مقدماتی با حساب است. به جای استفاده از اعداد، از متغیرهایی که جایگزین اعداد شده‌اند استفاده می‌کنیم و در واقع خانواده‌ای از محاسبات را نشان می‌دهیم که در اصول با هم مشترک هستند.

در متافونت، برای توصیف شکل حروف از یک سیستم مختصات دکارتی استفاده می‌شود. طراح حروف، نقاط اصلی یک شکل را روی این سیستم مختصات معین می‌کند و با بهره‌گیری از دستورالعملهایی آنها را به هم وصل می‌کند. بدین ترتیب نقاط واقع در بین نقاطی که طراح معین کرده است، توسط کامپیوتر «سیاه» می‌شود و برخلاف ویراستارهای حروف، لازم نیست که طراح تک تک نقاط را سیاه کند.

حروفچینی کامپیوتری متنهای فارسی

اگرچه تهیهٔ متنهای فارسی با وسایلی مثل کلمه‌پرداز و نرم‌افزارهای حروفچینی مشکلاتی به همراه دارد ولی به نظر نمی‌رسد این نوع مشکلات در استفاده از سیستمی مانند تک و متافونت مانعی ایجاد کند. در طراحی سیستم تک، دکتر کنوت امکاناتی را برای خطوطی که از راست به چپ نوشته می‌شود نیز در نظر گرفته است، ضمن آنکه مسائلی از قبیل مخلوط کردن متنهای فارسی و لاتین یا نحوهٔ وارد کردن اعداد در متن فارسی که از راست به چپ نوشته می‌شود، با تغییراتی در سیستم تک قابل حل است.

امکاناتی که تک و متافونت در اختیار حروفچینی فارسی می‌گذارد بالاتر از حدی است که در حال حاضر با استفاده از ماشینهای حروفچینی مثل «لاینوترون» در دسترس است. امکان طراحی حروف جدید که با ویژگی خطهای مختلف فارسی مثل نستعلیق و شکسته متناسب باشد، استفاده از تمام علائم و حروف لازم برای فرمولهای ریاضی، امکان استفاده از سیستم روی کامپیوترهای همه منظورهٔ معمولی و استفاده از کاغذ معمولی برای گرفتن خروجیهای سیستم، از جمله امکاناتی است که دستگاههای حروفچینی فعلی فاقد آن هستند و تک و متافونت آنها را در اختیار استفاده کننده قرار می‌دهد. هم اکنون تعدادی از کارشناسان کامپیوتر و خوشنویسی ایران در جریان افزودن تغییرات لازم برای استفاده از این دو سیستم در امر نشر فارسی هستند و به موفقیتهایی نیز دست یافته‌اند و با توجه به در دسترس بودن متن برنامه‌های این دو سیستم، می‌توان انتظار داشت که کوششهای دیگری نیز در این زمینه صورت گیرد.

منابع:

1. W. Abikoff, "TEX - the ease and the art of text processing", *Abacus*, (4) 5 (1988).
2. Herbert S. Wilf, "TEX: a non - rveview", Amer Math, Monthly (4) 43 (1986).
3. علی پارسا، «نشر کامپیوتری و متنهای ریاضی» نشر ریاضی، سال ۲، شماره ۲، ۱۳۶۸.

آشنایی با نرم‌افزار "Mathematica"

فرانک میلانی

کارشناس دانشکدهٔ علوم ریاضی

دانشگاه صنعتی شریف

به دنبال اختصاص مطالب این شمارهٔ شریف به موضوع انفورماتیک، مقالات و مطالب مختلف از طرف نویسندگان به دستمان رسید که در برگیرندهٔ مباحث مربوط به انفورماتیک و نرم‌افزارهای مورد استفاده در این شاخهٔ علمی بود. به جهت اطلاع خوانندگان محترم از این مباحث اقدام به چاپ آنها کردیم.

آنچه روزگاری در کاربردهای علمی کامپیوتر به خیال می‌مانست امروزه به یاری حضور نرم‌افزارهایی از قبیل "Mathematica"، "Macsyma" و "Maple" صورت واقعی به خود گرفته است. کامپیوتر از دیرباز ابزار مهمی در محاسبات ریاضی بوده است ولی همواره محدودیت در توان محاسباتی، دشواریهایی را پدید می‌آورد که در هر مورد ضرورت طراحی «الگوریتم» مناسبی را ایجاب می‌نمود، ضمن آنکه یافتن الگوریتمهای بهینه سخت دشوار بوده و برای رسیدن به نتیجهٔ مورد نظر به زمان کامپیوتری زیادی نیاز بود. مثلاً اگر می‌خواستیم به فرم ریاضی a^N را که N یک عدد صحیح و مثبت است محاسبه کنیم بلافاصله محدودیت توان محاسباتی کامپیوتر مطرح می‌شد و نیازمند طراحی «الگوریتم» مناسبی برای کار محاسبه می‌بودیم. انجام «محاسبات نمادین» مثل حل معادلاتی با پارامتر، مشتق‌گیری، انتگرال‌گیری و غیره نیز فقط تصوری دور از انتظار بود.

امروزه نرم‌افزارهایی توانمند نظیر "Mathematica" همه این نیازها را برآورده می‌کنند. "Mathematica" قادر است «محاسبات عددی» و «محاسبات نمادین» را با دقت و سرعت انجام داده و نتیجهٔ کار را در اختیار پژوهشگران قرار دهد. علاوه بر آن گرافیک کامپیوتری بسیار نفیس "Mathematica" امکان تجسّم بخشیدن و ایجاد شهود بصری نسبت به بسیاری از پدیده‌هایی را که تجسم دقیق آنها راهگشای شناخت آنهاست فراهم می‌سازد.

نرم‌افزار "Mathematica" توسط یک تیم چندین نفره به سرپرستی «استفان ولفرم»[1] در "MIT" طراحی شد و سپس شرکت کامپیوتری ولفرم به عرضهٔ آن پرداخت. "Mathematica" از ردهٔ کامپیوترهای شخصی (حداقل ۳۸۶) تا ایستگاههای کار و کامپیوترهای بزرگ و سوپرکامپیوترها نرم‌افزار مناسبی را برای استفاده آماده کرده است.

حال نگاهی کوتاه به برخی از تواناییهای "Mathematica" می‌اندازیم.

محاسبات عددی

شما می‌توانید دقیقاً همان طوری که توسط ماشین حساب، عملیات و محاسبات ریاضی را انجام می‌دهید با "Mathematica" نیز کار کنید. مثلاً شما ۷+۵ را به عنوان "Input" وارد کنید، "Mathematica" عدد ۱۲ را به عنوان "Output" چاپ خواهد کرد.

```
In [1] : = 5 + 7
Out [1] = 12
```

با این حال برخلاف ماشین حساب، "Mathematica" نتیجهٔ دقیق محاسبات را می‌تواند به ما بدهد. مثلاً نتیجهٔ دقیق محاسبهٔ 3^{100} را در out[2] ملاحظه کنید. در محیط "Mathematica" علامت ^ برای عمل «به توان رسانیدن» به کار برده می‌شود. از تابع N برای به دست آوردن تقریب عددی نتایج می‌توان استفاده کرد. علامت % مشخص کننده آخرین نتیجه است و نتیجه به صورت نماد علمی نمایش داده می‌شود.

```
In [2] : = 3 ^ 100
Out [2] = 515377520732011331036461129765621272
          702107522001
In [3] : = N [%]
Out [3] = 5.15378 10^47
```

نتایج عددی را با هر درجه دقتی می‌توان به دست آورد. نمونهٔ روبرو، $\sqrt{10}$ را تا ۵۰ رقم دقت محاسبه می‌کند.

```
In [4] : = N [Sqrt [10], 50]
Out[34]=3.16227766016837933199889354443271853371
          95551393252
```

"Mathematica" روی اعداد مختلط نیز می‌تواند کار کند. در مثال روبرو $(3+4i)^{10}$ محاسبه شده است. حرف I مشخص کنندهٔ عدد موهومی $\sqrt{-1}$ است. دقت کنید که حرف I، حتماً باید به صورت بزرگ وارد شود تا عدد $\sqrt{-1}$ را مشخص سازد.

```
In [5] : = (3 + 4 I) ^ 10
Out [5] = -9653287 + 1476984 I
```

"Mathematica" توان محاسبه تمامی توابع استاندارد ریاضی را دارد. مثلاً در عبارت روبرو مقدار عددی تابع بسل $J_0(14.5)$ مشخص شده است.

```
In [6] : = BesselJ [0, 14.5]
Out [6] = 0.0875449
```

توابع ریاضی با هر دقت دلخواهی قابل محاسبه هستند. عبارت روبرو تابع «زتای ریمان» $\zeta(1/2+13i)$ را تا ۴۰ رقم دقت محاسبه می‌نماید.

```
In [8] : = N [Zeta [1/2 + 13 I], 40]
Out [8] =0.443004782505368189197897441332849126
26 - 0.655483098321168943051369649919133550622 I
```

توسط "Mathematica" می‌توان انتگرال عددی توابع را به دست آورد. به عنوان مثال مقدار عددی $\int_0^{\pi} \sin(\sin(\sin(x)))dx$ در عبارت روبرو محاسبه شده است.

```
In [9] : = NIntegrate [Sin [Sin[x]], {x, 0, Pi}]
Out [9] = 1.78649
```

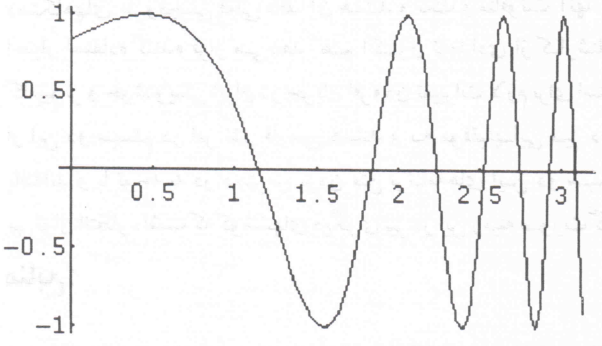
این "Package" می‌تواند محاسبات دقیق گوناگونی روی اعداد صحیح انجام دهد. مثلاً تابع "FactorInteger" تجزیهٔ یک عدد صحیح به عوامل اول را به ما می‌دهد.

```
In [10] : = FactorInteger [70612139395722186]
Out [10] = {{2, 1}, {3, 2}, {43, 5}, {26684839, 1}}
```

گرافیک

حاصل عبارت روبرو، رسم منحنی تابع $\sin(\exp(x))$ است که در آن x در فاصلهٔ ۰ تا π تغییر می‌کند.

```
In [1] : = Plot [Sin [Exp[x]], {x, 0, Pi}]
```

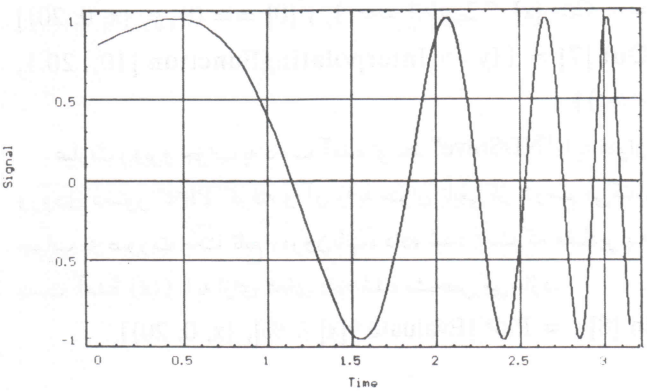


"Mathematica" امکان این را نیز فراهم می‌کند که شکل رسم شده با امکانات بهتری عرضه شود. مثلاً در عبارت روبرو، تابع "Show" همراه با پارامتر % موجب می‌شود که شکل ایجاد شده در "Output" قبلی دوباره نمایش داده شود، اما این بار وجود انتخابهای "Frame"،

1- Stephen Wolfram

"FrameLabel" و "GridLines" باعث می‌شوند که فرم کلی "Output" جدید تفاوتهایی با "Output" قبلی داشته باشد که این تفاوتها عبارتند از: قرار گرفتن کل شکل در یک کادر تحت تأثیر Fram → True نوشته شدن دو عنوان Time و Signal برای محور Xها و Yها تحت تأثیر FrameLable → {"Time", "Signal"} و کشیدن خطوط مشبک در کل کادر تحت تأثیر GridLines → Automatic.

```
In [2]:= Show [%, Frame      → True,
                  FrameLabel → {"Time", "Signal"},
                  GridLines  → Automatic
```



جبر و حساب دیفرانسیل و انتگرال

"Mathematica" علاوه بر توانایی کار بر روی اعداد، توان کار روی عبارات جبری را نیز داراست. مثال روبرو عبارت $9\,(2+x)\,(x+y) + (x+y)^2$ را تعریف می‌کند.

```
In [1] : = 9 (2+x) (x + y) + (x + y) ^2
Out[1] = 9 (2 + x) (x + y) + (x + y)^2
```

تابع "Expand" عبارت قبلی را که با علامت % مشخص شده است به توان ۳ می‌رساند و حاصل عمل را بسط می‌دهد. نتیجه قدری پیچیده است.

```
In [2] ^ = Expand [%^3]
Out [2] = 5832 x^3 + 9720 x^4 + 5400 x^5 + 1000 x^6 +
17496 x^2y + 30132 x^3y + 17280 x^4y + 3300 x^5y +
17496 xy^2 + 32076 x^2y^2+ 19494 x^3y^2 + 3930 x^4y^2 +
5832 y^3 + 12636 xy^3 + 8802 x^2y^3 + 1991 x^3y^3 + 972 y^4
+ 1242 xy^4 + 393 x^2y^4 + 54 y^5 + 33 xy^5 + y^6
```

فاکتورگیری از این عبارت نتیجه‌ای بسیار ساده‌تر به دست می‌دهد.

```
In [3] : = Factor [%]
Out [3] = (x + y)^3 (18 + 10 x + y)^3
```

"Mathematica" همانند عملیات جبری توانایی انجام عملیات حساب دیفرانسیل و انتگرال را نیز داراست. به عنوان مثال $\int x^2 \sin(x)^2 dx$ در "Mathematica" توسط تابع روبرو به دست می‌آید.

```
In [4] : = Integrate [x^2 Sin [x]^2, x]
Out [4] = x^3/6 - x Cos [2 x]/4 + (1-2 x^2) Sin [2 x]/8
```

مشتق‌گیری از نتیجهٔ عبارت قبل، تابع زیر انتگرال را با شکلی متفاوت ارائه می‌دهد.

```
In [5] : = D [%, x]
Out [5] = x^2/2 - Cos [2 x]/4 + (1-2 x^2) Cos [2 x]/4
```

تابع "Simplify" در "Mathematica" از اتحادهای جبری و مثلثاتی برای ساده کردن عبارات استفاده می‌کند. در این جا عبارت Simplify[%] همان فرم اولیه را که هنگام انتگرال‌گیری به کار برده بودیم به دست می‌آورد.

```
In [6] : = Simplify [%]
Out [6] = x^2 Sin [x]^2
```

عبارت روبرو بسط سری توانی نتیجهٔ قبلی را حول نقطهٔ x=0 می‌یابد.

```
In [7] : = Series [%, {x, 0, 14}]
Out [7] = x^4 - x^6/3 + 2 x^8/45 - x^10/315 2 x^12/14175
- 2 x^14/467775 + O [x]^15
```

تابع "Series" روی توابع کاملاً نمادین نیز می‌تواند کار کند و بسط سری توانی آنها را به دست آورد (مانند نماد f به عنوان یک تابع).

```
In [8] : = Series [(f[x + h] - f [x - h]) / (2h), {h, 0, 6}]
Out [8] = f'[x] + f(3) [x] h^2/6 + f(5) [x] h^4/120 + f(7) [x] h^6/5040
+ O [h]^7
```

حل معادلات

در "Mathematica" عبارت روبرو معادلهٔ جبری $x^3 - 7x^2 + 3ax = 0$ را مشخص می‌سازد.

```
In [1] : = x^3 - 7 x^2 + 3 a x == 0
Out [1] = 3 a x - 7 x^2 + x^3 == 0
```

عبارت روبرو معادلهٔ خط قبل را که در اینجا با علامت % مشخص شده است حل می‌کند و جواب را بر حسب پارامتر a به دست می‌دهد.

```
In [2] : = Solve [%, x]
```

Out [2] = {{x -> 0}, {x -> $\frac{7 + \text{Sqrt}[49 - 12\ a]}{2}$ },
{x -> $\frac{7-\text{Sqrt}[49-12\ a]}{2}$}}

عبارت روبرو جواب یک مجموعه ساده از دستگاه معادلات را به دست می‌آورد.

In [3] : = Solve [{a x + b y == 0, x + y == c},
{x, y}]

Out [3] = {{x - > - ($\frac{b\ c}{a - b}$), y -> $\frac{a\ c}{a - b}$}}

تابع "NSolve" در عبارت روبرو ۵ جواب مختلط از معادلهٔ جبری درجهٔ ۵ داده شده را به صورت عددی به دست می‌آورد.

In [4] : = NSolve [x^5 + 2 x + 1 == 0, x]
Out [4] = {{x - > -0.701874 - 0.879697 I}, {x ->
-0.701874 + 0.879697 I}, {x -> -0.486389}, {x ->
0.945068 - 0.854518 I}, {x -> 0.945068 + 0.854518 I}}

تابع "Find Root" به ما امکان حل عددی معادلات غیر جبری را می‌دهد.

عبارت روبرو جواب یک جفت معادله غیرجبری داده شده را در نزدیکی x=1 , y=0 می‌دهد.

In [5] : = FindRoot [{Sin[x] == x - y, cos [y] ==
x + y}, {x, 1}, {y, 0}]
Out [5] = {x -> 0.883401, y -> 0.1105}

"Mathematica" معادلات دیفرانسیل را نیز می‌تواند حل کند.

عبارت روبرو جواب غیرگستردهٔ معادلهٔ دیفرانسیل $y''(x)-Ky(x)=1$ را به ما می‌دهد.

"NDSolve" جواب عددی معادلات دیفرانسیل را پیدا می‌کند. در عبارت روبرو جواب معادله بر حسب تابع y به دست می‌آید و حدود تغییرات x بین ۰ تا ۲۰ است.

In [6] : = DSolve [y''[x] - k y[x] == 1, y[x], x]

Out [6] = {{y[x] -> - ($\frac{1}{k}$) + $\frac{C\ [1]}{E^{\text{Sqrt}\ [k]\ x}}$
+ $E^{\text{Sqrt}[k]\ x}$ C [2]}}

In[7] : = NDSolve [{y'' [x] + Sin [x] ^2 y'[x] + y [x]
== Cos [x] ^2, y[0] == 1, y'[0] == 0}, y, {x, 0, 20}]
Out [7] = {{y -> InterpolatingFunction [{0., 20.},
<>]}}

عبارت روبرو جواب به دست آمده توسط "NDSolve" را به عنوان ورودی دستور "Plot" گرفته و آن را به عنوان تابعی از x رسم می‌کند. جواب به صورت یک تابع «درون‌یاب» داده شده است که مقادیر به دست آمدهٔ y(x) را به ازای xهای داده شده مشخص می‌سازد.

In [8] : = Plot [Evaluate y[x] /. %], {x, 0, 20}]

آنچه که ذکر شد، گوشه‌ای از تواناییهای "Mathematica" است و تواناییهای گسترده‌تری نیز در آن نهفته است ولی با توجه به ویژگیهای این نرم‌افزار، باید چنین تصور کرد که هر دانش آموخته رشته‌های فنی و مهندسی و علمی باید با آن آشنایی داشته باشد و بتواند آن را به عنوان ابزاری به کار گیرد.