

تهیه برنامه زیرقاب برای تحلیل دقیق دال‌های تخت و متکی بر تیر

ایرج محمودزاده‌کنی (استاد)

نسیم سادات مقدسی‌بناب (کارشناس ارشد)

پردیس دانشکده‌های فنی، دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه تهران

سیستم سازی دال‌های دوطرفه، با توجه به مزایای بسیار از دیدگاه اقتصادی و نیز معماری، از سازه‌های پرکاربرد به‌شمار می‌آیند. روش «قاب معادل» روشی جامع و مناسب برای تحلیل انواع دال‌های دوطرفه است. با توجه به غیر منشوری بودن مقاطع دال - تیرها و ستون‌ها، جداولی برای به دست آوردن ضرایب سختی و انتقال، و لنگرهای گیرداری وجود دارد که برای ابعاد خاصی از مقاطع دال - تیرها و ستون‌ها و تنها برای بارگذاری یکنواخت در طول مشخصی از دهانه ارائه شده است. با توجه به تقریبی بودن مقادیر این جداولی و پیچیدگی و طولانی بودن محاسبات، و نیز برای بهینه‌سازی عملیات و نتایج تحلیل، در این نوشتار با استفاده از روش قاب معادل و با در نظر گرفتن کلیه تغییرات سختی‌ها در تمامی اعضا، با بهره‌گیری از معادلات شیب-افت در قالب نرم‌افزار تهیه شده به تحلیل دقیق دال‌های دوطرفه پرداخته شده است. دو سازه نمونه، با راه حل دستی و با استفاده از ضرایب جداولی موجود، نرم‌افزار تهیه شده و روش اجزاء محدود مورد تحلیل قرار گرفته‌اند. مقایسه‌ی نتایج حاصله نشان‌دهنده‌ی اختلاف‌هایی در نتایج لنگرهای تکیه‌گاهی است.

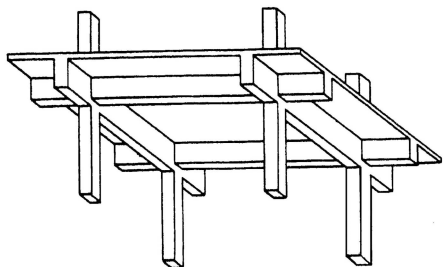
واژگان کلیدی: دال دوطرفه، روش قاب معادل، تغییرات سختی، معادلات شیب - افت، برنامه‌ی رایانه‌ی.

imkani@ut.ac.ir
nm_61@yahoo.com

مقدمه

دال‌های بتنی بدون تیر مشتمل‌اند بر صفحات تختی که دال در آن مستقیماً روی ستون‌ها تکیه دارد و دال‌های تخت که سازه‌ی تکمیل‌یافته‌ی از صفحه‌ی تخت است که مشخصه‌ی آن وجود سرستون در بالای ستون‌ها برای افزایش مقاومت برشی است و مانند شبکه‌ی دوطرفه از تیرهای کم‌ارتفاع متکی بر ستون‌ها عمل می‌کند. عملکرد دال‌های توپر یا مجوف که دارای تیرهای کوچک در دو جهت با فاصله کم از یکدیگرند، مشابه دال‌های تخت است^[۱]. شکل‌های ۱ و ۲ نمونه‌ی از انواع دال‌های دوطرفه را نشان می‌دهند. اگرچه تقسیم لنگر بین دال و تیرها در انواع دال‌ها با هم متفاوت است، توزیع لنگر خمشی استاتیکی کل در هر دو آنها شبیه به هم است. آئین‌نامه‌ی بتن ایران برای تحلیل و طراحی مجموعه‌ی دال‌ها و تیرهای تکیه‌گاه‌ها دو روش مستقیم و قاب معادل، و برای تحلیل و طراحی دال‌ها به‌طور مجزا روش‌های

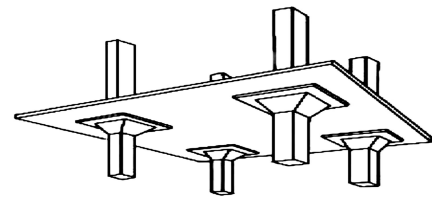
علمی‌رغم طراحی و ساخت تعداد بی‌شماری از دال‌های بتن مسلح، جزئیات رفتار و تحلیل کشسانی و خمیری آنها همیشه به‌طور دقیق و کامل در نظر گرفته نمی‌شود. یکی از علل این امر پیچیدگی محاسبات ریاضی مربوطه است. بهینه‌سازی تحلیل و طراحی سازه‌ها یکی از مهم‌ترین اهداف طراحان بوده و توسط بسیاری از پژوهش‌گران مورد تحقیق قرار گرفته است^[۱]. دقت روش «قاب معادل» بسیار بالاست و دامنه‌ی کاربرد وسیعی نیز برای تحلیل انواع دال‌های دوطرفه دارد. به‌علاوه مدل و مفاهیم مطرح در این روش برای تحلیل دال‌های تحت بار جانبی نیز قابل بسط بوده و توسط محققان مختلف تحت بررسی قرار گرفته است^[۲-۵]. با توجه به غیرمنشوری بودن مقاطع اعضا سیستم دال در طول دهانه‌ها و ستون‌ها، نمی‌توان از ضرایب سختی و انتقال و لنگرهای گیرداری اعضا با ممان اینرسی ثابت استفاده کرد. برای به دست آوردن این مقادیر جداولی وجود دارد که برای ابعاد خاصی از اعضای سیستم دال و تنها برای بارگذاری یکنواخت در طول مشخصی از دهانه ارائه شده‌اند^[۶]. با توجه به تقریبی بودن مقادیر این جداولی و پیچیدگی و طولانی بودن محاسبات، و نیز برای بالابردن دقت نتایج حاصل از تحلیل روش قاب معادل، در این نوشتار نرم‌افزاری برای به‌کارگیری دقیق روش قاب معادل در تحلیل انواع دال‌های دوطرفه تهیه شده است.



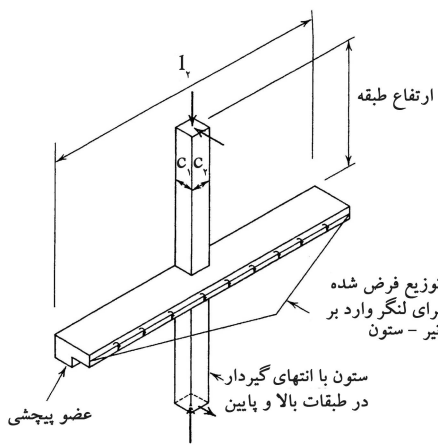
شکل ۱. دال دوطرفه متکی بر تیر در لبه‌ها^[۱].

انواع دال دوطرفه و دیدگاه‌های آئین‌نامه‌ی

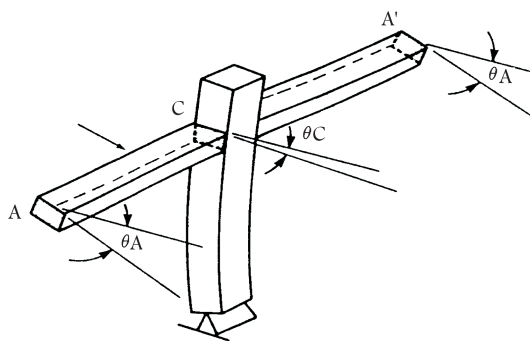
دال‌های دوطرفه می‌توانند در چهار طرف پانل متکی بر تیر یا فاقد تیر باشند^[۷].



شکل ۲. دال تخت دوطرفه [۱۱].



شکل ۳. زیرقاب و اعضای آن [۷].



شکل ۴. عملکرد قاب و پیچش اعضای پیچشی عمود [۱۱].

سختی ستون معادل و در نتیجه لنگر انتقال یافته به ستون، سختی پیچشی از طریق رابطه‌ی ۲ افزایش یافته و اصلاح می‌شود.

$$K_{ta} = K_t * \frac{I_{sb}}{I_s} \quad (2)$$

I_{sb} ممان اینرسی دال و تیر با هم، و I_s ممان اینرسی دال صرف نظر از قسمت مربوط به تیر است. سطح مقطع اعضای پیچشی، برای مقاطع مختلف دال-تیرها و ستون‌ها متفاوت است و براساس آن، ثابت C در رابطه‌ی ۱ از تقسیم سطح مقطع به قسمت‌هایی مستطیلی به‌گونه‌ی که منجر به بزرگ‌ترین مقدار C شود، از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید.

$$C = \sum \left[\left(1 - 0.6 \frac{x}{y} \right) \frac{x^2 y}{3} \right] \quad (3)$$

x وجه کوتاه‌تر مستطیل و y وجه بلندتر آن است. به‌منظور در نظر گرفتن اعضای پیچشی، از مفهوم ستون معادل استفاده می‌شود که یک جزء واحد شامل ستون‌های بالا و پایین کف و اعضای پیچشی متصل به آن است (شکل ۴). از مفهوم ستون معادل که کلید اصلی روش قاب معادل تحت بار قائم است، در تحلیل تحت بار جانبی نیز استفاده می‌شود [۱۴].

سختی ستون معادل K_{ec} بیان‌گر ترکیب سختی ستون‌ها و اعضای پیچشی متصل به آن است. بنابراین تحت لنگر وارده M داریم:

$$K_{ec} = M / (\text{چرخش متوسط اعضای پیچشی}) \quad (4)$$

«ضرایب لنگر خمشی» و «خمیری» را معرفی کرده است [۹]. روش مستقیم روشی تقریبی است که کاربرد چندان وسیعی ندارد. محدودیت‌های روش ضرایب لنگر خمشی نیز کاربرد آن را برای تحلیل دال‌های تخت فاقد تیرهای زیرسری مجاز نمی‌داند. روش‌های خمیری در مورد تمامی دال‌ها -- صرف نظر از شکل هندسی و شرایط مرزی آنها -- تحت بارهای قائم در حالت حد نهایی مقاومت کاربرد دارد، اگرچه دارای پیچیدگی‌های زیادی است. روش قاب معادل با توجه به گستره‌ی کاربرد وسیع و برخورداری از دقت مناسب برای تحلیل انواع دال‌های دوطرفه، روشی مطرح در آئین‌نامه‌های بتن مختلف از جمله آئین‌نامه‌ی بتن آمریکا است [۱۲].

تحلیل دال‌های دوطرفه به روش قاب معادل

روش قاب معادل، شکل گرفته بر پایه‌ی مدل عضو پیچشی عمود، نخستین بار در آئین‌نامه‌ی بتن آمریکا (ویرایش ۱۹۷۱) ارائه شد [۳]. در مدل قاب معادل برای تحلیل قاب‌های دال - ستون، یک قاب سه‌بعدی با سیستم دال دوطرفه به تعدادی قاب معادل در هر امتداد، که در آن ستون‌ها به صورت ستون معادل و دال‌ها به صورت تیر (دال-تیر) مدل می‌شوند، تبدیل می‌شود که هر قاب در کل ارتفاع سازه در نظر گرفته شده و عرض قاب نیز از وسط پانل‌های مجاور ستون در نظر گرفته می‌شود [۱۳]. در بارگذاری قائم، دال-تیرهای هر طبقه می‌توانند به صورت جداگانه تحلیل شوند که در این حالت انتهای ستون‌های متصل به طبقه باید به صورت گیردار در نظر گرفته شود. به این قسمت از قاب، «جزء قاب» یا «زیرقاب» گفته می‌شود. در این مدل انتقال لنگر از دال-تیرها به ستون‌ها توسط اعضای پیچشی انجام می‌شود. (شکل ۳) اولین گام در تحلیل یک قاب معادل، محاسبه‌ی سختی خمشی اعضای قاب است. برای تعیین سختی خمشی دال-تیرها و ستون‌ها باید ممان اینرسی آنها بر پایه‌ی سطح مقطع کل بتنی ترک نخورده محاسبه، و به علاوه تغییرات ممان اینرسی در امتداد دهانه یا ستون و در حد فاصل دو تکیه‌گاه منظور شود. در مورد دال-تیرها ممان اینرسی از بر تکیه‌گاه (ستون، سرستون، کتیبه یا دیوار) تا محور تکیه‌گاه برای در نظر گرفتن اثر افزایش سختی از تقسیم ممان اینرسی دال-تیر در بر تکیه‌گاه به $(1 - c_2/l_2)$ حاصل می‌شود. c_2 پهنای تکیه‌گاه در امتداد دهانه l_2 است. در مورد ستون‌ها نیز در صورت وجود سرستون، ممان اینرسی از پایه‌ی سرستون به‌طور خطی تا زیر دال-تیر افزایش می‌یابد. همچنین در محل اتصال از بالای دال-تیر تا زیر آن، ممان اینرسی ستون بی‌نهایت فرض می‌شود. گام دوم محاسبه‌ی سختی پیچشی اعضای پیچشی و سختی معادل است. سختی پیچشی اعضای پیچشی از رابطه‌ی ۱ حاصل می‌شود.

$$K_t = \sum \frac{9 E_{cs} C}{l_2 (1 - c_2/l_2)^3} \quad (1)$$

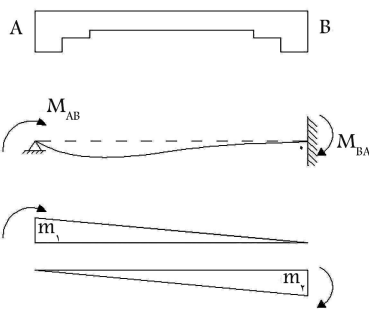
که در آن E_{cs} مدول الاستیسیته‌ی بتن دال است. در صورت وجود تیر در جهت l_1 ، قسمت اعظم لنگر منفی مستقیماً از طریق تیر، و بدون دخالت عضو پیچشی متصل، به ستون انتقال می‌یابد. در این حالت برای جلوگیری از کاهش بیش از حد

در این رابطه‌ها m_1 و m_2 معادلات لنگر خمشی واحد وارد بر هر یک از دو انتهای عضو هستند (شکل ۵).

در برنامه‌ی تهیه‌شده برای محاسبه‌ی انتگرال‌ها، از روش انتگرال‌گیری عددی سیمپسون استفاده شده است. به‌منظور انجام این انتگرال‌گیری محاسبه‌ی ممان اینرسی مقاطع مختلف ضروری است. با در نظر گرفتن پنج بازه‌ی انتگرال‌گیری جدا برای هر دهانه، و چهار بازه برای هر ستون می‌توان تمامی تغییرات سختی انواع مقاطع را لحاظ کرد. تفکیک مقاطع هر دهانه و هر ستون مطابق شکل ۶ است.

چنان‌که ملاحظه می‌شود برای ستون در بازه‌های A، C و D ممان اینرسی در کم‌ترین تعداد نقاط ممکن محاسبه می‌شود، زیرا در طول این بازه‌ها مقطع منشوری است؛ اما در بازه‌ی B به‌دلیل تغییر ممان اینرسی به‌صورت خطی محاسبه‌ی آن در ۱۱ نقطه انجام می‌شود. برای هر دهانه در بازه‌های A و B و C و D ممان اینرسی در پنج نقطه در نظر گرفته می‌شود تا در صورت زیادبودن طول ستون یا کتیبه، انتگرال‌گیری کاهش نیابد و نیز محاسبه‌ی لنگر در هر یک از این مقاطع ممکن باشد. پس از ذخیره‌ی ممان اینرسی‌های فوق در ماتریس‌های مربوطه، مقادیر توابع m_2 و m_1 در تمامی این نقاط محاسبه، و در ماتریس‌های آنها ذخیره می‌شوند. بدین ترتیب امکان انتگرال‌گیری دقیق معادلات ۱۱ تا ۱۳ فراهم می‌شود.

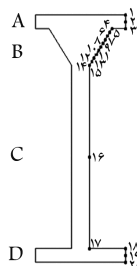
سختی در انتهای A برای عضو AB، لنگر مورد نیاز برای دوران آن به‌اندازه‌ی واحد است، به‌طوری‌که $\theta_A = 1$ و $\theta_B = 0$ باشد. در مورد انتهای B نیز می‌توان سختی را به‌همین ترتیب به دست آورد. با جایگذاری این مقادیر در معادله‌ی ۱۰ و



شکل ۵. نمودار لنگر خمشی واحد [۱۵].



الف) مقاطع در نظر گرفته شده برای ممان اینرسی در هر دهانه جهت محاسبه‌ی ماتریس نرمی؛



ب) مقاطع در نظر گرفته شده برای ممان اینرسی در هر ستون جهت محاسبه‌ی ماتریس نرمی.

شکل ۶. مقاطع در نظر گرفته‌شده برای ممان اینرسی جهت محاسبه‌ی ماتریس نرمی [۱۶].

نرمی ستون معادل $(1/K_{ec})$ نیز با چرخش متوسط اتصال بین ستون و بقیه‌ی دال معادل است. هنگامی‌که لنگری واحد از دال به ستون معادل منتقل می‌شود، این چرخش، معادل متوسط چرخش انتهای ستون، θ_c ، به علاوه متوسط پیش‌دال، $\theta_{t,avg}$ می‌باشد [۱۱].

$$\theta_{ec} = \theta_c + \theta_{t,avg} \quad (5)$$

که در آن θ_c به‌ازای لنگر واحد برابر $1/\Sigma K_c$ است که ΣK_c مجموع سختی خمشی ستون‌های بالا و پائین دال است. به‌طور مشابه مقدار $\theta_{t,avg}$ برای یک لنگر واحد، برابر با $1/K_t$ است. با جایگذاری در معادله‌ی فوق داریم:

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{K_t} \quad (6)$$

در آئین‌نامه به روش مشخصی برای تحلیل زیرقاب اشاره نشده ولی شیوه‌ی رایج، به‌دلیل سهولت محاسبات دستی، روش توزیع لنگر است. با در دست داشتن سختی معادل برای ستون معادل و سختی‌های خمشی دال‌های متصل به هر گره می‌توان نسبت به تحلیل قاب اقدام کرد. برای ستون معادل، باید لنگر محاسبه‌شده را به نسبت سختی‌های ستون‌های تحتانی و فوقانی بین آنها تقسیم کرد.

محاسبه‌ی دقیق ضرایب سختی، انتقال و لنگرهای گیرداری انواع مقاطع مختلف

برای تحلیل یک زیرقاب، با در نظر گرفتن هر یک از دهانه‌ها به‌عنوان یک تیر، و ستون‌ها به‌صورت یک عضو مجزا به‌طول L ، باید با توجه به روابط ۷ تا ۹ نسبت به محاسبه‌ی ضرایب k_{BA} ، k_{AB} ، k_B ، k_A برای هر یک اقدام کرد.

$$\begin{cases} K_A = k_A * EI/L & \text{سختی در انتهای A} \\ K_B = k_B * EI/L & \text{سختی در انتهای B} \end{cases} \quad (7)$$

$$\begin{cases} K_{AB} = k_{AB} * EI/L & \text{سختی انتقال یافته از A به B} \\ K_{BA} = k_{BA} * EI/L & \text{سختی انتقال یافته از B به A} \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{cases} C_{AB} = k_{AB}/k_A & \text{ضریب انتقال از A به B} \\ C_{BA} = k_{BA}/k_B & \text{ضریب انتقال از B به A} \end{cases} \quad (9)$$

در این رابطه‌ها EI/L برای هر عضو مقداری مشخص است که در آن I ممان اینرسی عضو در وسط دهانه‌ی بی با سطح مقطع ثابت است. برای به دست آوردن این ضرایب ماتریس نرمی به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ قابل تشکیل است [۱۵].

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} M_{AB} \\ M_{BA} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix} \quad (10)$$

درایه‌های ماتریس نرمی با استفاده از روش کار مجازی و طبق روابط ۱۱ تا ۱۳ به دست می‌آیند.

$$f_{11} = \int \frac{m_1^2}{EI} dx = \int \frac{(L-x)^2}{EIL^2} dx \quad (11)$$

$$f_{22} = \int \frac{m_2^2}{EI} dx = \int \frac{x^2}{EIL^2} dx \quad (12)$$

$$f_{12} = f_{21} = \int \frac{m_1 m_2}{EI} dx = \int \frac{(L-x)x}{EIL^2} dx \quad (13)$$

حل آن خواهیم داشت:

به‌کارگیری معادلات شیب-افت در تحلیل زیرقاب

مراحل تحلیل در یک زیرقاب به روش شیب - افت عبارت‌اند از:

۱. تعیین ضرایب انتقال و سختی هر دهانه و هر ستون و نیز سختی ستون معادل در هر تکیه‌گاه، و محاسبه‌ی لنگرهای گیرداری هر دهانه؛
۲. بیان کلیه‌ی لنگرهای انتهایی برحسب لنگرهای گیرداری و دوران‌گره‌ها با استفاده از معادلات شیب-افت؛
۳. نوشتن معادلات شرط تعادل گره‌ها که در آن‌ها دوران تکیه‌گاه‌ها به‌عنوان مجهول در نظر گرفته می‌شود و مجموع لنگرهای انتهایی اعضایی که در یک نقطه به هم متصل شده‌اند برابر صفر قرار داده می‌شود؛
۴. حل دستگاه معادله‌ی بالا برای به دست آوردن دوران‌ها؛
۵. قرار دادن دوران‌های به دست آمده در معادلات شیب-افت و محاسبه‌ی لنگرهای انتهایی؛
۶. تعیین برش‌ها و لنگرهای هر دهانه و تکیه‌گاه.

برای زیرقابی با n دهانه و با اعضای غیرمنشوری، با در دست داشتن ضرایب انتقال، سختی و لنگرهای گیرداری، $n + 1$ معادله‌ی شیب-افت را می‌توان تشکیل داد.

$$D_1 R_1 + E_1 R_1 = F_1 \quad (18)$$

$$E_1 R_1 + D_2 R_2 + E_2 R_2 = F_2$$

⋮

$$E_{i-1} R_{i-1} + D_i R_i + E_i R_{i+1} = F_i$$

⋮

$$E_n R_n + D_{n+1} R_{n+1} = F_{n+1}$$

که در آن R_i دوران در گره i ام و F_i تفاضل لنگرهای گیرداری انتهایی در تکیه‌گاه i ام است. با توجه به شکل ۷، D_i مجموع سختی‌های دورانی وارد بر اتصال i ام است که طبق رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید.

$$D_i = (K_B)_{i-1} + (K_A)_i + (K_{ec})_i \quad (19)$$

$$K_A = M_A = \frac{f_{12}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}} \quad (14)$$

$$K_B = M_B = \frac{f_{11}}{f_{11}f_{22} - f_{12}f_{21}}$$

لنگر حاصل از ضرایب انتقال نیز چنین به دست می‌آید:

$$K_{AB} = K_A * \frac{f_{21}}{f_{22}} \quad (15)$$

$$K_{BA} = K_B * \frac{f_{12}}{f_{11}}$$

در نهایت، برای قاب n دهانه می‌توان سختی‌های به دست آمده را به صورت شکل ۷ نشان داد. از سوی دیگر، با در دست داشتن مقادیر سختی فوق، لنگرهای گیرداری از رابطه‌ی ۱۶ به دست می‌آیند.

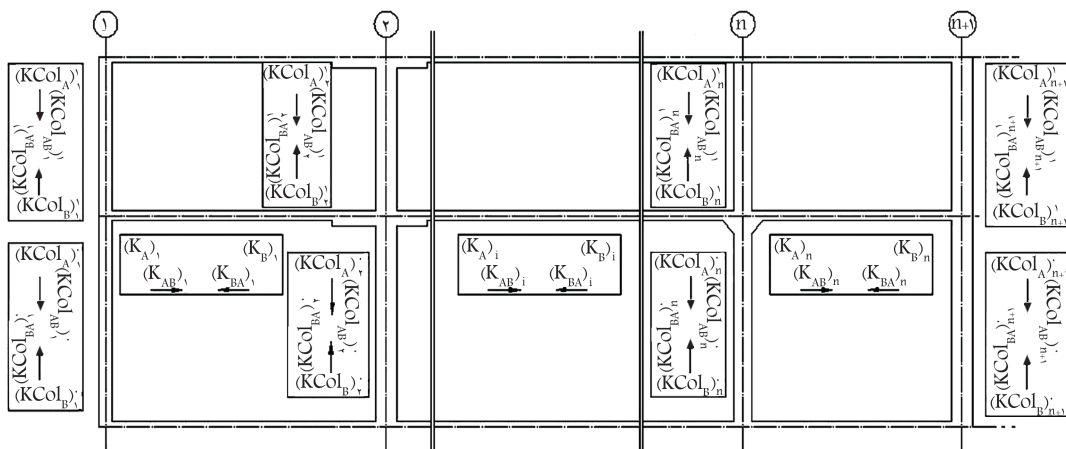
$$M_{FB} = -K_B * \theta_B + K_{BA} * \theta_A \quad M_{FA} = -K_A * \theta_A + K_{AB} * \theta_B \quad (16)$$

که در آن M_{FA} لنگر گیرداری در انتهای A؛ M_{FB} لنگر گیرداری در انتهای B؛ θ_A دوران آزاد انتهای A؛ و θ_B دوران آزاد انتهای B است. برای به دست آوردن دوران‌های آزاد هر انتها، با به‌کارگیری اصول کار مجازی می‌توان از رابطه‌ی ۱۷ استفاده کرد.

$$\theta_A = \int \frac{m_s m_\lambda}{EI} dx \quad (17)$$

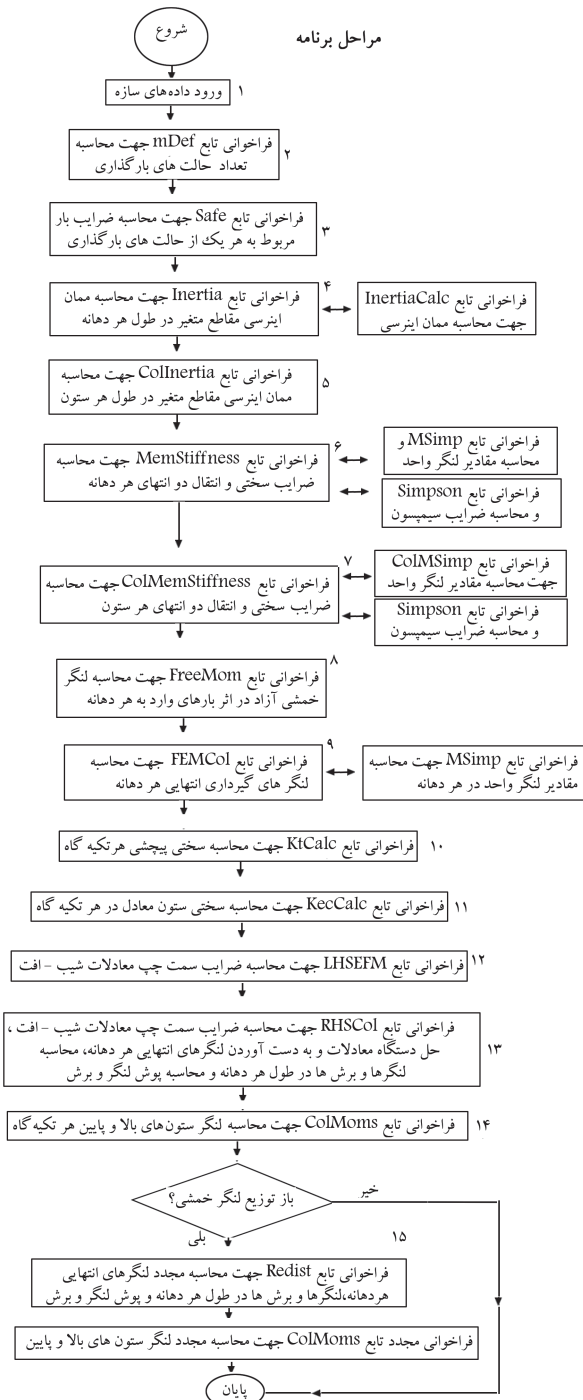
$$\theta_B = \int \frac{m_s m_\tau}{EI} dx$$

که در آن m_s نمودار لنگر خمشی آزاد در اثر بارهای وارد بر دهانه است. چنان‌که از معادله‌ی ۱۷ مشهود است، برای محاسبه‌ی دوران آزاد هر انتها در دست داشتن مقادیر لنگر خمشی آزاد در نقاط نشان داده شده در شکل ۶ ضروری است. بدین‌منظور با در نظر گرفتن هر دهانه به‌صورت یک تیر با تکیه‌گاه‌های ساده، لنگر خمشی آزاد به‌صورت جداگانه برای بارهای مرده و زنده با توجه به نوع بارگذاری در ۴۱ نقطه محاسبه می‌شود.



شکل ۷. سختی‌های زیرقاب [۱۷].

- امکان انتخاب آئین‌نامه‌ی بتن ایران، آمریکا و انگلستان برای تعیین حالات بار بحرانی؛
- امکان انجام بازتوزیع لنگر خمشی و محاسبه‌ی مجدد لنگرها و برش‌های دهانه‌ها و پوش آن‌ها؛
- داده‌های ورودی از طریق محیط ویندوزی برنامه انجام می‌گیرد و استفاده از برنامه دارای سهولت و سرعت بالایی است. نمودار گردش‌ی زیر مراحل برنامه و توابع استفاده شده در هر مرحله را نشان می‌دهد:



که در آن $(K_{ec})_i$ سختی ستون معادل در اتصال i ام است. مقدار E_i مطابق رابطه‌ی ۲۰ محاسبه می‌شود.

$$E_i = ((K_{AB})_i) \quad (20)$$

حل همزمان دستگاه معادلات فوق برای به دست آوردن مقادیر دوران‌ها (R_i) در هر تکیه‌گاه با استفاده از روش حذف و جایگزینی، مشابه روش حذفی گاوس، چنان که در ادامه تشریح خواهد شد انجام می‌پذیرد. مقدار اولیه‌ی متغیرهای DD و FF را نیز چنین در نظر می‌گیریم.

$$FF = F_1 \quad (21)$$

$$DD = D_1$$

حال طی تکرار یک روند، مقادیر FF و DD را برای مقادیر 1 تا $n+1$ مطابق رابطه‌ی ۲۲ محاسبه می‌کنیم.

$$FF = (F_i - E_{i-1}) * FF/DD \quad (22)$$

$$DD = D_i - ((E_{i-1})^4 / DD)$$

پس از به دست آوردن مقادیر نهایی DD و FF مقدار R_n و R_{n+1} نیز مطابق رابطه‌ی ۲۳ محاسبه می‌شود.

$$R_{n+1} = FF/DD \quad (23)$$

$$R_n = (F_{n+1} - D_{n+1} * R_{n+1}) / E_n$$

با محاسبه‌ی R_{n+1} و سپس محاسبه‌ی R_n به طریق فوق، سایر مقادیر R_i برای 1 تا $n+1$ طبق رابطه‌ی ۲۴ قابل محاسبه است.

$$R_i = (F_{i+1} - D_{i+1} * R_{i+1} - E_{i+1} * R_{i+2}) / E_i \quad (24)$$

با محاسبه‌ی مقادیر دوران‌های 1 تا n گره قاب، R_1 تا R_{n+1} ، مقادیر لنگرهای تکیه‌گاهی را می‌توان از رابطه‌ی ۲۵ به دست آورد.

$$M_1 i = -((K_A)_i * R_i + (K_{AB})_i * R_{i+1}) + (M_{FA})_i \quad (25)$$

$$M_2 i = -((K_{BA})_i * R_i + (K_B)_i * R_{i+1}) + (M_{FB})_i$$

که در آن $M_1 i$ ، لنگر انتهای چپ دهانه‌ی i ام و $M_2 i$ ، لنگر انتهای راست دهانه‌ی i ام است. در نهایت با داشتن مقادیر لنگرهای تکیه‌گاهی، محاسبه‌ی لنگرها و برش‌ها در طول هر دهانه قابل دست‌یابی است.

معرفی نرم‌افزار تهیه‌شده

از ظرفیت‌ها و قابلیت‌های برنامه‌ی تهیه‌شده می‌توان به موارد زیر اشاره کرد.

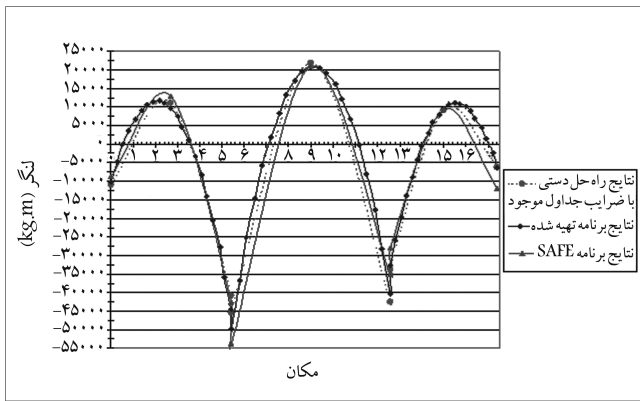
- محاسبه‌ی سختی‌های دقیق برای انواع مقاطع دال-تیرها و ستون‌ها شامل صفحه‌ی تخت، دال دارای کتیبه، سرستون، تیر طولی و تیر عرضی و در نتیجه تحلیل دقیق قاب؛
- امکان تعریف تعداد دهانه‌های نامحدود برای قاب؛
- امکان اعمال چهار حالت بارگذاری متمرکز، گسترده، یکنواخت، گسترده‌ی مثلثی راست و چپ؛

مثال‌های نمونه

سیستم صفحه تخت دوطرفه

برای بررسی صحت عملکرد برنامه، اولین مثال یک سیستم صفحه تخت فاقد مقاطع پیچیده انتخاب شده است (شکل ۸) [۶].

برای مثال فوق، لنگرها و برش‌های به دست آمده از راه حل دستی -- با استفاده از ضرایب جداول موجود -- با نتایج حاصل از برنامه منطبق است (جدول ۱). با توجه به این نکته که در کارهای مهندسی تحلیل این‌گونه سازه‌ها اغلب توسط برنامه‌ی SAFE صورت می‌گیرد، [۱۸] این مثال توسط این برنامه نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج حاصل از برنامه‌ی SAFE در تکیه‌گاه‌های داخلی با نتایج دو راه حل دیگر مطابقت دارد، ولی در نتایج لنگر تکیه‌گاه‌های خارجی ۲۰٪ اختلاف مشاهده می‌شود.



شکل ۱۰. نمودار مقایسه لنگرهای بدست آمده از راه حل دستی با ضرایب جداول موجود، برنامه‌ی تهیه شده و برنامه‌ی SAFE برای مثال ۲.

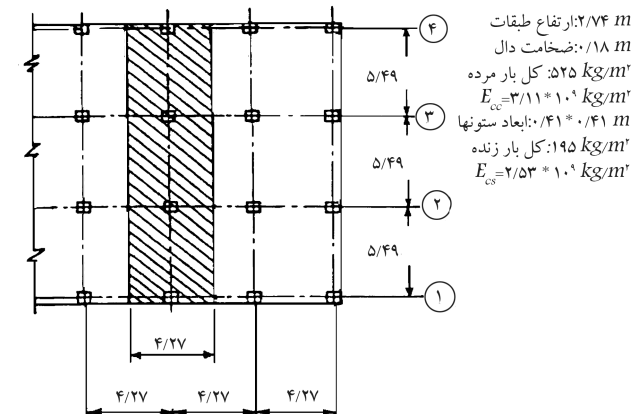
سیستم دال تخت دوطرفه‌ی دارای تیر محیطی

سازه‌ی نمونه‌ی دوم برای بررسی اثر مقاطع مختلف دال-تیرها و ستون‌ها در نتایج تحلیل، یک سیستم دال تخت دوطرفه دارای تیر محیطی، کتیبه و سرستون با ابعاد و مشخصات نشان داده شده در شکل ۹، انتخاب شده است [۱۹]. ضرایب سختی، انتقال و لنگرهای گیرداری محاسبه شده از راه حل دستی با استفاده از ضرایب جداول موجود و نتایج برنامه‌ی تهیه شده برای هر دهانه و هر ستون، در جدول ۲ آورده شده

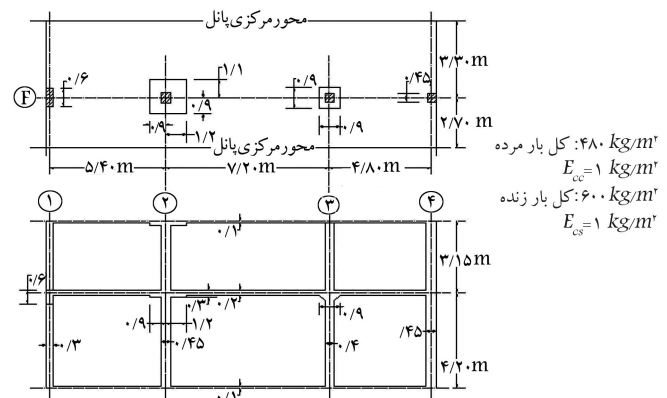
است. مدل مثال فوق توسط برنامه SAFE نیز مورد تحلیل قرار گرفته است. نتایج لنگرها و برش‌های حاصل از ضرایب جداول موجود، برنامه تهیه شده و تحلیل اجزاء محدود با برنامه SAFE در جدول ۳ و نمودار شکل ۱۰ نشان داده شده است. ضریب سختی دال محاسبه شده توسط برنامه در دهانه‌های اول و دوم که به دلیل وجود تیر عرضی و کتیبه در تکیه‌گاه‌های اول و دوم دارای تغییرات سختی برای مقطع دال-تیر است، دارای اختلافی بین ۶٪ تا ۹٪ است. در مورد ضرایب سختی ستون‌ها، در تکیه‌گاه سوم (به علت وجود سرستون) سختی به دست آمده برای انتهای فوقانی ستون پائینی که به دال متصل است، ۱۸٪ بزرگ‌تر از ضریب به دست آمده از جداول است که در نهایت منجر به ۷٪ اختلاف در سختی ستون معادل شده است. لنگرهای گیرداری محاسبه شده توسط برنامه، برای دهانه‌های اول و دوم ۸٪ تا ۱۱٪ اختلاف دارد. نتایج سایر موارد به دلیل عدم وجود تغییرات سختی مقاطع مطابقت دارند.

در نتیجه‌ی اختلافات ذکر شده برای ضرایب سختی و انتقال و لنگرهای گیرداری، لنگرهای انتهای دهانه‌ها که توسط برنامه محاسبه شده اختلافی در حدود ۱۰٪ در دهانه‌های اول و دوم دارند. چنان که ملاحظه می‌شود، بیشینه‌ی لنگر مثبت وسط دهانه‌ی سوم محاسبه شده توسط برنامه، با نتیجه‌ی حاصل از راه حل دستی و برنامه‌ی SAFE اختلافی در حدود ۲۰٪ دارد. دلیل این امر آن است که در دو روش اخیر، این لنگر به عنوان لنگر وسط دهانه از تعادل استاتیکی به دست آمده، در حالی که این دهانه به علت سختی بالای تکیه‌گاه سوم ناشی از وجود سرستون‌ها، نامتقارن است و چنان که از نمودار شکل ۱۰ مشهود است، بیشینه‌ی لنگر مثبت در وسط دهانه رخ نمی‌دهد؛ لذا محاسبه‌ی دقیق لنگر در برنامه‌ی تهیه شده منجر به این اختلاف شده است.

چنان که در جدول ۳ و نمودار شکل ۱۰ ملاحظه می‌شود، لنگر تکیه‌گاه‌های خارجی حاصل از برنامه‌ی SAFE با دو روش دیگر اختلاف زیادی دارد. برش‌های به دست آمده از این برنامه نیز با نتایج سایر روش‌ها اختلافاتی دارند که در مقایسه با اختلافات چشم‌گیر لنگرها بسیار کوچک‌اند، به خصوص در تکیه‌گاه سمت راست که علی‌رغم وجود ۹۴٪ اختلاف برای لنگر، فقط ۶/۳٪ اختلاف در برش به چشم می‌خورد. در مثال‌های ارائه شده در راهنمای نرم‌افزار SAFE، نیز به این نکته اشاره شده است که لنگر تکیه‌گاه‌های خارجی محاسبه شده در این نرم‌افزار با لنگرهای محاسبه شده توسط سایر روش‌ها -- نظیر روش مستقیم و قاب معادل -- تفاوت دارد، ولی دلیلی برای این تفاوت ذکر نشده است. [۱۹]



شکل ۸. سیستم صفحه تخت دوطرفه مورد تحلیل برای بررسی صحت عملکرد برنامه [۱۵].



شکل ۹. سیستم دال مورد تحلیل در مثال ۲.

جدول ۱. مقایسه‌ی لنگرها و برش‌های محاسبه‌شده از راه حل دستی با ضرایب جداول موجود برنامه‌ی تهیه‌شده و برنامه‌ی SAFE برای مثال ۱.

شماره گروه	۱		۲		۳		۴		
	عضو	وسط دهانه	۲-۱	۲-۳	۳-۲	۳-۴	وسط دهانه	۴-۳	
لنگر (Kg.m)									
راه حل دستی	-۷,۲۷	۶,۹۰	-۱۳,۱۴	-۱۱,۹۲	۵,۱۸	-۱۱,۹۲	-۱۳,۱۴	۶,۹۰	-۷,۲۷
نتایج برنامه	-۷,۳۰	۷,۰۰	-۱۳,۲۰	-۱۲,۰۰	۵,۲۰	-۱۲,۰۰	-۱۳,۲۰	۷,۰۰	-۷,۳
درصد اختلاف	%۰,۴	%۱,۴	%۰,۵	%۰,۷	%۰,۴	%۰,۷	%۰,۵	%۱,۴	%۰,۴
نتایج SAFE	-۸,۶۹	۶,۳۸	-۱۲,۸۵	-۱۱,۸۸	۵,۱۹	-۱۱,۸۸	-۱۲,۸۵	۶,۳۸	-۸,۶۹
درصد اختلاف	%۱۹,۵	%-۷,۶	%-۲,۲	%-۰,۳	%۰,۳	%-۰,۳	%-۲,۲	%-۷,۶	%۱۹,۵
برش (Kg)									
راه حل دستی	۱۱,۴۴		-۱۳,۵۸	۱۲,۴۹		-۱۲,۴۹	۱۳,۵۸		-۱۱,۴۴
نتایج برنامه	۱۱,۴۴		-۱۳,۵۸	۱۲,۴۹		-۱۲,۴۹	۱۳,۵۸		-۱۱,۴۴
درصد اختلاف	%۰		%۰	%۰		%۰	%۰		%۰
نتایج SAFE	۱۱,۴۹		-۱۲,۹۸	۱۲,۲۱		-۱۲,۲۱	۱۲,۹۸		-۱۱,۴۹
درصد اختلاف	%۰,۵		%-۴,۳	%-۲,۰		%-۲,۰	%-۴,۳		%۰,۵

جدول ۲. مقایسه‌ی ضرایب سختی، انتقال و لنگرهای گیرداری محاسبه‌شده از ضرایب جداول موجود و برنامه‌ی تهیه‌شده برای مثال ۲.

شماره گروه	۱		۲		۳		۴	
	عضو	۱-۲	۲-۱	۲-۳	۳-۲	۳-۴	۴-۳	
ضریب سختی دال - تیر	راه حل دستی	۴,۱۱	۵,۹۷	۵,۹۴	۴,۳۴	۴,۵۰	۴,۱۴	
	نتایج برنامه	۴,۳۴	۵,۴۶	۵,۵۴	۴,۵۷	۴,۴۲	۴,۱۹	
درصد اختلاف		%۵,۴	%-۸,۵	%-۶,۷	%۵,۳	%-۱,۸	%۱,۵	
ضریب انتقال	راه حل دستی	۰,۵۱	۰,۵۹	۰,۵۹	۰,۵۲	۰,۵۳	۰,۵۱	
	نتایج برنامه	۰,۶۰	۰,۴۸	۰,۵۰	۰,۶۱	۰,۵۰	۰,۵۳	
درصد اختلاف		%۱۸,۴	%-۱۸,۸	%-۱۴,۹	%۱۷,۱	%-۵,۷	%۳,۹	
ضریب سختی ستون بالا	راه حل دستی	۵,۵۶		۴,۹۱	۴,۷۹		۴,۷۵	
	نتایج برنامه	۵,۵۴		۴,۹۰	۵,۰۷		۴,۷۲	
درصد اختلاف		%-۰,۴		%-۰,۲	%۵,۸		%-۰,۶	
ضریب سختی ستون پایین	راه حل دستی	۶,۸۸		۵,۰۵	۴,۶۶		۴,۵۴	
	نتایج برنامه	۶,۸۷		۵,۰۰	۵,۴۸		۴,۵۲	
درصد اختلاف		%-۰,۱		%-۱	%۱۷,۶		%-۰,۴	
سختی معادل	راه حل دستی	۳۶۸۲		۲۴۵۹	۳۶۳۴		۲۴۱۷	
	نتایج برنامه	۳۶۹۲		۲۴۵۵	۳۸۷۷		۲۴۱۳	
درصد اختلاف		%۰,۳		%-۰,۲	%۶,۷		%-۰,۲	
لنگرهای گیرداری انتهایی (kg.m)	راه حل دستی	۲۴۸۶۴	۲۷۸۲۴	۴۸۹۴۴	۴۴۷۳۴	۲۰۳۵۱	۱۹۶۵۰	
	نتایج برنامه	۲۲۸۷۲	۳۰۸۴۰	۵۳۲۷۴	۴۱۸۴۶	۲۰۸۵۱	۱۹۲۶۷	
درصد اختلاف		%-۸	%۱۰,۸	%۸,۸	%-۶,۵	%۲,۵	%-۱,۹	

جدول ۳. مقایسه‌ی لنگرها و برش‌های محاسبه‌شده از راه حل دستی با ضرایب جداول موجود در برنامه‌ی تهیه‌شده و برنامه‌ی SAFE برای مثال ۲.

شماره گروه	۱		۲		۳		۴		
	عضو	وسط دهانه	۲-۱	۲-۳	۳-۲	۳-۴	وسط دهانه	۴-۳	
لنگر (Kg.m)									
راه حل دستی	-۱۱۰۱۱	۱۱۱۰۰	-۴۰۷۸۵	-۴۵۵۰۷	۲۱۷۹۰	-۴۲۴۸۴	-۳۳۷۵۹	۹۲۴۸	-۶۲۲۶
نتایج برنامه	-۱۰۰۳۲	۱۱۶۵۷	-۴۴۶۲۰	-۴۹۷۶۹	۲۰۷۸۱	-۴۰۲۳۸	-۳۲۸۳۲	۱۱۰۸۰	-۶۴۲۷
درصد اختلاف	%-۸,۹	%۵	%۹,۴	%۹,۴	%-۴,۶	%-۵,۳	%-۲,۷	%۱۹,۸	%۳,۲
نتایج SAFE	-۸۵۸۰	۱۳۰۰۳	-۴۲۵۶۲	-۵۳۷۹۰	۲۱۰۲۲	-۳۵۱۵۴	-۲۸۰۴۹	۹۵۱۶	-۱۲۰۷۷
درصد اختلاف	%-۲۲,۱	%۱۷,۱	%۴,۴	%۱۸,۲	%-۳,۵	%-۱۷,۳	%-۱۶,۹	%۲,۹	%۹۴,۰
برش (Kg)									
راه حل دستی	۲۱۸۹۷		-۳۲۹۲۴	۳۶۹۶۷		-۳۶۱۲۷	۳۰۱۰۰		-۱۸۶۲۹
نتایج برنامه	۲۱۰۰۵		-۳۳۸۱۶	۳۷۸۷۱		-۳۵۲۲۴	۲۹۸۶۶		-۱۸۸۶۴
درصد اختلاف	%-۴,۱		%-۲,۷	%۲,۴		%-۲,۵	%-۰,۸		%۱,۳
نتایج SAFE	۲۰۵۱۹		-۳۲۳۳۹	۳۷۷۳۳		-۳۲۷۲۵	۲۶۵۲۰		-۱۹۷۹۸
درصد اختلاف	%-۶,۳		%-۱,۸	%۲,۱		%-۹,۴	%-۱۱,۹		%۶,۳

نتیجه‌گیری

در این تحقیق، برای به‌کارگیری دقیق روش قاب معادل که روشی جامع و مناسب برای تحلیل انواع دال‌های دوطرفه است (با توجه به مقاطع متغیر دال-تیرها و ستون‌ها در انواع دال‌ها) به شیوه‌های محاسبه‌ی دقیق ضرایب انتقال، سختی و لنگرهای گیرداری برای اعضای زیرقاب با استفاده از روش نرمی برای هر دهانه و هر ستون، و نیز تعمیم معادلات شیب-افت برای استفاده از آنها به منظور تحلیل دقیق زیرقاب در قالب برنامه‌ی رایانه‌ی تهیه‌شده، پرداخته شد. دو مثال نمونه برای بررسی صحت عملکرد برنامه و مقایسه‌ی نتایج حاصل از آن مورد بررسی قرار گرفت. مثال اول که فاقد تغییرات سختی زیاد در اعضای قاب بود، صحت عملکرد برنامه را تأیید کرد. برای مثال دوم،

یک سیستم دال تخت دوطرفه دارای تیر محیطی مورد تحلیل قرار گرفت. در نتیجه‌ی اختلافات به دست آمده در نتایج محاسبات ضرایب سختی، انتقال و لنگرهای گیرداری، اختلافی در حدود ۱۰٪ برای لنگرهای انتهایی در دهانه‌های دارای تیر عرضی و کتیبه حاصل شد. دقت بالای به‌کار رفته در محاسبات مقادیر ذکر شده و استفاده از معادلات شیب-افت که روش دقیقی برای توزیع لنگر است، منجر به اختلافات مذکور می‌شود. افزون بر این، دو مثال فوق توسط برنامه‌ی SAFE که از روش اجزاء محدود بهره می‌جوید نیز مورد تحلیل قرار گرفت. اختلافات بزرگ در لنگر تکیه‌گاه‌های خارجی به دست آمده از انجام تحلیل به این روش، بیانگر این مطلب است که در تحلیل دال‌ها به روش اجزاء محدود و با استفاده از نرم‌افزار متداول SAFE برای انجام این کار، در استفاده از مقادیر لنگر در تکیه‌گاه‌های خارجی باید با احتیاط عمل کرد.

منابع

- Al-Assaf, A.; and Saffarini, S. "Optimization of Slabs Using Object Oriented Programming.", *Computers and Structures (Elsevier)*, **82**, pp. 741-752, (2004).
- Allen, F.; and Darvall, P. "Lateral Load Equivalent Frame.", *ACI Structural Journal*, **74** (7), pp. 294-299, (July 1977).
- Vanderbilt, M.D.; and Corely, W.G. "Frame Analysis of Concrete Buildings.", *Concrete International Journal*, **5**, Issue 12, (Dec. 1983).
- Luo, Y.H.; and Durrani, A.J. "Equivalent Beam Model for Flat-Slab Buildings- Part I: Interior Connections.", *ACI Structural Journal*, **92** (1), pp. 115-124, (Jan.-Feb. 1995).
- Luo, Y.H.; and Durrani, A.J. "Equivalent Beam Model for Flat-Slab Buildings- Part II: Exterior Connections.", *ACI Structural Journal*, **92** (2), pp. 250-257, (1995).
- Ghosh, S.K.; Fanella, D.A.; and Rabbat, B.G. "Notes On ACI 318-95. Portland Cement Association", (1996).
- Park, R.; and Gamble, W.L. *Reinforced Concrete Slabs*. Second Edition, ohn Wiley and Sons Inc, (2000).
- Ferguson, P.M.; Breen, J.E.; and Jirsa, J.O. *Reinforced Concrete Fundamentals*. Fifth Edition, John Wiley and Sons Inc, (1988).
- Keynia, A. M. "Analysis and design of reinforced concrete structures", Isfahan University Press, Sixteenth Edition, (2007).
- Iranian Code for Concrete Structures, "ABA", First Revision, Seventh Edition, (2005).
- MacGregor, J.G. *Reinforced Concrete Mechanics and Design*. Third Edition, Prentice-Hall, (1997).
- American Concrete Institute, *Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02) and Commentary (ACI 318R-02)*, Farmington Hills, MI, (2002).
- Erberik, M.A.; and Elnashai, A.S. "Seismic Vulnerability of Flat-Slab Structures.", *Technical Report, Mid-America Earthquake Center, DS-9 Project*, Civil and Environmental Engineering Dept., University of California, Los Angeles, (Dec. 2003).
- Dovich, L.M.; and Wight, J.K. "Effective Slab Width Model for Siesmic Analysis of Flat Slab, Frames.", *ACI Structural Journal*, **102**(6), (Nov-Dec, 2005).
- Hulse, R.; and Mosley, W.H. *Reinforced Concrete Design by Computer*. MacMillan Education LTD, (1986).
- Moghaddasi B., N. S. "Development of a subframe computer program for the Analysis of Flat Slabs and beam-supported slabs and assessment of their analysis under horizontal loading", *M.Sc. Thesis*, Civil Engineering Dept., Faculty of Eng., Thehran University, (2007).
- Kani, I.M.; Moghaddasi Bonab, N.S.; and Baradaran, S. "Optimization of Equivalent Frame Method for Two-Way Slab Systems Analysis", *The Third International Conference on Structural Engineering, Mechanics and Computation (SEMC 2007), Proceedings*, Cape Town, South Africa, (Sep, 2007).
- Computers and Structures Inc, *SAFE Version 8.0.8*. Berkeley, California, (2005).
- Computers and Structures Inc, *Verification Manual*. Berkeley, California, (2005).