسیدن به این هدف با استفاده از: ۱. توابع شکل مرتبه‌ی بالا؛ ۲. توابع نگاشت چبیشف؛ ۳. روش انتگرال‌گیری کلینشا - کورتیز؛ و ۴. روند تولید فرم انتگرالی معادله‌ی حاکم بر مسئله‌ی مربوط مهیا شده است. در اینجا، خلاصه‌یی از روش معالات مجزا به‌صورت زیر ارائه شده است:

۱.۲. استخراج معادلات حاکم

به منظور مدل‌سازی هندسه و همچنین فیزیک مسئله در روش معادلات مجزا، ابتدا یک نقطه به‌عنوان مرجع مختصات محلی (LCO) انتخاب و تمام خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله نسبت به آن ارزیابی می‌شوند. در عین حال، فقط مرزهای مسئله با استفاده از المان‌هایی با یک بُعد کمتر از بُعد فضای مسئله المان‌بندی می‌شوند. مطابق شکل ۱، مشخصات یک هندسه‌ی دلخواه در دستگاه مختصات اصلی و دستگاه مختصات مقیاس‌شده نشان داده شده است. با توجه به انتخاب محورهای محلی، مرزهای مسئله به‌طورکلی به ۲ دسته تقسیم می‌شوند: ۱. مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO می‌گذرند و روی محور شعاعی ξ قرار می‌گیرند، و ۲. مرزهایی که امتداد آن‌ها از LCO نمی‌گذرند (مرزهایی که موازی η هستند). در روش معادلات مجزا، فقط باید مرزهای نوع دوم را المان‌بندی کرد. محدوده‌ی تغییرات



الف) هندسه مسئله در مختصات کلی؛



ب) هندسه مسئله دو بعدی در مختصات محلی.

شکل ۱. نحوه‌ی مدل‌سازی مسائل دوبُعدی.[۳۲]

محور مماسی η به‌صورت $-1 \leq \eta \leq +1$ است. در مسائل محدود، تغییرات محور شعاعی ξ بین صفر (در LCO) و یک (بر روی مرزها) است.
در روش مذکور، مختصات هر نقطه‌ی درون حوزه‌ی مسئله در مختصات کلی با $(\hat{x},\hat{y})$ مشخص می‌شود، در حالی که مختصات هر نقطه از مرزهای مسئله نیز با (x,y) تعیین می‌شود. به‌منظور انتقال هندسه‌ی مسئله از مختصات کلی $(\hat{x},\hat{y})$ به مختصات محلی (ξ,η)، از توابع نگاشت که از نوع چندجمله‌یی‌های مرتبه‌ی بالای چبیشف $[\Phi(\eta)]$ هستند، استفاده می‌شود. بنابراین مختصات هر نقطه روی مرزهای مسئله با استفاده از توابع نگاشت به‌صورت رابطه‌های ۱ و ۲ قابل محاسبه خواهد بود:

$$x(\eta)=\sum_{i=1}^{n_\eta+1}\varphi_i(\eta)\,x_i \tag{1}$$

$$y(\eta)=\sum_{i=1}^{n_\eta+1}\varphi_i(\eta)\,y_i \tag{2}$$

که در آن‌ها، x و y مختصات نقاط روی مرز در دستگاه مختصات کلی و n_η تعداد نقاط گره‌یی المان‌های روی مرز هستند. در روش معادلات مجزا، مختصات هر نقطه درون حوزه‌ی مسئله با استفاده از روابط ۳ و ۴ محاسبه می‌شود:

$$\hat{x}(\xi,\eta)=\xi\,x(\eta)=\xi\sum_{i=1}^{n_\eta}\phi_i(\eta)\,x_i \tag{3}$$

$$\hat{y}(\xi,\eta)=\xi\,y(\eta)=\xi\sum_{i=1}^{n_\eta}\phi_i(\eta)\,y_i \tag{4}$$

تابع نگاشت برای یک المان $n_\eta+1$ گره‌یی، با استفاده از چندجمله‌یی‌های چبیشف به‌صورت رابطه‌ی ۵ تعیین می‌شود:

$$\varphi_i(\eta)=\frac{2}{n_\eta}\sum_{n=0}^{n_\eta}\frac{1}{c_{(i-1)}c_n}T_n(\eta_{(i-1)})\,T_n(\eta) \tag{5}$$

که در آن، $T_n(\eta)$ چندجمله‌یی چبیشف نوع اول از مرتبه‌ی n است. همچنین برای مقادیر $0<n<n_\eta$، مقدار $c_n=1$ است و برای مقادیر n_η و $n=0$ مقدار $c_n=2$ است. به این ترتیب، توابع نگاشت به‌دست آمده، خاصیت دلتای کرونیکر در هر یک از گره‌ها دارند (رابطه‌ی ۶):

$$\varphi_\alpha(\eta_\beta)=\delta_{\alpha\beta} \tag{6}$$

نقاط گره‌یی η_n که در آنها $n=0,...,n_\eta$ است، نقاط چبیشفی هستند که با استفاده از رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آیند:

$$\eta_n=-\cos(\frac{n\pi}{n_\eta}),\qquad n=0,...,n_\eta \tag{7}$$

که در آن، هر المان دارای $n_\eta+1$ گره است، که با استفاده از آن‌ها چندجمله‌یی‌هایی از درجه‌ی n_η برای درون‌یابی هندسه تولید می‌شوند. به منظور استخراج روابط حاکم در مختصات محلی، به برخی از روابط پایه نیاز است. جزء سطح المان در مختصات کلی $(d\hat{x}\,d\hat{y})$ با جزء سطح المان در مختصات محلی $(d\xi d\eta)$ رابطه‌یی به‌صورت رابطه‌ی ۸ دارد:

$$d\Omega=d\hat{x}\,d\hat{y}=\left|\hat{J}(\xi,\eta)\right|d\xi\,d\eta=\xi\left|J(\eta)\right|d\xi\,d\eta \tag{8}$$

که در آن، $\hat{J}(\xi,\eta)$ ماتریس ژاکوبی انتقال است و از رابطه‌ی ۹ به‌دست می‌آید:

$$\hat{J}(\xi,\eta)=\begin{bmatrix}\hat{x}_{,\xi}(\xi,\eta) & \hat{y}_{,\xi}(\xi,\eta)\\ \hat{x}_{,\eta}(\xi,\eta) & \hat{y}_{,\xi}(\xi,\eta)\end{bmatrix} \tag{9}$$

ماتریس ژاکوبی روی مرزها نیز با استفاده از روابط ۳ و ۴ به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود:

$$J(\eta)=\begin{bmatrix}x(\eta) & y(\eta)\\ x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta)\end{bmatrix} \tag{10}$$

در مسائل دوبُعدی، ماتریس اپراتور مشتق $[L]$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:

$$[L]=\begin{bmatrix}\frac{\partial}{\partial\hat{x}} & 0 & \frac{\partial}{\partial\hat{y}}\\ 0 & \frac{\partial}{\partial\hat{y}} & \frac{\partial}{\partial\hat{x}}\end{bmatrix}^T \tag{11}$$

بنابراین، رابطه‌ی مشتق‌های بردار مذکور در دو دستگاه مختصات کلی و محلی با استفاده از رابطه‌ی ۱۲ بیان می‌شود:

$$[L]=[b^1(\eta)]\frac{\partial}{\partial\xi}+[b^2(\eta)]\frac{1}{\xi}\frac{\partial}{\partial\eta} \tag{12}$$

که در آن $[b^1(\eta)]$ و $[b^2(\eta)]$ از رابطه‌های ۱۳ و ۱۴ به‌دست می‌آیند:

$$[b^1(\eta)]=\frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix}y(\eta)_{,\eta} & 0\\ 0 & -x(\eta)_{,\eta}\\ -x(\eta)_{,\eta} & y(\eta)_{,\eta}\end{bmatrix} \tag{13}$$

$$[b^2(\eta)]=\frac{1}{|J(\eta)|}\begin{bmatrix}-y(\eta) & 0\\ 0 & x(\eta)\\ x(\eta) & -y(\eta)\end{bmatrix} \tag{14}$$

به‌منظور محاسبه‌ی ترکشن در هر امتداد، نیاز به دانستن بردار نرمال در آن امتداد است. بردار نرمال عمود بر سطح $\{n\}$ بر روی مرزهای مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ تعریف می‌شوند:

$$\{n\}=\frac{1}{|\nabla\vec{x}|}\ \nabla\vec{x} \tag{15}$$

با استفاده از رابطه‌های ۳ و ۴، رابطه‌ی ۱۵ برای دو جهت ξ و η را می‌توان به‌صورت رابطه‌های ۱۶ و ۱۷ نوشت:

$$[n^\xi(\eta)]=\frac{1}{\left|\left\{\begin{matrix}y_{,\eta}(\eta)\\ -x_{,\eta}(\eta)\end{matrix}\right\}\right|}\begin{bmatrix}y_{,\eta}(\eta) & 0\\ 0 & -x_{,\eta}(\eta)\\ -x_{,\eta}(\eta) & y_{,\eta}(\eta)\end{bmatrix} \tag{16}$$

$$[n^\eta(\eta)]=\frac{1}{\left|\left\{\begin{matrix}-y(\eta)\\ x(\eta)\end{matrix}\right\}\right|}\begin{bmatrix}-y(\eta) & 0\\ 0 & x(\eta)\\ x(\eta) & -y(\eta)\end{bmatrix} \tag{17}$$

در روش معادلات مجزا از توابع شکل با ویژگی‌های خاصی استفاده می‌شود، که در حالت کلی با $[N]$ نشان داده می‌شوند. درون‌یابی توابع بر روی مرزها با استفاده از توابع شکل مذکور انجام می‌گیرد، که دو ویژگی مهم دارند: ۱. در نقاط گره‌یی

المان‌ها، خاصیت دلتای کرونیکر دارند؛ و ۲. مشتق اول آن‌ها نسبت به محورهای محلی مماسی در تمام گره‌ها برابر صفر است (رابطه‌های ۱۸ و ۱۹):

$$N_\alpha(\eta_\beta) = \delta_{\alpha\beta} \tag{۱۸}$$

$$N_{\alpha,\eta}(\eta_\beta) = 0 \tag{۱۹}$$

توابع شکل پیشنهادی برای یک المان $n_\eta + 1$ گرهیی، یک چندجمله‌یی از مرتبه‌ی $2n_\eta + 1$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ است، که $2n_\eta$ پارامتر مجهول دارد:

$$N_i(\eta) = \sum_{m=0}^{2n_\eta+1} a_m\eta^m = N_i(\eta) = a_0 + a_1\eta + a_2\eta^2 + a_3\eta^3 + \dots + a_{2n_\eta+1}\eta^{2n_\eta+1} \tag{۲۰}$$

ضرایب ثابت در رابطه‌ی ۲۰، با اعمال شرایط رابطه‌های ۱۸ و ۱۹ تعیین می‌شوند. مؤلفه‌های تغییرمکان در هر نقطه از فضای مسئله‌ی موردنظر به مختصات (ξ, η)، که به‌صورت رابطه‌ی $\{u(\xi,\eta)\} = [u_x(\xi,\eta)\ u_y(\xi,\eta)]^T$ تعریف می‌شوند، با استفاده از توابع شکل بر حسب تغییرمکان گره‌های واقع بر المان‌های روی مرز با استفاده از رابطه‌ی ۲۱ محاسبه می‌شوند:

$$\{u(\xi,\eta)\} = [N(\eta)]\{u(\xi)\} = [N(\eta)]\Big[u_x(\xi)\ u_y(\xi)\Big]^T \tag{۲۱}$$

با استفاده از روابط ۱۳ و ۱۴، مؤلفه‌های کرنش در نقطه‌ی (ξ, η) در فضای مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۲۲ بیان می‌شوند:

$$\{\varepsilon(\xi,\eta)\} = \left[\varepsilon_x(\hat{x},\hat{y})\ \ \varepsilon_y(\hat{x},\hat{y})\ \gamma_{xy}(\hat{x},\hat{y})\right]^T = \left[B^1(\eta)\right]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \frac{1}{\xi}\left[B^2(\eta)\right]\{u(\xi)\} \tag{۲۲}$$

که در آن $[B^1(\eta)]$ و $[B^2(\eta)]$ از رابطه‌های ۲۳ و ۲۴ به‌دست می‌آیند:

$$\left[B^1(\eta)\right] = \left[b^1(\eta)\right]\left[N(\eta)\right] \tag{۲۳}$$

$$\left[B^2(\eta)\right] = \left[b^2(\eta)\right]\left[N(\eta)\right]_{,\eta} \tag{۲۴}$$

همچنین با استفاده از قانون هوک، در مورد مؤلفه‌های تنش در هر نقطه به مختصات (ξ, η)، می‌توان از رابطه‌های ۲۵ و ۲۶ استفاده کرد:

$$\{\sigma(\xi,\eta)\} = [D]\{\varepsilon(\xi,\eta)\}$$

$$\{\sigma(\xi,\eta)\} = [D]\bigg([b^1(\eta)][N(\eta)]\{u(\xi)\}_{,\xi} \tag{۲۵}$$

$$+\frac{1}{\xi}[b^2(\eta)][N(\eta)]_{,\eta}\{u(\xi)\}\bigg) \tag{۲۶}$$

که در آن‌ها، $[D]$ بیانگر ماتریس خواص مصالح است.

معادله‌ی تعادل حاکم بر مسائل الاستواستاتیک دوبُعدی به‌صورت رابطه‌ی ۲۷ بیان می‌شود:

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \tag{۲۷}$$

که در آن، σ_{ij} بیانگر اجزاء تانسور تنش دوبُعدی است و f_i نیز مؤلفه‌های نیروهای حجمی اعمال‌شده بر فضای مسئله هستند. لازم به ذکر است که در حالت دوبُعدی مسائل الاستواستاتیک، $i = \hat{x}, \hat{y}$ و $j = \hat{x}, \hat{y}$ هستند. معادله‌ی حاکم ۲۷ را می‌توان به فرم قوی و با استفاده از روش‌های تحلیلی، یا به فرم باقیمانده‌ی وزن‌دار و به‌صورت عددی حل کرد. مبنای روش ارائه‌شده برای حل مسائل، روش باقیمانده‌های وزن‌دار است، بنابراین رابطه‌ی ۲۸ را خواهیم داشت:

$$\int_\Omega w\left(\sigma_{ij,j} + f_i\right) d\Omega = 0 \tag{۲۸}$$

با حل رابطه‌ی ۲۸، با استفاده از روش باقیمانده‌های وزن‌دار، معادله‌ی تعادل در روش معادلات مجزا به‌صورت رابطه‌ی ۲۹ استخراج می‌شود:[33]

$$\xi[D^0]\{u(\xi)\}_{,\xi\xi} + [D^1]\{u(\xi)\}_{,\xi} + \xi\{F^b(\xi)\} = \{0\} \tag{۲۹}$$

که در آن، ماتریس‌های ضرایب و بردار موجود به‌صورت روابط ۳۰ الی ۳۲ تعریف می‌شوند:

$$[D^0] = \int_{-1}^{+1}[B^1(\eta)]^T[D][B^1(\eta)]|J(\eta)|d\eta \tag{۳۰}$$

$$[D^1] = \int_{-1}^{+1}[B^2(\eta)]^T[D][B^1(\eta)]_{,\eta}|J(\eta)|d\eta \tag{۳۱}$$

$$\{F^b(\xi)\} = \int_{-1}^{+1}[N(\eta)]^T\{f^b(\xi,\eta)\}|J(\eta)|d\eta \tag{۳۲}$$

که در رابطه‌ی اخیر، $\{F^b\} = [F_x^b\ F_y^b]^T$ بردار نیروهای حجمی در گره‌هاست. در معادله‌ی دیفرانسیل (رابطه‌ی ۲۹) ماتریس‌های ضرایب ثابت با استفاده از روش انتگرال‌گیری کلنشا - کورتیس محاسبه شده است. استفاده از این روش انتگرال‌گیری به همراه توابع شکل و نگاشت ویژه‌ی معرفی‌شده سبب تولید ماتریس‌های ضرایب قطری می‌شود (روابط ۳۳ و ۳۴):

$$D_{ij}^0 = 2\delta_{ij}w_i[B^1(\eta_i)]^T\,[D][B^1(\eta_i)]|J(\eta_i)| \tag{۳۳}$$

$$D_{ij}^1 = 2\delta_{ij}w_i[B^2(\eta_i)]^T\,[D][B^1(\eta_i)]_{,\eta}|J(\eta_i)| \tag{۳۴}$$

که در آن‌ها، δ_{ij} دلتای کرونیکر است. بنابراین دستگاه معادلات درگیر رابطه‌ی ۲۹ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳۵ به ازاء هر درجه آزادی i نوشت:

$$\xi D_{ii}^0\,u_{i,\xi\xi}(\xi) + D_{ii}^1\,u_{i,\xi}(\xi) + \xi\,F_i^b(\xi) = 0 \tag{۳۵}$$

۲.۲. روند حل معادله‌ی حاکم

درگام نخست روش مذکور، رابطه‌ی ۳۵ فقط برای گره‌هایی که تحت بارگذاری قرار دارند، محاسبه می‌شود. درگام دوم، تغییرات تنش برای هر یک از درجات آزادی فوق‌الذکر در امتداد محور ξ با استفاده از رابطه‌ی ۲۶ تعیین می‌شود. سپس با استفاده از روابط تعادل، مقدار مؤلفه‌های نیروهای داخلی متمرکز مرتبط با هرگره در امتداد محور ξ و همچنین میزان تنش داخلی در نقطه‌ی LCO براساس رابطه‌ی ۳۶ محاسبه می‌شود:

$$\{\sigma_{LCO}\} = \sum_{i=1}^{n}\{\sigma_{LCOi}\} \tag{۳۶}$$

که در آن، سهم هر یک ازگره‌ها با توجه به بازپخش این تنش داخلی در LCO از رابطه‌ی ۳۷ به‌دست می‌آید:

$$\{\sigma_{LCOi}\} = \frac{D_{ii}^0}{\sum\limits_{j=1}^{n} D_{jj}^0}\{\sigma_{LCO}\} \tag{۳۷}$$

در گام بعدی، بار دیگر معادله‌ی حاکم، با درنظر گرفتن نیروی داخلی حجمی محاسبه‌شده براساس تنش داخلی LCO به‌عنوان بار حجمی در امتداد ξ رابطه‌ی ۳۸، به ازاء هر درجه آزادی حل و مؤلفه‌های تغییرمکان مربوط به هر گره در امتداد محور ξ محاسبه می‌شود:

$$\{f_i^b(\xi)\} = [n^\eta]^T\{\sigma_i(\xi)\} \quad (۳۸)$$

در گام پایانی، و با مشخص‌شدن تابع مؤلفه‌های تغییرمکان برای هر گره در امتداد محور ξ، پاسخ برای سایر نقاط، با استفاده از توابع شکل درون‌یابی می‌شود. همچنین میزان تنش در هر نقطه از حوزه‌ی مسئله نیز با استفاده از رابطه‌ی ۲۶ تعیین می‌شود.

۳. توسعه‌ی روش معادلات مجزا در مکانیک شکست

طبق مطالب ارائه‌شده در بخش ۲، برای توسعه‌ی روش معادلات مجزا برای هر مسئله‌یی لازم است که هندسه و فیزیک مسئله‌ی مربوط در روش معادلات مجزا استخراج شود. برای همین منظور در ادامه، دو زیر بخش برای مسائل مکانیک شکست ارائه شده است:

۱.۳. مدل‌سازی هندسه‌ی ترک

با توجه به مطالعات انجام‌شده برای بیان مسئله‌ی ترک براساس مبانی روش معادلات مجزا و مفاهیم مکانیک شکست از ۳ فرض جهت بیان ترک در هندسه‌ی مسئله به این صورت استفاده شده است:

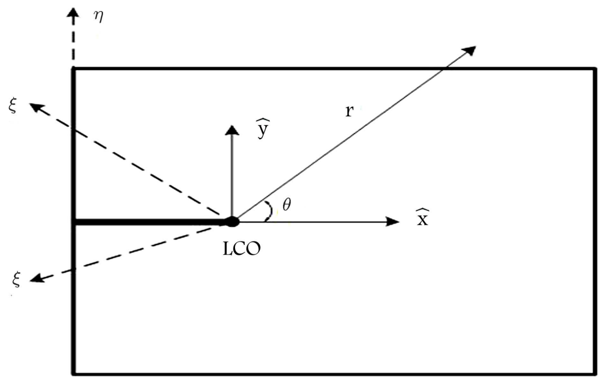
- مدل‌سازی هندسه‌ی ترک در حوزه‌ی مسئله: مشابه روش‌های اجزاء محدود، المان مرزی و اجزاء محدود مرزی مقیاس‌شده، هندسه‌ی ترک در حوزه‌ی مسئله به‌صورت فضای خالی بسیار کوچکی مدل‌سازی می‌شود.
- درنظرگرفتن نقطه‌ی مرجع در نوک ترک: در روش معادلات مجزا، تمامی خصوصیات هندسی و فیزیکی مسئله در یک دستگاه مختصات مرجع بیان می‌شود. با توجه به ضوابط تعریف نقطه مرجع برای تعریف مسئله‌ی ترک، نوک ترک در محل نقطه‌ی LCO در نظر گرفته شده است. یکی از مهم‌ترین دلایل انجام این کار آن است که در مکانیک شکست، همه‌ی خصوصیات فیزیکی ترک با استفاده از نوک ترک بیان می‌شوند، و از آنجایی که در روش معادلات مجزا نقطه‌ی LCO نیز همین نقش را دارد، بنابراین برای ایجاد ارتباط بین روش معادلات مجزا و نظریه‌ی مکانیک شکست، از فرض مذکور استفاده شده است.
- استخراج رابطه بین دستگاه مختصات مقیاس‌شده و مختصات قطبی: از آنجایی که مسئله‌ی ترک در مختصات قطبی بیان می‌شود، لازم است معادلاتی که در روش معادلات مجزا استخراج می‌شوند، نیز در نهایت در مختصات قطبی بیان شوند.

با توجه به شکل ۲، رابطه‌ی بین مختصات قطبی و دستگاه مختصات مقیاس‌شده در روش معادلات مجزا به‌صورت رابطه‌ی ۳۹ نوشته می‌شود:

$$r^۲ = \hat{x}^۲ + \hat{y}^۲ \quad (۳۹)$$

با توجه به تعریف مختصات مقیاس‌شده در روش معادلات مجزا (روابط ۳ و ۴) و جای‌گذاری آنها در رابطه‌ی ۳۹، رابطه‌ی ۴۰ به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} r^۲ &= \hat{x}^۲ + \hat{y}^۲ = [\xi x(\eta)]^۲ + [\xi y(\eta)]^۲ = \xi^۲[x(\eta)^۲ + y(\eta)^۲] \\ &= \xi^۲ r_\eta^۲(\eta) \end{aligned} \quad (۴۰)$$



شکل ۲. رابطه‌ی بین دستگاه مختصات مقیاس‌شده و مختصات قطبی.

بنابراین می‌توان نوشت:

$$r = \xi r_\eta(\eta) \quad (۴۱)$$

از طرف دیگر، طبق شکل ۲ رابطه‌ی ۴۲ را خواهیم داشت:

$$\theta = \tan^{-۱}\left(\frac{\hat{y}}{\hat{x}}\right) = \tan^{-۱}\left(\frac{y(\eta)}{x(\eta)}\right) \quad (۴۲)$$

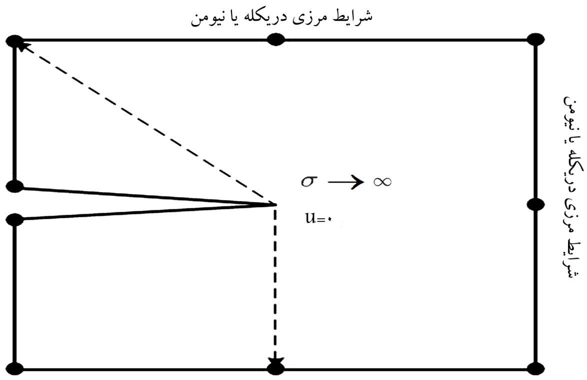
همان‌طور که قبلاً ذکر شده است، جابه‌جایی و تنش در روش معادلات مجزا بر حسب (ξ, η) و در مکانیک شکست بر حسب (r, θ) بیان می‌شوند. بنابراین با استفاده از رابطه‌های ۴۱ و ۴۲ به‌راحتی می‌توان این پارامترها را در دستگاه مختصات قطبی و محلی به یکدیگر تبدیل کرد.

۲.۳. مدل‌سازی فیزیک ترک

در محیط‌های ترک‌دار، توزیع میدان تنش در نقاط دوردست ترک مشابه الاستواستاتیک و در نواحی نزدیک نوک ترک به‌علت وجود تنش بی‌نهایت در نوک ترک، تغییرات شدید در میدان تنش وجود دارد. بنابراین می‌توان میدان تنش و جابه‌جایی را با استفاده از بسط سری ویلیامز در مختصات قطبی و یا مختصات دکارتی در مسائل مکانیک شکست نوشت.[۵و۱۹] در سری ویلیامز، ضرایب سری طوری محاسبه می‌شوند که تکینگی نوک ترک به‌صورت تحلیلی قابل بیان باشد. بنابراین برای توسعه‌ی فیزیک ترک در روش معادلات مجزا، از یک فرم جدید از بردارگره‌یی نیروهای حجمی استفاده شده است. این فرم جدید از بردارگره‌یی نیروهای حجمی چنان پیشنهاد شده است که بتواند درجه‌ی تکینگی فیزیک واقعی مسئله‌ی مکانیک شکست را بیان کند. لازم به‌ذکر است که در مسائل الاستواستاتیک، تابع نیروهای حجمی برای هرگره $f_i^b(\xi)$ به‌صورت خطی از $\xi = ۰$ تا $۱ = \xi$ تغییر می‌کند $(f_i^b(\xi) = a_i\xi + b_i)$. برای به‌دست آوردن دو مجهول a_i و b_i از شرایط مرزی ترکشن در $\xi = ۰$ و $\xi = ۱$ استفاده می‌شود. از آنجایی که در مسائل مکانیک شکست، تنش در نوک ترک برابر بی‌نهایت است، برای بیان فیزیک مسئله‌ی ترک با روش معادلات مجزا، یک فرم جدید از $f_i^b(\xi)$ مطابق رابطه‌ی ۴۳ ارائه شده است:

$$f_i^b(\xi) = \frac{a_i}{\sqrt{\xi}} + \frac{b_i}{\xi\sqrt{\xi}} \quad (۴۳)$$

در روش معادلات مجزا، با ارائه‌ی این فرم جدید از بردار نیروها، تکینگی در نوک ترک به‌صورت فیزیکی ارضاء می‌شود. با توجه به توضیحات فوق می‌توان رابطه‌ی ریاضی پیشنهادی را از لحاظ فیزیکی این‌گونه توجیه کرد: از آنجایی که تکینگی



شکل ۳. بیان مسئله‌ی ترک در روش معادلات مجزا.

تنش در نوک ترک در سری ویلیامز با ضریب $r^{(\frac{n}{2}-1)}$ بیان می‌شود، بنابراین با استفاده از همین فرم تکینگی، بردار گره‌یی نیروهای حجمی نیز پیشنهاد شده است. از طرفی چون در روش معادلات مجزا، بردار نیروهای گره‌یی حجمی فقط می‌تواند دو مجهول داشته باشد، فقط از دو جمله در تابع پیشنهادی استفاده شده است.

مشابه مسائل دیگر، با اعمال شرایط مرزی مسئله (شکل ۳) ضرایب a_i و b_i از شرایط مرزی تراکشن (T_b, T) در $\xi = 0$ و $\xi = 1$ محاسبه می‌شود. حال می‌توان معادله‌ی دیفرانسیل برای جابه‌جایی نهایی هر گره در روش معادلات مجزا را مطابق رابطه‌ی ۳۵ برای میدان‌های ترک‌دار مطابق رابطه‌ی ۴۴ بازنویسی کرد:

$$\xi\, D^{0}_{ii}\, u_{i,\xi\xi}(\xi) + D^{1}_{ii} u_{i,\xi}(\xi) + a_i\sqrt{\xi} + \frac{b_i}{\sqrt{\xi}} = 0 \qquad (44)$$

با حل معادله‌ی دیفرانسیل اخیر (رابطه‌ی ۴۴)، پاسخ مربوط به هر درجه آزادی i مطابق رابطه‌ی ۴۵ به‌دست خواهد آمد:

$$u_i(\xi) = A_i \xi^{\left(\frac{D^{0}_{ii} - D^{1}_{ii}}{D^{0}_{ii}}\right)} + \frac{B_i}{(D^{0}_{ii} - D^{1}_{ii})} - \frac{4a_i}{(D^{0}_{ii} - 2D^{1}_{ii})}\sqrt{\xi} - \frac{4b_i}{3(D^{0}_{ii} + 2D^{1}_{ii})}\xi\sqrt{\xi} \qquad (45)$$

که در آن، A_i و B_i از شرایط مرزی مسئله (جابه‌جایی در نوک ترک و بارگذاری در گره‌ها) برای هر درجه آزادی محاسبه می‌شوند.

۴. استخراج ضرایب سری ویلیامز

در سال ۱۹۵۷، ویلیامز با استفاده از روش بسط ویژه و پیشنهاد توابع و مقادیر ویژه‌ی بای‌هارمونیک در تابع تنش ایری، میدان جابه‌جایی و تنش تکین در حوالی محیط‌های ترک‌دار را پیشنهاد داده است. بنابراین برای محیط‌های ارتجاعی دوبُعدی ترک‌دار، میدان تنش و جابه‌جایی مطابق سری ویلیامز به‌صورت رابطه‌های ۴۶ الی ۵۰ قابل محاسبه است:[۱۸]

$$\sigma_{xx}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{(n/2)-1}\Big\{a_n^1\Big[\Big(2+\frac{n}{2}+(-1)^n\Big)\cos\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\theta - \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\cos\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\theta\Big] - a_n^2\Big[\Big(2+\frac{n}{2}-(-1)^n\Big)\sin\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\theta - \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\sin\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\theta\Big]\Big\} \qquad (46)$$

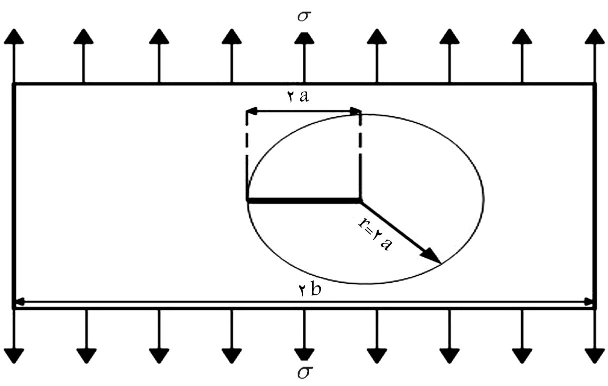
$$\sigma_{yy}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{(n/2)-1}\Big\{a_n^1\Big[\Big(2-\frac{n}{2}-(-1)^n\Big)\cos\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\theta + \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\cos\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\theta\Big] - a_n^2\Big[\Big(2-\frac{n}{2}+(-1)^n\Big)\sin\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\theta + \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\sin\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\theta\Big]\Big\} \qquad (47)$$

$$\sigma_{xy}(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2} r^{(n/2)-1}\Big\{a_n^1\Big[-\Big(\frac{n}{2}+(-1)^n\Big)\sin\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\theta + \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\sin\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\theta\Big] - a_n^2\Big[\Big(\frac{n}{2}-(-1)^n\Big)\cos\Big(\frac{n}{2}-1\Big)\theta - \Big(\frac{n}{2}-1\Big)\cos\Big(\frac{n}{2}-3\Big)\theta\Big]\Big\} \qquad (48)$$

$$u_x(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2G}\Big\{a_n^1\Big[\Big(\kappa+\frac{n}{2}+(-1)^n\Big)\cos\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2}\cos\Big(\frac{n}{2}-2\Big)\theta\Big] - a_n^2\Big[\Big(\kappa+\frac{n}{2}-(-1)^n\Big)\sin\frac{n}{2}\theta - \frac{n}{2}\sin\Big(\frac{n}{2}-2\Big)\theta\Big]\Big\} \qquad (49)$$

$$u_y(r,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r^{n/2}}{2G}\Big\{a_n^1\Big[\Big(\kappa-\frac{n}{2}-(-1)^n\Big)\sin\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2}\sin\Big(\frac{n}{2}-2\Big)\theta\Big] + a_n^2\Big[\Big(\kappa-\frac{n}{2}+(-1)^n\Big)\cos\frac{n}{2}\theta + \frac{n}{2}\cos\Big(\frac{n}{2}-2\Big)\theta\Big]\Big\} \qquad (50)$$

که در آن‌ها، G مدول برشی، ν ضریب پواسون، $\kappa = (3-\nu)/(1+\nu)$ برای مسائل تنش مسطح و $\kappa = (3-4\nu)$ برای مسائل کرنش مسطح است. همچنین ضریب a_n^1 ضرایب سری ویلیامز برای تابع ویژه متقارن و مود اول شکست و a_n^2 ضرایب سری ویلیامز برای تابع ویژه‌ی نامتقارن و مود دوم شکست هستند، و براساس شرایط مرزی و بارگذاری مسئله محاسبه می‌شوند. مطابق شکل ۴، سری ویلیامز حول نوک ترک بسط داده می‌شود و شعاع هم‌گرایی سری ویلیامز برای ورق نامحدود با ترک مرکزی در نوک سمت راست برابر $r = 2a$ (به اندازه‌ی طول ترک) است. لازم به ذکر است که سری مزبور توانایی هم‌گرایی در فراتر از این محدوده را ندارد. از آنجایی که روش معادلات مجزا یک روش نیمه‌تحلیلی است، پاسخ جابه‌جایی و تنش در هر نقطه از میدان به‌صورت تحلیلی و پاسخ در مرزها به‌صورت عددی به‌دست خواهد آمد. بنابراین مطابق شکل ۳، در راستای هر گره از نقطه‌ی مرجع، پاسخ جابه‌جایی مطابق رابطه‌ی ۴۵ و تنش مطابق رابطه‌ی ۲۶ به‌صورت تحلیلی و تابعی از ξ به‌دست می‌آید. برای محاسبه‌ی ضرایب سری ویلیامز برای مود اول شکست با استفاده از رابطه‌های ۴۱ و ۴۲، میدان جابه‌جایی مطابق رابطه‌ی ۴۵ از دستگاه مختصات مقیاس‌شده به دستگاه مختصات قطبی تبدیل و سپس سری ویلیامز با استفاده از ۴ جمله‌ی اول تقریب زده می‌شود.



شکل ۴. شعاع هم‌گرایی سری ویلیامز در نوک ترک سمت راست در ورق بی‌نهایت.

۵. اعتبارسنجی روش معادلات مجزا

جهت تقریب سری ویلیامز، میدان جابه‌جایی و میدان تنش با استفاده از روش معادلات مجزا از محیط برنامه‌نویسی نرم‌افزار MATLAB استفاده شده است. به‌همین منظور، ۲ مثال آزمون جهت اعتبارسنجی روش حاضر انتخاب و نتایج آن با سایر مراجع موجود مقایسه شده است.

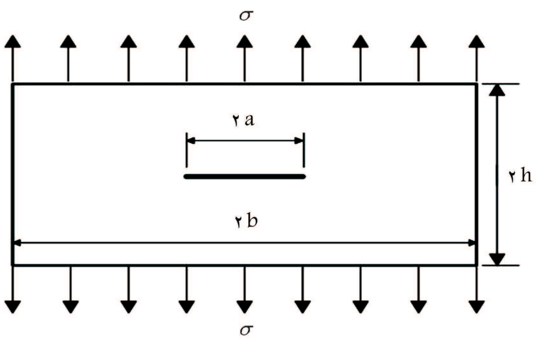
۱.۵. ورق محدود با ترک مرکزی

مثال اول، مربوط به ورقی محدود با ابعاد $b \times 2h$ واحد با ترک مرکزی مطابق شکل (۵الف) است. بارگذاری در جهت قائم و مقدار آن برابر ۱ $= \sigma$، مدول ارتجاعی ۱ $= E$، ضریب پواسون ۰٫۲۵ $= \nu$، و نسبت ۰٫۲۵ $= a/b$ است. با درنظرگرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، به‌علت تقارن فقط یک چهارم ورق با ۱۰ المان سه‌گرهی (۴۲ درجه آزادی) مطابق شکل‌های (۵ب و ج) مدل‌سازی شده است. برای صحت‌سنجی روش معادلات مجزا از نتایج عددی مراجع،[۲۲،۲۹] مطابق جدول ۱ استفاده شده است. با استفاده از رابطه‌ی ۴۵، میدان جابه‌جایی محاسبه و در ادامه، ضرایب ۴ جمله‌ی اول سری ویلیامز مطابق جدول ۲ محاسبه شده است. لازم به ذکر است که برای محاسبه‌ی خطای ارائه‌شده در جدول ۲ از رابطه‌ی ۵۱ استفاده شده است:

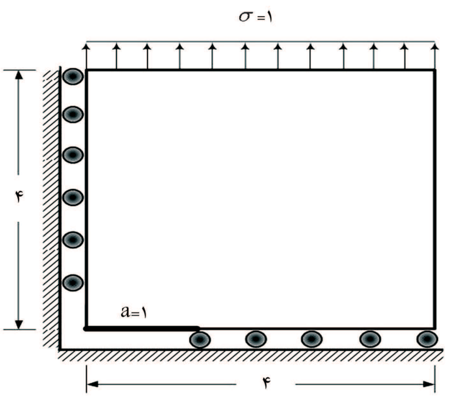
$$Error(\%) = \frac{a_{ave} - a_{DEM}}{a_{ave}} \times 100 \qquad (51)$$

که در آن، a_{ave} میانگین مقادیر مراجع دیگر و a_{Dem} مقدار محاسبه‌شده در روش معادلات مجزاست. سپس با استفاده از سری ویلیامز تقریب‌زده شده، میدان‌های تنش و جابه‌جایی مطابق شکل‌های ۶ و ۷ ارائه شده است. جهت حصول اطمینان از کانتورهای به‌دست آمده در شکل‌های ۸ و ۹ روند تغییرات جابه‌جایی و تنش در راستای y با سایر پژوهش‌ها مقایسه شده است. علاوه بر ضرایب سری ویلیامز، یکی از اهداف نوشتار حاضر، تقریب میدان تنش و جابه‌جایی در محیط‌های ترک‌دار است (در نزدیک ترک و در نقاط دوردست). بنابراین هدف از شکل‌های ۶ و ۷، نشان دادن میدان تنش و جابه‌جایی محیط ترک‌دار است، که دقت آن توسط شکل‌های ۸ و ۹ مورد اعتبارسنجی قرارگرفته است. در شکل ۸ مشاهده می‌شود که شدت تنش در اطراف ترک بسیار زیاد بوده و در میدان‌های دورتر مقدار تنش کم شده و مشابه نتایج الاستواستاتیک شده است.

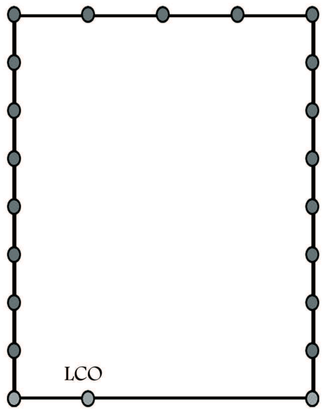
با مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش معادلات مجزا در جدول ۲ با سایر نتایج عددی در جدول ۱ و محاسبه‌ی خطای ایجادشده (براساس اختلاف بین میانگین



الف) ورق محدود با ترک مرکزی؛



ب) مدل سازی یک چهارم به علت تقارن؛



ج) المان بندی ورق در روش معادلات اجرا.

شکل ۵. مسئله‌ی دوبُعدی مورد بررسی در مثال اول.

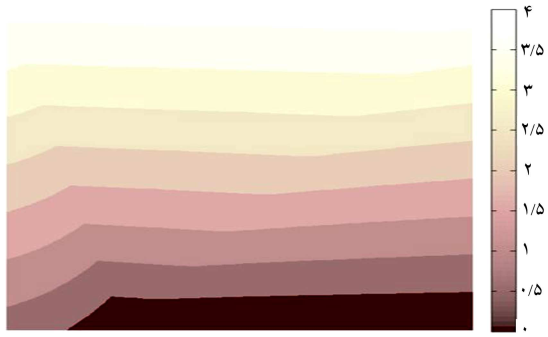
جدول ۱. محاسبه‌ی ۵ ضریب اول سری ویلیامز محاسبه‌شده در سایر مراجع جهت اعتبارسنجی مثال اول.

ضرایب سری ویلیامز	مرجع		
	[۲۲]	[۲۲]	[۲۹]
a_1^1	۰٫۷۶۸۰	۰٫۷۶۷۰	۰٫۷۶۶۵
a_2^1	-۰٫۲۷۷۷	-۰٫۲۷۶۰	-۰٫۲۷۷۹
a_3^1	۰٫۱۸۶۶	۰٫۱۸۸۰	۰٫۱۹۱۵
a_4^1	-۰٫۰۰۳۰	-۰٫۰۰۳۳	-۰٫۰۰۱۸
a_5^1	-۰٫۰۲۷۹	-۰٫۰۳۲۰	-۰٫۰۲۳۵

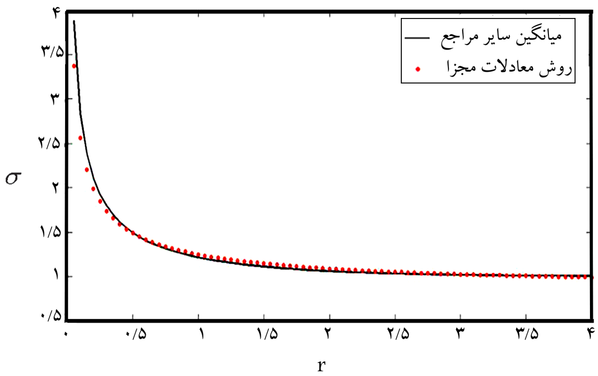
جدول ۲. محاسبه‌ی ۴ ضریب اول سری ویلیامز محاسبه‌شده با استفاده از روش معادلات مجزا در مثال اول.

ضرایب سری ویلیامز	روش حاضر	میانگین خطا (٪)
a_1^1	۰٫۷۸۱۲	۱٫۴۲
a_2^1	۰٫۲۲۸۰	–
a_3^1	۰٫۱۹۰۱	۳٫۷۷
a_4^1	۰	۰

شکل ۶. میدان تنش σ_{yy} محاسبه‌شده در روش معادلات مجزا در مثال اول.

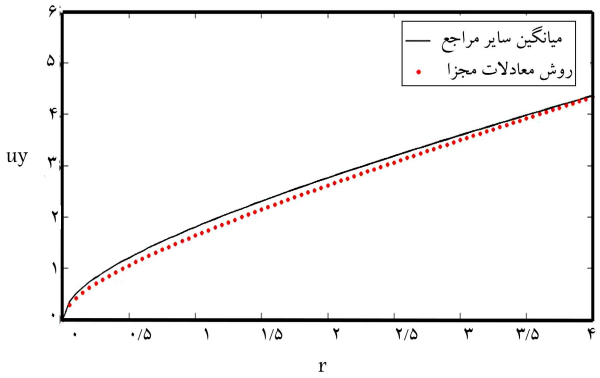


شکل ۷. میدان جابه‌جایی u_y محاسبه‌شده در روش معادلات مجزا در مثال اول.

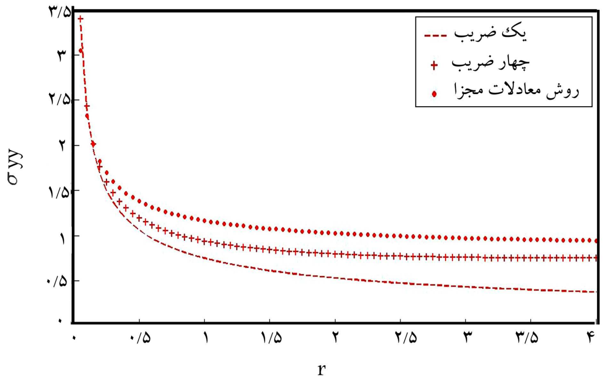


شکل ۸. σ_{yy} در راستای طولی ورق از نوک ترک تا محل بارگذاری در مثال اول.

نتایج سایر مراجع با روش معادلات مجزا)، مشاهده می‌شود که روش حاضر دقت بسیار مناسبی برای محاسبه‌ی ضرایب اول، سوم، و چهارم دارد. در صورت درنظر گرفتن علامت ضرایب سری ویلیامز، ضریب دوم سری ویلیامز، خطای نسبتاً بالایی دارد، که علت آن را می‌توان چنین توجیه کرد: همان‌طور که مشخص است میدان جابه‌جایی و تنش محیط‌های ترک‌دار براساس سری ویلیامز (که بی‌نهایت جمله دارد) محاسبه می‌شود، در حالی که روش معادلات مجزا، که دامنه‌ی مسئله را به‌صورت



شکل ۹. جابه‌جایی u_y در راستای طولی ورق از نوک ترک تا محل بارگذاری در مثال اول.

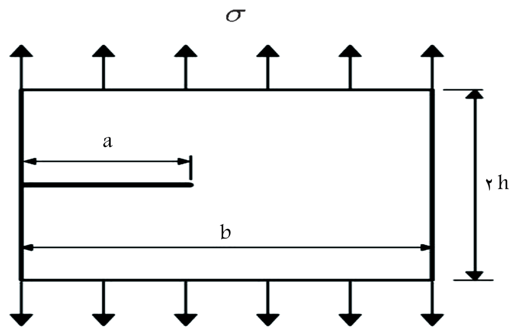


شکل ۱۰. اثر تعداد جملات سری ویلیامز در میدان تنش در کل حوزه.

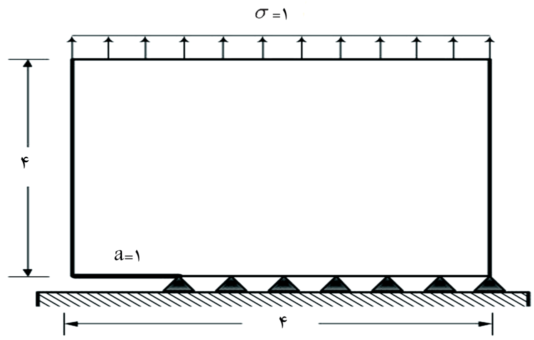
تحلیلی حل می‌کند، فقط ۴ جمله دارد. مطابق شکل‌های ۸ و ۹، روش معادلات مجزا به‌درستی جابه‌جایی و تنش را در محیط ترک‌دار تقریب زده است. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که روش معادلات مجزا، بی‌نهایت جمله‌ی موجود در سری ویلیامز را در ۴ جمله به‌درستی تقریب زده و اثرات جملات بالاتر سری ویلیامز در جمله‌ی دوم روش معادلات مجزا گنجانده شده است. همان‌طور که از شکل ۱۰ مشخص است، در صورتی که تعداد کمی از ضرایب سری ویلیامز انتخاب شود، میدان تنش فقط در همسایگی نوک ترک به درستی بیان می‌شود و در نقاط دورتر از ترک نتایج از واقعیت دور است. لازم به یادآوری است که در روش معادلات مجزا، از آنجایی که جمله‌های اول و سوم از شرایط مرزی مکانیک شکست به‌دست آمده‌اند، بنابراین پاسخ‌ها در نزدیکی ترک با دقت مناسب هستند. ضریب‌های دوم و چهارم از شرایط مرزی الاستواستاتیک به‌دست آمده‌اند، که خطای قابل توجهی دارند. بنابراین می‌توان مطابق شکل ۱۰ چنین استنباط کرد که با توجه به اینکه روش معادلات مجزا فقط ۴ جمله دارد، برای حصول نتایج دقیق از کل حوزه، باید ضرایب مرتبه‌ی بالاتر و اثر نواحی دوردست ترک به‌نحوی در ضرایب مرتبه‌ی پایین‌تر گنجانده شوند. این امر در جمله‌ی دوم اتفاق افتاده است. بنابراین مطابق مطالب ذکرشده، ضریب جمله‌ی دوم سری ویلیامز، اثرات جملات بالاتر و مناطق دور از ترک را بیان می‌کند. به همین دلیل در جدول ۲ از ارائه‌ی خطا برای جمله‌ی دوم صرف‌نظر شده است.

۲.۵. ورق محدود با ترک لبه‌یی

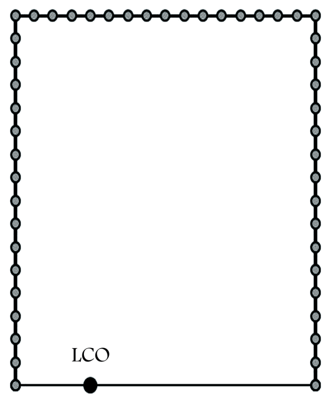
مثال دوم مربوط به ورقی محدود با ابعاد $b \times 2h$ واحد با ترک لبه‌یی مطابق



الف) ورق محدود با ترک لبه یی ؛



ب) مدل سازی یک چهارم به علت تقارن؛



ج) المان بندی ورق در روش معادلات اجرا.

شکل ۱۱. مسئله‌ی دو بُعدی مورد بررسی در مثال دوم.

شکل (۱۱الف) است. بارگذاری و مشخصات مصالح در مثال دوم، مشابه مثال اول درنظر گرفته شده است. برای صحت‌سنجی روش معادلات مجزا از نتایج عددی سایر پژوهش‌ها[۲۷،۳۰و۳۱] مطابق جدول ۳ استفاده شده است. با درنظر گرفتن رفتار تنش مسطح در این مثال، به‌علت تقارن فقط نصف ورق با ۱۳ گره و در مجموع با ۲۶ درجه آزادی مطابق شکل ۱۱ (ب و ج) مدل‌سازی شده است. با استفاده از رابطه‌ی ۴۵، میدان جابه‌جایی و در ادامه، ضرایب ۴ جمله‌ی اول سری ویلیامز مطابق جدول ۴ محاسبه شده است. سپس با استفاده از سری ویلیامز تقریب‌زده شده، میدان جابه‌جایی و تنش مطابق شکل‌های ۱۲ و ۱۳ ارائه شده است. جهت حصول اطمینان از کانتورهای به‌دست آمده در شکل‌های ۱۴ و ۱۵، روند تغییرات جابه‌جایی و تنش در راستای y با سایر

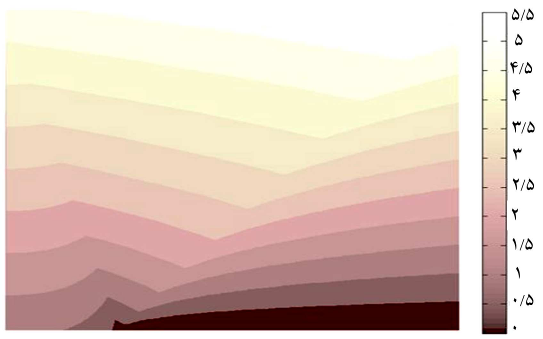
جدول ۳. محاسبه‌ی ۵ ضریب اول سری ویلیامز محاسبه‌شده در سایر مراجع جهت اعتبارسنجی مثال دوم.

ضرایب سری ویلیامز	مرجع [۳۱]	مرجع [۳۰]	مرجع [۲۷]
a_1^1	۱٫۰۵۸۵	۱٫۰۵۹۷	۱٫۰۵۹۶
a_2^1	-۰٫۱۵۱۳	-۰٫۱۵۰۳	-۰٫۱۵۰۶
a_3^1	۰٫۰۸۱۵۰	۰٫۰۸۲۰	۰٫۰۷۹۴
a_4^1	-۰٫۰۴۷۸	-۰٫۰۴۸۶	-۰٫۰۴۷۶
a_5^1	۰٫۰۰۵۵	۰٫۰۰۶۳	۰٫۰۰۵۶

جدول ۴. محاسبه‌ی ۴ ضریب اول سری ویلیامز محاسبه‌شده با استفاده از روش معادلات مجزا در مثال دوم.

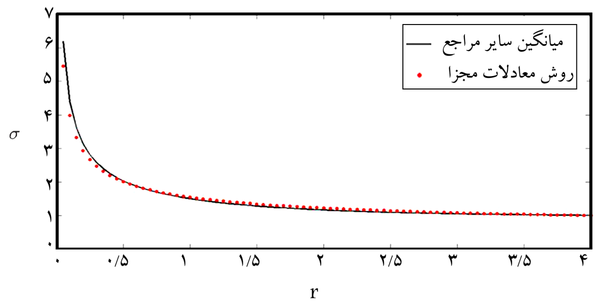
ضرایب سری ویلیامز	روش حاضر	میانگین خطا (٪)
a_1^1	۱٫۰۹۷۳	۰٫۱۶
a_2^1	۰٫۲۹۵۱	-
a_3^1	۰٫۰۷۸۱	۶٫۳۷
a_4^1	۰	۰

شکل ۱۲. میدان تنش σ_{yy} محاسبه‌شده در روش معادلات مجزا در مثال دوم.

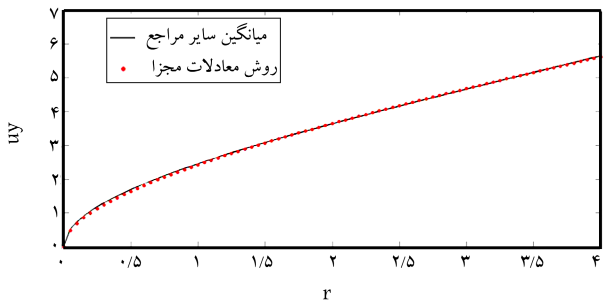


شکل ۱۳. میدان جابه‌جایی u_y محاسبه‌شده در روش معادلات مجزا در مثال دوم.

پژوهش‌ها مقایسه شده است. با مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش معادلات مجزا با سایر نتایج عددی مشاهده می‌شود که در مثال دوم نیز همانند مثال اول، ضریب دوم سری ویلیامز کمی خطا دارد، که می‌توان علت آن را همانند مثال اول توجیه کرد. البته لازم به ذکر است که ضریب چهارم سری ویلیامز در مورد مثال دوم در مطالعات سایر پژوهشگران،[۲۲و۲۹] نیز در حدود ۵۰٪ با هم اختلاف دارند.



شکل ۱۴. σ_{yy} در راستای طولی ورق از نوک ترک تا محل بارگذاری در مثال دوم.



شکل ۱۵. جابه‌جایی u_y در راستای طولی ورق از نوک ترک تا محل بارگذاری در مثال دوم.

۶. نتیجه‌گیری

سری ویلیامز در نظریه‌ی مکانیک شکست به علت کاربرد در محاسبه‌ی ضریب شدت تنش (ضریب جمله‌ی اول سری ویلیامز)، ضریب تنش ـ T (ضریب جمله‌ی دوم سری ویلیامز)، اثر اندازه‌ی ترک (ضرایب مرتبه‌ی بالا در سری ویلیامز) و محاسبه‌ی میدان جابه‌جایی و تنش در پیرامون محیط‌های ترک‌دار، اهمیت فراوانی دارد. اخیراً روش جدیدی به نام روش معادلات مجزا برای حل مسائل مختلف محیط‌های پیوسته توسعه داده شده است.

در نوشتار حاضر، با قرارگرفتن نقطه‌ی مرجع در نوک ترک، مدل‌سازی هندسه‌ی ترک و فرم جدیدی از نیروهای گره‌یی حجمی، مسئله‌ی مکانیک شکست در روش معادلات مجزا تعریف شده است. در ادامه، ۴ جمله‌ی اول سری ویلیامز در مسائل دوبُعدی برای مودهای اول شکست توسعه داده شده است. در نهایت، با حل ۲ مثال عددی، روش پیشنهادی مورد صحت‌سنجی قرار گرفته است. نتایج حاکی از آن است که ۴ جمله در روش معادلات مجزا به‌درستی سری نامتناهی ویلیامز را تقریب زده است. همچنین روش معادلات مجزا، دقت مناسبی برای محاسبه‌ی جمله‌های اول، سوم، و چهارم از سری ویلیامز دارد و این در حالی است که ضریب دوم سری ویلیامز، خطای زیادی دارد، که علت آن را می‌توان تجمیع جملات بالاتر سری نامتناهی ویلیامز در جمله‌ی دوم، و همچنین اثر نواحی دوردست ترک در روش معادلات مجزا دانست.

منابع (References)

1. Henshell, R.D. and Shaw, K.G. "Crack tip finite elements are unnecessary", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **9**(3), pp. 495-507 (1975).
2. Barsoum, R.S. "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **10**(1), pp. 25-37 (1976).
3. Liebowitz, H. and Moyer Jr, E.T. "Finite element methods in fracture mechanics", *Computers and Structures*, **31**(1), pp. 1-9 (1989).
4. Belytschko, T. and Black, T. "Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **45**(5), pp. 601-620 (1999).
5. Mohammadi, S., *Extended Finite Element Method: for Fracture Analysis of Sructures*, John Wiley & Sons, 280 p. (2008).
6. Ghasemi Ghalebahman, A. and Salavati, S. "Utilizing the extended fnite element method for determining crack stress intensity factors and higher order terms coefficients", *Modares Mechanical Engineering*, **15**(2), pp. 135-146 (In Persian) (2015).
7. Aliabadi, M.H., *The Boundary Element Method, Volume 2: Applications in Solids and Structures*, Wiley, 598 p. (2002).
8. Cruse, T.A. and Vanburen, W. "Three-dimensional elastic stress analysis of a fracture specimen with an edge crack", *International Journal of Fracture Mechanics*, **7**(1), pp. 1-15 (1971).
9. Cruse, T.A. "Numerical evaluation of elastic stress intensity factors by the boundary-integral equation method, Surface Crack", Physical Problems and Computational Solutions, ASME, New York, pp. 153-170 (1972).
10. Portela, A., Aliabadi, M.H. and Rooke, D.P. "Efficient boundary element analysis of sharp notched plates", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **32**(3), pp. 445-470 (1991).
11. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. "Element-free Galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**(2), pp. 229-256 (1994).
12. Song, C. and Wolf, J.P. "Scaled boundary finite-element method - a primer: Derivations", *Computers and Structures*, **78**(1), pp. 191-210 (2000).
13. Wolf, J.P. and Song, C. "Scaled boundary finite-element method - a primer: Solution procedures", *Computers and Structures*, **78**(1), pp. 211-225 (2000).
14. Song, C. and Wolf, J.P. "Semi-analytical representation of stress singularities as occurring in cracks in anisotropic multi-materials with the scaled boundary finite-element method", *Computers and Structures*, **80**(2), pp. 183-197 (2002).
15. Yang, Z. "Fully automatic modelling of mixed-mode crack propagation using scaled boundary finite element method", *Engineering Fracture Mechanics*, **73**(12), pp. 1711-1731 (2006).
16. Yang, Z. "Application of scaled boundary finite element method in static and dynamic fracture problems", *Acta Mechanica Sinica*, **22**(3), pp. 243-256 (2006).

17. Song, C. and Vrcelj, Z. "Evaluation of dynamic stress intensity factors and T-stress using the scaled boundary finite-element method", *Engineering Fracture Mechanics*, **75**(8), pp. 1960-1980 (2008).

18. Williams, M.L. "On the stress distribution at the base of a stationary crack", *Journal of Applied Mechanics*, **24**(1), pp. 109-114 (1957).

19. Anderson, T.L., *Fracture Mechanics: Fundamental and Applications*, Taylor & Francis (2005).

20. Bird, G.E., Trevelyan, J. and Augarde, C.E. "A coupled BEM/scaled boundary FEM formulation for accurate computations in linear elastic fracture mechanics", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **34**(6), pp. 599-610 (2010).

21. Sham, T.L. "The determination of the elastic T-term using higher order weight functions", *International Journal of Fracture*, **48**(2), pp. 81-102 (1991).

22. Fett, T. "T-stresses in rectangular plates and circular disks", *Engineering Fracture Mechanics*, **60**(5), pp. 631-652 (1998).

23. Chen, C.S., Krause, R., Pettit, R.G., Banks-Sills, L. and Ingraffea, A.R. "Numerical assessment of T-stress computation using a p-version finite element method", *International Journal of Fracture*, **107**(2), pp. 177-199 (2001).

24. Song, C. "Evaluation of power-logarithmic singularities, T-stresses and higher order terms of in-plane singular stress fields at cracks and multi-material corners", *Engineering Fracture Mechanics*, **72**(10), pp. 1498-1530 (2005).

25. Karihaloo, B.L. "Size effect in shallow and deep notched quasi-brittle structures", *International Journal of Fracture*, **95**(1), pp. 379-390 (1999).

26. Hello, G., Ben Tahar, M. and Roelandt, J.M. "Analytical determination of coefficients in crack-tip stress expansions for a finite crack in an infinite plane medium", *International Journal of Solids and Structures*, **49**(3), pp. 556-566 (2012).

27. Chidgzey, S.R. and Deeks, A.J. "Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields using the scaled boundary finite element method", *Engineering Fracture Mechanics*, **72**(13), pp. 2019-2036 (2005).

28. He, Y.Q., Yang, H.T. and Deeks, A.J. "Determination of coefficients of crack tip asymptotic fields by an element-free Galerkin scaled boundary method", *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures*, **35**(8), pp. 767-785 (2012).

29. Xiao, Q.Z., Karihaloo, B.L. and Liu, X.Y. "Direct determination of SIF and higher order terms of mixed mode cracks by a hybrid crack element", *International Journal of Fracture*, **125**(3-4), pp. 207-225 (2004).

30. Karihaloo, B.L. and Xiao, Q.Z. "Accurate determination of the coefficients of elastic crack tip asymptotic field by a hybrid crack element with p-adaptivity", *Engineering Fracture Mechanics*, **68**(15), pp. 1609-1630 (2001).

31. Su, R.K.L. and Fok, S.L. "Determination of coefficients of the crack tip asymptotic field by fractal hybrid finite elements", *Engineering Fracture Mechanics*, **74**(10), pp. 1649-1664 (2007).

32. Khaji, N. and Khodakarami, M.I. "A new semi-analytical method with diagonal coefficient matrices for potential problems", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **35**(6), pp. 845-854 (2011).

33. Khodakarami, M. and Khaji, N. "Analysis of elastostatic problems using a semi-analytical method with diagonal coefficient matrices", *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **35**(12), pp. 1288-1296 (2011).

34. Khaji, N. and Khodakarami, M.I. "A semi-analytical method with a system of decoupled ordinary differential equations for three-dimensional elastostatic problems", *International Journal of Solids and Structures*, **49**(18), pp. 2528-2546 (2012).

35. Khodakarami, M.I., Khaji, N. and Ahmadi, M.T. "Modeling transient elastodynamic problems using a novel semi-analytical method yielding decoupled partial differential equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **213-216**(0), pp. 183-195 (2012).

36. Mirzajani, M. and Khaji, N. "Decoupled equations method for solving two-dimensional elastodynamic problems in frequency domain", *Sharif Journal of Civil Engineering*, **30**(3), pp. 65-74 (In Persian)(2014).

37. Khodakarami, M.I. and Khaji, N. "Wave propagation in semi-infinite media with topographical irregularities using Decoupled Equations Method", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, **60**, pp. 102-112 (2014).