

تحلیل ارتجاعی-خمیری خاک‌های مسلح با استفاده از روش درونیابی نقطه‌یی

سیده محمد بینش (استادیار)

بخش مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه صنعتی شیراز

نادر هاتاف (استاد)

ارسلان قهرمانی (استاد)

پردیس دانشکده‌های مهندسی، بخش مهندسی راه و ساختمان، دانشگاه شیراز

مهندسی عمران شریف
دوری ۲ - ۲۶، شماره ۱، ص. ۶۳-۴۹

در این نوشتار روش تقویت شده درونیابی نقطه‌یی با توابع شعاعی^۱ (RPIM) برای تحلیل ارتجاعی-خمیری^۲ خاک‌های مسلح مورد استفاده قرار گرفته است. تقویت روش بوسیله کثیرالجهته‌یی‌ها باعث افزایش دقت حل و قدرت بازتولید^۳ روش می شود. در تحلیل حاضر خاک مسلح به سه قسمت مجزای خاک، مسلح کننده و لایه واسطه^۴ تفکیک شده و در هر قسمت میدان جابجایی بر اساس روش RPIM تشکیل شده است. سیستم نهایی معادلات از جایگذاری میدان جابجایی تولید شده در فرم ضعیف^۵ معادلات حاکمه بدست می آید. در این نوشتار رفتار خاک، مسلح کننده ها و لایه واسطه به صورت ارتجاعی - خمیری کامل در نظر گرفته شده است. همچنین با به کار بردن مفهوم المان رابط، امکان شبیه سازی لغزش در لایه واسطه فراهم شده است. بر اساس روابط بدست آمده، یک برنامه رایانه‌یی تهیه شده است و با حل چند مثال در انتهای نوشتار، عملکرد آن مورد بررسی قرار گرفته است.

binesh@sut.ech.ac.ir
nhataf@shirazu.ac.ir
ghahrama@shirazu.ac.ir

واژگان کلیدی: روش درونیابی نقطه‌یی، خاک مسلح.

مقدمه

از توابع اساسی^۷ و توابع وزن، برای تخمین موضعی بر روی نقاط، شاخه‌ی جدیدی از روش‌های بدون شبکه را به وجود آوردند. همچنین با معرفی روش تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک^۸ روش نایرولز با نام روش بدون المان گالریکین^۹ بهبود بخشیده شد.^[۲] پژوهشگران بسیاری روش‌های مختلف بدون شبکه را نظیر روش ابر محدود^{۱۰}،^[۵] روش ذره‌یی با هسته‌ی باز تولیدکننده^{۱۱}،^[۶] روش درونیابی نقطه‌یی^{۱۲}،^[۷] و... معرفی کرده‌اند. ویژگی اصلی این روش‌ها بی‌نیازی به شبکه به صورت مرسوم است. پژوهش‌های بسیاری در مورد کاربرد روش‌های بدون شبکه در حوزه‌های مختلف علمی انجام شده است که تعداد محدودی از آن‌ها با علوم مهندسی ژئوتکنیک مرتبط است. در این زمینه می‌توان به تحقیقاتی چند اشاره کرد. برخی با استفاده از روش بدون المان گالریکین به تحلیل دوبعدی مدل سنگ‌های درزه‌دار پرداخته‌اند.^[۸] برخی نیز روش ژانگ را با استفاده از روش پنالتی برای رفتار ارتجاعی-خمیری درزه‌ها گسترش داده‌اند.^[۹] همچنین در مطالعه‌های مختلف: از روش درونیابی نقطه‌یی برای مدل‌سازی فرایند تحکیم^[۱۱] از روش بدون شبکه در تحلیل نشست با سطح آزاد،^[۱۲] از روش نقطه‌ی مادی^{۱۳} در بررسی مسائل با تغییر فرم‌های بزرگ در مکانیک خاک،^[۱۳] و از روش درونیابی نقطه‌یی در تحلیل ارتجاعی خاک‌های مسلح استفاده شده است.^[۱۴]

استفاده از مصالح مسلح‌کننده نظیر ژئوسینتتیک‌ها برای بهبود مقاومت و پایداری سازه‌های ژئوتکنیکی در حال افزایش است. حال آنکه بررسی رفتار سازه‌های خاکی مسلح از طریق مطالعه‌های صحرایی و یا مدل‌سازی‌های آزمایشگاهی معمولاً فرایندی پرهزینه و زمان‌بر است. لذا اغلب از روش‌های تحلیل عددی برای پیش‌بینی خصوصیات بار-تغییر فرم سازه‌های خاکی مسلح استفاده می‌شود. یکی از متداول‌ترین روش‌های تحلیل عددی خاک‌های مسلح، روش المان محدود است. هر چند که روش المان محدود به صورت وسیعی استفاده می‌شود اما دارای نواقصی نظیر ناتوانی در مدل‌سازی دوبعدی مسلح‌کننده‌ها، نتیجه‌گیری نادرست در تغییر فرم‌های بزرگ و یا گسستگی تنش‌ها در مرز المان‌ها است. علت عمده‌ی این مشکلات در روش المان محدود استفاده از شبکه بندی برای انجام تحلیل است. بنابراین دسته‌ی دیگری از روش‌های تحلیل عددی که به شبکه بندی وابستگی ندارند، برای تحلیل خاک‌های مسلح مورد استفاده قرار گرفت. این دسته‌ی جدید از روش‌های عددی را کلاً روش‌های بدون شبکه می‌نامند.

روش‌های بدون شبکه اولین بار در سال ۱۹۷۷ با نام ذرات هیدرودینامیکی صاف^۶ برای بررسی پدیده‌های فضایی استفاده شد.^[۱] برخی از پژوهشگران این روش را برای حل مسائل مکانیک جامدات بسط دادند^[۳] و برخی نیز با استفاده

در این نوشتار سعی برگسترش تحلیل ارتجاعی-خمیری خاک‌های مسلح و شبیه‌سازی لغزش لایه‌ی واسطه^۴ است. در ادامه‌ی این نوشتار ابتدا روش درونیابی

تاریخ: دریافت ۲۳/۱۰/۱۳۸۶، داوری ۳۰/۳/۱۳۸۷، پذیرش ۵/۸/۱۳۸۷.

$$a = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}^T \quad (4)$$

$$P_Q = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & y_1 & x_1 y_1 & \dots & p_n(X_1) \\ 1 & x_2 & y_2 & x_2 y_2 & \dots & p_n(X_2) \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3 y_3 & \dots & p_n(X_3) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & y_n & x_n y_n & \dots & p_n(X_n) \end{bmatrix} \quad (5)$$

با فرض وارون‌پذیری ماتریس P_Q ، جواب‌های منحصر به فرد ماتریس a را می‌توان از رابطه‌ی ۶ به‌دست‌آورد:

$$a = P_Q^{-1} U_S \quad (6)$$

از جای‌گذاری معادله‌ی ۶ در معادله‌ی ۱ داریم:

$$u(X) = P^T(X) P_Q^{-1} U_S = \sum_{i=1}^n \phi_i u_i = \Phi^T(X) U_S \quad (7)$$

که $\Phi^T(X)$ بردار توابع شکل روش PIM است.

$$\Phi^T(X) = \{\phi_1(X), \phi_2(X), \dots, \phi_n(X)\} \quad (8)$$

توابع شکل به‌دست آمده دارای خاصیت دلتای کرانکر^{۱۷} هستند که باعث تسهیل اعمال شرایط مرزی اساسی^{۱۸} همانند روش المان است.

روش درون‌یابی نقطه‌ی با استفاده از توابع اساسی کثیرالجمله‌ی، روشی دقیق و ساده است. اما انتخاب نامناسب توابع اساسی و یا آرایش بد گره‌های موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقطه‌ی X باعث می‌شود که ماتریس P_Q منفرد^{۱۹} شود و محاسبه‌ی ماتریس P_Q^{-1} ممکن نباشد. برای رفع این مشکل پیشنهادهای متفاوتی ارائه شده است.^[۱۵] یکی از کارآمدترین راه‌حل‌ها استفاده از توابع اساسی شعاعی است. کاربرد این توابع وارون‌پذیری ماتریس P_Q را تضمین می‌کند.

انواع مختلفی از توابع شعاعی مانند توابع مولتی کوادراتیک^{۲۰}، توابع گوسین^{۲۱}، توابع لگاریتمی و... به‌عنوان توابع اساسی استفاده می‌شوند. در این نوشتار تابع مولتی کوادراتیک (رابطه‌ی ۹) استفاده شده است:

$$R_i(X) = [r_i + c]^q \quad (9)$$

r_i فاصله‌ی بین گره‌ی مورد نظر X و گره‌ی میدانی X_i است که از رابطه‌ی ۱۰ تعیین می‌شود:

$$r_i = [(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2]^{0.5} \quad (10)$$

پارامترهای c و q ثابت‌هایی هستند که براساس نوع مسئله‌ی مورد بررسی تعیین می‌شوند. در مسائل مکانیک جامدات، مقادیر ۱٫۴۲ و ۰٫۹۸ به ترتیب برای c و q پیشنهاد شده است.^[۱۵] در این نوشتار نیز از اعداد مذکور استفاده شده است.

برای ارضاء شرایط سازگاری^{۲۲} و افزایش قدرت بازتولید روش تخمین، علاوه‌بر توابع شعاعی از کثیرالجمله‌ی‌ها نیز استفاده می‌شود. از این رو می‌توان تابع پیوسته‌ی $u(X)$ را با استفاده از توابع اساسی شعاعی و کثیرالجمله‌ی به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ تخمین زد:

$$u(X) = \sum_{i=1}^n R_i(X) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(X) b_j = R^T(X) a + P^T(X) b \quad (11)$$

نقطه‌ی با توابع اساسی کثیرالجمله‌ی و شعاعی شرح داده می‌شود و نحوه‌ی تقویت توابع اساسی شعاعی با کثیرالجمله‌ها بیان می‌شود. سپس معادله‌های لازم برای حل مسئله‌های خاک‌های مسلح در حالت ارتجاعی -خمیری و اصول تغییرات محیط‌های گسسته مطرح شده است. سپس نحوه‌ی حل مسئله با جزئیات ارائه و در پایان با حل چند مثال صحت عملکرد نرم‌افزار تهیه‌شده بر اساس تئوری ذکرشده بررسی شده است.

روش درون‌یابی نقطه‌ی

در بسیاری از روش‌های عددی نظیر المان محدود، برای درون‌یابی از کثیرالجمله‌ها به‌منزله‌ی توابع اساسی برای تشکیل توابع شکل استفاده می‌شود. در روش المان محدود این درون‌یابی براساس المان‌هایی است که بدون هیچ‌گونه گسستگی و یا هم‌پوشانی در تماس با یکدیگر قرار گرفته‌اند. حال آنکه در روش درون‌یابی نقطه‌ی، درون‌یابی برای یک نقطه براساس دسته‌ی کوچکی از گره‌ها که در همسایگی آن نقطه قرار گرفته‌اند و اصطلاحاً در داخل دامنه‌ی تکیه‌گاهی محلی^{۱۵} نقطه‌ی موردنظر (شکل ۱) قرار می‌گیرند انجام می‌شود و این دامنه‌های تکیه‌گاهی می‌توانند با یکدیگر هم‌پوشانی نیز داشته باشند.

تابع پیوسته‌ی $u(X)$ (مثلاً تابع جابجایی) را درنظر می‌گیریم. این تابع را در محدوده‌ی نقطه‌ی X می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۱ تخمین زد:

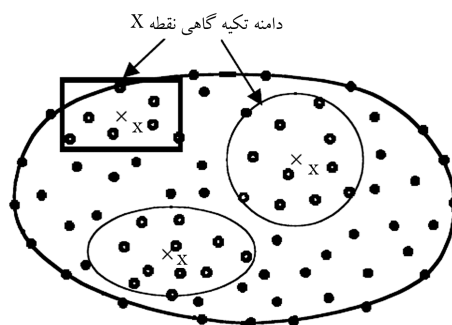
$$u(X) = \sum_{i=1}^n p_i(X) a_i = P^T a \quad (1)$$

که در آن، $p_i(X)$ تابع کثیرالجمله‌ی از متغیر فضایی $X = [x, y]^T$ ، n تعداد نقاط گره‌ی در دامنه‌ی تکیه‌گاهی X و a_i ضرایب هر تابع اساسی هستند و با اعمال جابجایی‌های گره‌ی بر تابع $u(X)$ در نقاط گره‌ی موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی می‌توان نوشت:

$$U_S = P_Q a \quad (2)$$

که U_S بردار جابجایی‌های گره‌ی، a بردار ضرایب مجهول و P_Q ماتریس گشتاور^{۱۶} کثیرالجمله‌ی است.

$$U_S = \{u_1, u_2, u_3, \dots, u_n\}^T \quad (3)$$



شکل ۱. دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقطه‌ی X .

لذا از معادله‌ی ۲۲ رابطه‌ی ۲۵ به دست می‌آید:

$$a_0 = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = G^{-1} \bar{U}_S \quad (25)$$

و از تلفیق معادله‌های ۱۱ و ۲۵ رابطه‌ی ۲۶ به دست می‌آید:

$$u(X) = \{R^T(X) \ P^T(X)\} G^{-1} \bar{U}_S = \bar{\Phi}^T(X) \bar{U}_S \quad (26)$$

که $\bar{\Phi}^T$ در رابطه‌ی ۲۶ از رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید:

$$\bar{\Phi}^T = \{\phi_1(X) \ \phi_2(X) \ \dots \ \phi_n(X) \ \phi_{n+1}(X) \ \dots \ \phi_{n+m}(X)\} \quad (27)$$

و می‌توان بردار توابع شکل را به صورت رابطه‌ی ۲۸ نوشت:

$$\Phi^T = \{\phi_1(X) \ \phi_2(X) \ \dots \ \phi_n(X)\} \quad (28)$$

تحلیل خاک مسلح

دو دیدگاه در مورد تحلیل عددی سازه‌های مسلح وجود دارد. دیدگاه اول توصیف ترکیبی ۲۳ محیط است که در آن سیستم مسلح شده به صورت ماده‌ی همگن و غیرهمسان ۲۴ معادل‌سازی می‌شود. در این حالت محیط ترکیبی خصوصیات اجزاء تشکیل‌دهنده و اندرکنش بین آن‌ها را انعکاس می‌دهد. دیدگاه دوم توصیف مجزای ۲۵ محیط است که در آن هر یک از اجزاء و اندرکنش بین آن‌ها به صورت جداگانه بررسی می‌شود. بدین ترتیب سیستم خاک مسلح به ۳ بخش مجزای خاک، مسلح‌کننده و لایه‌ی واسطه‌ی بین آنها تقسیم می‌شود. در این نوشتار از دیدگاه دوم برای توصیف محیط خاک مسلح استفاده شده است. در ادامه‌ی بحث ابتدا معادله‌های کلی برای مسائل صفحه‌ی با مقادیر مرزی برای ۳ قسمت مجزای خاک مسلح (خاک، مسلح‌کننده و لایه‌ی واسطه) بیان می‌شود، سپس اصول تغییراتی برای محیط‌های گسسته با استفاده از تابع پتانسیل مطرح می‌شود و سیستم مجزای معادله‌ها برای تحلیل خاک مسلح به دست می‌آید.

معادله‌های کلی برای مسائل صفحه‌ی

معادله‌های تعادل استاتیکی

برای محدوده‌ی Ω از یک جسم جامد، معادله‌ی تعادل استاتیکی به صورت رابطه‌ی ۲۹ می‌شود:

$$L^T \sigma + b = 0 \quad (29)$$

با در نظر گرفتن شرایط کرنش صفحه‌ی، تانسور تنش از رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید:

$$\sigma^T = \{\sigma_x \ \sigma_y \ \sigma_z \ \tau_{xy}\} \quad (30)$$

همچنین عمل‌گر L به صورت رابطه‌ی ۳۱ و بردار نیروی حجمی به صورت رابطه‌ی ۳۲ بیان می‌شود:

$$L^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} & 0 \end{bmatrix} \quad (31)$$

$$b^T = \{b_x \ b_y \ b_z\} \quad (32)$$

R_i و P_j به ترتیب توابع اساسی شعاعی و کثیرالجزئی از X ، n تعداد نقاط گره‌ی در دامنه‌ی تکیه‌گاهی محلی نقطه‌ی X ، m تعداد عبارت‌های کثیرالجزئی مورد استفاده به عنوان توابع اساسی و a_i و b_j به ترتیب ضرایب مرتبط با R_i و P_j هستند. رابطه‌های ۱۲ تا ۱۵ برای فرم‌برداری هستند:

$$R(X) = [R_1(X) \ R_2(X) \ R_3(X) \ \dots \ R_n(X)]^T \quad (12)$$

$$P(X) = [P_1(X) \ P_2(X) \ P_3(X) \ \dots \ P_m(X)]^T \quad (13)$$

$$a = [a_1 \ a_2 \ a_3 \ \dots \ a_n]^T \quad (14)$$

$$b = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_m]^T \quad (15)$$

برای تعیین مقادیر a_i و b_j نیاز به $m+n$ معادله است. معادله از طریق اعمال مقادیر گره‌ی بر تابع $u(X)$ به صورت رابطه‌ی ۱۶ تولید می‌شود:

$$u_k = u(x_k, y_k) = \sum_{i=1}^n R_i(x_k, y_k) a_i + \sum_{j=1}^m p_j(x_k, y_k) b_j \quad (16)$$

$$k = 1, 2, \dots, n$$

یا در فرم ماتریسی رابطه‌ی ۱۷ داریم:

$$U_S = RQ a + P_m b \quad (17)$$

$$RQ = \begin{bmatrix} R_1(r_1) & R_2(r_1) & \dots & R_n(r_1) \\ R_1(r_2) & R_2(r_2) & \dots & R_n(r_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R_1(r_n) & R_2(r_n) & \dots & R_n(r_n) \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (18)$$

$$P_m = \begin{bmatrix} p_1(x_1, y_1) & p_2(x_1, y_1) & \dots & p_m(x_1, y_1) \\ p_1(x_2, y_2) & p_2(x_2, y_2) & \dots & p_m(x_2, y_2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_1(x_n, y_n) & p_2(x_n, y_n) & \dots & p_m(x_n, y_n) \end{bmatrix}_{n \times m} \quad (19)$$

m معادله‌ی باقی‌مانده با اعمال شرایط یکتایی جواب از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید:

$$\sum_{i=1}^n p_j(x_i, y_i) a_i = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (20)$$

یا در فرم ماتریسی رابطه‌ی ۲۱ داریم:

$$P_m^T a = 0 \quad (21)$$

و از تلفیق معادله‌های ۱۷ و ۲۱ رابطه‌ی ۲۲ به دست می‌آید:

$$\bar{U}_S = \begin{Bmatrix} U_S \\ 0 \end{Bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} RQ & P_m \\ P_m^T & 0 \end{bmatrix}}_G \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} = G a_0 \quad (22)$$

در رابطه‌ی ۲۲ مقدار a_0 از \bar{U}_S و رابطه‌های ۲۳ و ۲۴ به دست می‌آید:

$$a_0 = \{a_1 \ a_2 \ \dots \ a_n \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_m\} \quad (23)$$

$$\bar{U}_S = \{u_1 \ u_2 \ \dots \ u_n \ 0 \ 0 \ \dots \ 0\} \quad (24)$$

لایه‌ی واسطه (h) نسبت به طول آن (L) بسیار ناچیز است، می‌توان کرنش در جهت n را ثابت فرض کرد و جابجایی نسبی نقطه‌ی P را براساس جابجایی نسبی نقاط A و B بر روی صفحات بالا و پایین تعریف کرد. بنابراین رابطه‌ی ۴۰ به‌دست می‌آید:

$$\delta = [\delta_s \ \delta_n]^T = \bar{U}_B - \bar{U}_A \quad (40)$$

که در آن، δ_s و δ_n به ترتیب جابجایی‌های نسبی عمودی و برشی در نقطه‌ی P ، \bar{U}_B و \bar{U}_A به ترتیب بردارهای جابجایی نقاط A و B در مختصات محلی $n-s$ هستند. با استفاده از ماتریس انتقال مختصات C می‌توان بردارهای جابجایی را در مختصات کلی به‌صورت رابطه‌ی ۴۱ تعریف کرد:

$$U = C\bar{U} \quad (41)$$

از طرف دیگر می‌توان جابجایی هر یک از نقاط A و B را به جابجایی‌های نقاط موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی آنها مرتبط ساخت (شکل ۲). همان‌طورکه مشاهده می‌شود دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقاط A و B در محل لایه‌ی واسطه قطع شده‌اند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$\begin{aligned} \bar{U}_A &= \Phi_A \bar{u}_{gA} \\ \bar{U}_B &= \Phi_B \bar{u}_{gB} \end{aligned} \quad (42)$$

در رابطه‌ی ۴۲، Φ_A و Φ_B به ترتیب ماتریس‌های توابع شکل برای نقاط موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقاط A و B هستند که از روش RBPIM به‌دست می‌آیند و \bar{u}_{gA} و \bar{u}_{gB} به ترتیب بردارهای جابجایی گره‌ها در دامنه‌ی تکیه‌گاهی نقاط A و B هستند. با در نظر گرفتن رابطه‌های ۴۰ تا ۴۲ می‌توان رابطه‌ی ۴۳ را نوشت:

$$\delta = B_i U_i \quad (43)$$

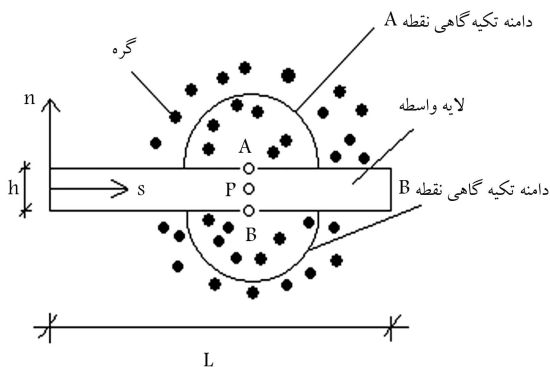
و B_i و U_i در آن به ترتیب از رابطه‌های ۴۴ و ۴۵ به‌دست می‌آیند:

$$B_i = [-C\Phi_A \ C\Phi_B] \quad (44)$$

$$U_i^T = [\bar{u}_{gA}^T \ \bar{u}_{gB}^T] \quad (45)$$

حال می‌توان تانسور کرنش در لایه‌ی واسطه را به‌صورت رابطه‌ی ۴۶ به‌گونه‌ی تعریف کرد که فقط دارای دو مؤلفه‌ی کرنش برشی (γ_{ns}) و کرنش عمودی (ε_n) است:

$$\varepsilon_i = \{\gamma_{ns} \ \varepsilon_n\} \quad (46)$$



شکل ۲. مدل‌سازی لایه‌ی واسطه.

این تذکر لازم است که با وجود شرایط کرنش صفحه‌ی، مؤلفه‌ی عمود بر صفحه‌ی $x-y$ نیز برای استفاده در رابطه‌های تحلیل خمیری، در تانسور تنش در نظر گرفته شده است.

رابطه‌های کرنش-جابجایی خاک و مسلح‌کننده‌ها

با توجه به اینکه در روش بدون شبکه هیچ‌گونه وابستگی بین توابع شکل و شبکه‌بندی وجود ندارد، می‌توان برخلاف برنامه‌های المان محدود، مسلح‌کننده‌ها را به‌صورت دوبعدی شبیه‌سازی کرد؛ لذا در هر نقطه‌ی دلخواه از محیط‌های خاک یا مسلح‌کننده، رابطه‌ی کرنش-جابجایی به‌صورت رابطه‌ی ۳۳ است:

$$\varepsilon = \Delta^T u \quad (33)$$

که برای هماهنگی با تانسور تنش، تانسور کرنش به‌صورت رابطه‌ی ۳۴، عملگر Δ نیز با رابطه‌ی ۳۵ و جابجایی u با رابطه‌ی ۳۶ تعریف می‌شود:

$$\varepsilon^T = \{\varepsilon_x \ \varepsilon_y \ \varepsilon_z \ \gamma_{xy}\} \quad (34)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (35)$$

$$u^T = \{u \ v\} \quad (36)$$

با استفاده از رابطه‌های ۷ و ۳۳ می‌توان رابطه‌ی ماتریسی کرنش-جابجایی را در هر دامنه‌ی تکیه‌گاهی به‌صورت رابطه‌ی ۳۷ ارائه داد:

$$\varepsilon = B U_S \quad (37)$$

که در آن، U_S همان‌طورکه قبلاً اشاره شد بردار درجات آزادی گره‌های موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی است و ماتریس B با رابطه‌ی ۳۸ محاسبه می‌شود:

$$B = [\tilde{B}_{i1} \ \tilde{B}_{i2} \ \dots \ \tilde{B}_{ik} \ \dots \ \tilde{B}_{in}] \quad (38)$$

در رابطه‌ی ۳۸ از رابطه‌ی ۳۹ به‌دست می‌آید:

$$\tilde{B}_{ik} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial y} \\ 0 & \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial y} & 0 & \frac{\partial \phi_{ik}}{\partial x} \end{bmatrix}^T \quad (39)$$

و $\phi_{ik} = \phi_k(x_i)$ نشان‌دهنده‌ی مقدار تابع شکل گره‌ی k ام در گره‌ی i ام از دامنه‌ی تکیه‌گاهی است.

لایه‌ی واسطه

محدوده‌ی تماس بین دو ماده با جنس‌های متفاوت را لایه‌ی واسطه می‌گوییم. در این نوشتار برای شبیه‌سازی لایه‌ی واسطه از مفهوم المان‌های رابط^{۲۶} استفاده شده است. در این مدل‌سازی لایه‌ی واسطه به‌صورت دو صفحه‌ی موازی در نظر گرفته می‌شود که فاصله‌ی آنها از یکدیگر ناچیز است و فنرهایی مابین دو صفحه در مقابل حرکت‌های مماسی و عمودی آنها نسبت به هم مقاومت می‌کنند. سختی این فنرها در واحد سطح (ضرایب سختی) در جهت‌های عمودی^{۲۷} و برشی به ترتیب k_n و k_s نشان داده می‌شوند.

برای به‌دست آوردن رابطه‌ی کرنش-جابجایی در لایه‌ی واسطه، مطابق شکل ۲ نقطه‌ی P مانند P بین صفحات بالایی و پایینی در نظر گرفته می‌شود. از آنجا که عرض

سپس می‌توان رابطه‌ی ۴۶ را به صورت رابطه‌ی ۴۷ نوشت:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} \delta \quad (47)$$

و با توجه به معادله‌های ۴۳ و ۴۷ رابطه‌ی کرنش-جابجایی در لایه‌ی واسطه به صورت رابطه‌ی ۴۸ تعریف می‌شود:

$$\varepsilon_i = \frac{1}{h} B_i U_i \quad (48)$$

رابطه‌ی تنش-کرنش خاک و مسلح‌کننده‌ها

رابطه‌ی بین کرنش و تنش در حالت ارتجاعی را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۴۹ بیان داشت:

$$\sigma = D_e \varepsilon \quad (49)$$

که با توجه به نحوه‌ی تعریف تانسورهای تنش و کرنش و در نظر گرفتن شرایط کرنش صفحه‌یی داریم:

$$D_e = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix} \quad (50)$$

در رابطه‌ی ۵۰، مدول ارتجاعی و ضریب پواسون است. در تحلیل ارتجاعی - خمیری رابطه‌ی تنش-کرنش به صورت رابطه‌ی ۵۱ تعریف می‌شود:

$$d\sigma = D_{ep} d\varepsilon \quad (51)$$

همچنین Dep در رابطه‌ی ۵۱ از رابطه‌ی ۵۲ به دست می‌آید:

$$D_{ep} = D_e - \frac{D_e \left\{ \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right\} \left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D_e}{\left\{ \frac{\partial F}{\partial \sigma} \right\}^T D_e \left\{ \frac{\partial P}{\partial \sigma} \right\}} \quad (52)$$

در این رابطه، F و P به ترتیب توابع تسلیم و پتانسیل هستند. در این نوشتار برای خاک از الگوی خمیری کامل موهر-کولمب^{۲۸} استفاده شده و تابع تسلیم به صورت رابطه‌ی ۵۳ است:

$$F = \frac{1}{3} I_1 \sin \Theta + \sqrt{I_2} (\cos \theta - \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \Theta) - \xi \cos \Theta \quad (53)$$

در رابطه‌ی ۵۳، I_1 نامتغیر اول تنش، I_2 نامتغیر دوم تنش انحرافی، Θ زاویه‌ی اصطکاک داخلی، θ زاویه‌ی لود^{۲۹} و ξ چسبندگی محیط هستند. این تذکر لازم است که در حالت ناهمراه^{۳۰}، می‌توان با جایگزینی زاویه‌ی اصطکاک داخلی با زاویه‌ی اتساع (ψ) تابع پتانسیل P را به دست آورد.

در مورد مسلح‌کننده‌ها نیز با توجه به صادق بودن رابطه‌های ۵۱ و ۵۲ می‌توان از هر الگوی خمیری دلخواه استفاده کرد.

لایه‌ی واسطه

با توجه به نحوه‌ی تعریف تانسور کرنش در لایه‌ی واسطه، رابطه‌ی تنش-کرنش در رفتار ارتجاعی به صورت رابطه‌ی ۵۴ تعریف می‌شود:

$$\sigma_i = D_i (h \varepsilon_i) = D_i \delta \quad (54)$$

σ_i و D_i در رابطه‌ی ۵۴ عبارت‌اند از:

$$\sigma_i = \{ \tau \quad \sigma_n \}^T \quad (55)$$

$$D_i = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} \quad (56)$$

همچنین τ و σ_n در رابطه‌ی ۵۵ به ترتیب تنش برشی و عمودی در لایه‌ی واسطه هستند. در رفتار خمیری با در نظر گرفتن توابع تسلیم و پتانسیل موهر-کولمب (رابطه‌های ۵۷ و ۵۸):

$$F = \tau - \sigma_n \tan \Theta \quad (57)$$

$$P = \tau - \sigma_n \tan \psi \quad (58)$$

و با استفاده از رابطه‌ی ۵۱ می‌توان رابطه‌ی تنش-کرنش را به صورت رابطه‌ی ۵۹ تعریف کرد:

$$d\sigma_i = D_{epi} d\varepsilon_i \quad (59)$$

و نیز D_{epi} در رابطه‌ی ۵۹ به صورت رابطه‌ی ۶۰ تعریف می‌شود و sgn تابع علامت است.

$$D_{epi} = \frac{1}{k_s + k_n \tan \Theta \tan \psi} \begin{bmatrix} k_s \tan \Theta \tan \psi & k_s \tan \Theta \text{sgn}(\tau) \\ k_n \tan \psi \text{sgn}(\tau) & k_s k_n \end{bmatrix} \quad (60)$$

اصول تغییراتی برای محیط‌های گسسته

به طور کلی تابع انرژی کل پتانسیل برای محیط گسسته را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۶۱ بیان کرد:

$$\Pi = \Pi_e + \Pi_i + \Pi_f \quad (61)$$

Π_e و Π_i در رابطه‌ی ۶۱، به ترتیب انرژی کرنش ارتجاعی برای محیط جامد و لایه‌ی واسطه هستند و Π_f انرژی پتانسیل مربوط به نیروهای خارجی است. این توابع را می‌توان به صورت رابطه‌های ۶۲ تا ۶۴ تعریف کرد:

$$\Pi_e = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \varepsilon^T \sigma d\Omega \quad (62)$$

$$\Pi_i = \int_{\beta} \frac{1}{2} \varepsilon_i^T \sigma_i d\beta \quad (63)$$

$$\Pi_f = - \int_{\Gamma} U^T \bar{T} d\Gamma - \iint_{\Omega} U^T b d\Omega \quad (64)$$

در رابطه‌های ۶۲ تا ۶۴، β پارامتر طولی لایه‌ی واسطه، \bar{T} تنش سطحی با مقدار مشخص و Γ مرزی است که در طول آن تنش سطحی اعمال می‌شود.

فرم تغییراتی (فرم ضعیف شده) رابطه‌ی ۶۱ را با استفاده از رابطه‌های تنش-کرنش می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\delta \Pi = \iint_{\Omega} (\delta \varepsilon)^T D_e d\Omega + \int_{\beta} (\delta \varepsilon_i)^T D_i \varepsilon d\beta - \iint_{\Omega} (\delta U)^T b d\Omega - \int_{\Gamma} (\delta U)^T \bar{T} d\Gamma = 0 \quad (65)$$

با استفاده از رابطه‌های تنش-کرنش می‌توان از معادله‌ی ۶۵ به سیستم معادله‌های مجزا دست یافت. به این ترتیب معادله‌ی ۶۶ به دست می‌آید:

$$KU = F \quad (66)$$

مقدار K و F در معادله‌ی ۶۶ نیز به ترتیب از رابطه‌های ۶۷ و ۶۸ به دست می‌آیند:

$$K = \iint_{\Omega} B^T DB d\Omega + \int_{\beta} B_i^T D_i B_i d\beta \quad (67)$$

$$F = \iint_{\Omega} \Phi^T b d\Omega + \int_{\Gamma} \Phi^T \bar{T} d\Gamma \quad (68)$$

و با توجه به نحوه‌ی تعریف بردار b و شرایط کرنش صفحه‌یی، رابطه‌های ۶۹ و ۷۰ به دست می‌آیند:

$$\Phi = [\tilde{\Phi}_{i1} \tilde{\Phi}_{i2} \dots \tilde{\Phi}_{ik} \dots \tilde{\Phi}_{in}] \quad (69)$$

$$\tilde{\Phi}_{ik} = \begin{bmatrix} \phi_{ik} & 0 \\ 0 & \phi_{ik} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (70)$$

نحوه‌ی حل مسئله با برنامه‌ی رایانه‌یی

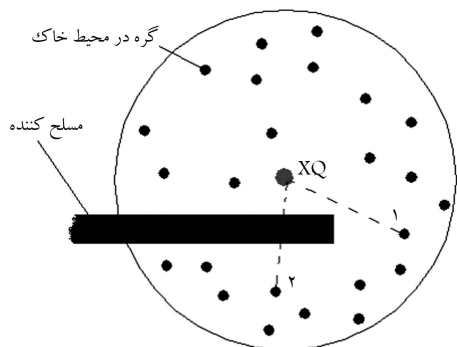
در روش بدون شبکه، هندسه‌ی مسئله با گره‌ها تعریف می‌شود. از این رو محیط خاک از طریق گره‌هایی با آرایش منظم یا نامنظم مدل‌سازی می‌شود. در بین گره‌های خاک، هر مسلح‌کننده با گره‌هایی که در امتداد دو خط موازی قرار گرفته‌اند تعریف می‌شود. فاصله‌ی این دو خط موازی برابر با ضخامت مسلح‌کننده است. خاک و مسلح‌کننده کاملاً جدا از هم هستند و ارتباط بین آنها توسط لایه‌ی واسطه ایجاد می‌شود. در لایه‌ی واسطه هیچ‌گونه گره‌یی تعریف نمی‌شود و همان‌طور که قبلاً اشاره شد، رابطه‌های مربوط به لایه‌ی واسطه براساس جابجایی نسبی گره‌های خاک و مسلح‌کننده تعریف می‌شوند.

پس از معرفی هندسه‌ی مسئله، برای هرکدام از اجزاء خاک مسلح (خاک، مسلح‌کننده، لایه‌ی واسطه) شبکه‌ی پس‌زمینه‌یی^{۳۲} برای محاسبه‌ی انتگرال‌های موجود در رابطه‌های ۶۷ و ۶۸ تشکیل می‌شود. این شبکه‌ها برای محیط خاک به صورت دویعدی است و برای مسلح‌کننده‌ها و لایه‌ی واسطه با توجه به ضخامت ناچیز آنها، شبکه‌های یک‌بعدی در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای محاسبه‌ی عبارت دوم در رابطه‌ی ۶۸ در طول مرزی که تنش خارجی اعمال می‌شود نیز یک شبکه‌ی یک‌بعدی تعریف می‌شود. این تذکر لازم است که برخلاف روش‌های شبکه‌یی، هیچ‌گونه ارتباطی بین شبکه‌ی پس‌زمینه و توابع شکل گره‌ها وجود ندارد و علت وجودی شبکه‌ی پس‌زمینه فقط انتگرال‌گیری عددی است. در این نوشتار از روش گاوس^{۳۳} برای انتگرال‌گیری عددی استفاده شده است. پس از معرفی نقاط گاوس، دامنه‌ی تکیه‌گاهی در اطراف هر نقطه در نظر گرفته می‌شود. دامنه‌ی تکیه‌گاهی می‌تواند اشکال مختلفی داشته باشد. در این نوشتار از دامنه‌های دایره‌یی شکل استفاده شده است. شعاع دامنه‌های تکیه‌گاهی بسته به فاصله‌ی گره‌ها در مسئله‌ی مورد نظر متغیر است. معمولاً تلاش می‌شود که دست‌کم ۵ گره داخل دامنه‌ی تکیه‌گاهی قرار گیرند. همچنین قرار گرفتن بیش از ۳۰ گره در دامنه‌ی تکیه‌گاهی معمولاً علاوه بر افزایش حجم محاسبات از دقت جواب‌ها می‌کاهد. نکته‌یی که در مورد تشکیل دامنه‌های تکیه‌گاهی مهم است شکل آن‌ها در محل گسستگی محیط (تقاطع خاک و مسلح‌کننده‌ها)

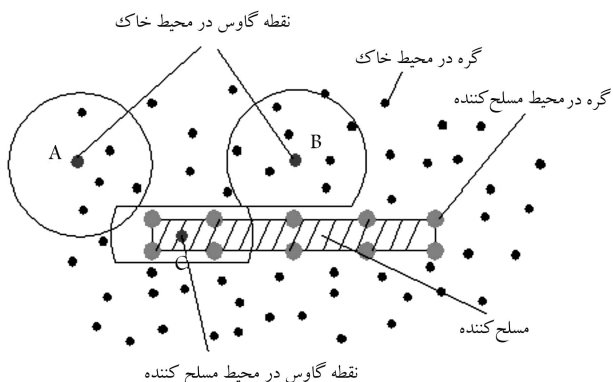
است. در این شرایط از ضابطه‌ی رؤیت^{۳۴} استفاده شده است. بر طبق این ضابطه، گره‌هایی در داخل یک دامنه‌ی تکیه‌گاهی منظور می‌شوند که اگر از مرکز آن دامنه به آن گره خطی وصل شود، خط مذکور محل گسستگی را قطع نکند. مثلاً در شکل ۳، نقطه‌ی ۱ جزء دامنه‌ی تکیه‌گاهی گره‌ی X محسوب می‌شود، حال آنکه نقطه‌ی ۳ جزء این دامنه‌ی تکیه‌گاهی محسوب نمی‌شود.

همچنین باید توجه داشت که دامنه‌های تکیه‌گاهی تشکیل شده به مرکزیت نقاط گاوس موجود در هر محیط، فقط گره‌های همان محیط را شامل می‌شوند، به عبارت دیگر مطابق شکل ۴ دامنه‌های تکیه‌گاهی در محیط خاک گره‌های مسلح‌کننده‌ها را شامل نمی‌شوند و برعکس. در این حالت شرایط همسانی^{۳۵} با لایه‌ی واسطه فراهم می‌شود.

پس از ایجاد دامنه‌های تکیه‌گاهی، توابع شکل با استفاده از روش RBPIM تشکیل می‌شوند و ماتریس‌های مورد نیاز برای محاسبه‌ی رابطه‌های ۷۱ و ۷۲ تعریف می‌شوند. پس از محاسبه‌ی انتگرال‌ها و جمع‌آوری در ماتریس کلی، معادله‌ی ۷۰ به دست می‌آید. از طریق حل این معادله، می‌توان جابجایی‌های مجهول را تعیین کرد و به تبع آن، در نقاط مختلف به مقادیر تنش و کرنش دست یافت. تا این مرحله محاسبات مربوط به رفتار ارتجاعی خاک مسلح به پایان رسیده است. در محاسبات مربوط به رفتار ارتجاعی -خمیری از روش اصلاح‌شده‌ی نیوتن رافسون^{۳۶} استفاده شده است. از این رو فقط ماتریس سختی ارتجاعی استفاده شده است. در این حالت اعمال نیروهای خارجی به صورت مرحله‌یی در آمده است و در هر مرحله با محاسبه‌ی نیروهای نامتوازن^{۳۷} بر اساس تفاضل نیروهای گره‌یی ناشی از تنش داخلی و خارجی، و با کمینه‌سازی آن‌ها با توجه به اصلاح تنش‌های داخلی، روند محاسبات به پیش می‌رود. این تذکر لازم است که برای گذشتن از هر مرحله به



شکل ۳. ضابطه‌ی رؤیت در تشخیص گره‌های موجود در دامنه‌ی تکیه‌گاهی.



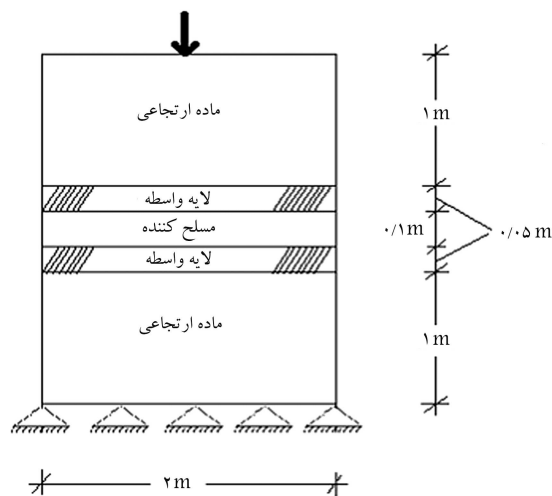
شکل ۴. نحوه‌ی قرارگیری گره‌ها در دامنه‌های تکیه‌گاهی مربوط به محیط‌های خاک و مسلح‌کننده.

تفاوت جواب‌ها با حل اولیه - برای گره‌های مشخص - به صورت زیر تعیین می‌شود:

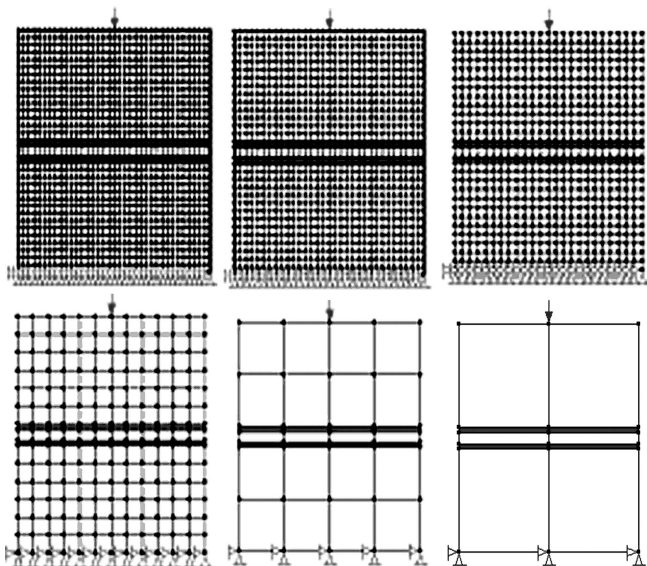
$$\eta = \left| \frac{\|U_{FEM}^P\| - \|U_{FEM}^F\|}{\|U_{FEM}^F\|} \right| \quad (72)$$

که در آن، U_{FEM}^P و U_{FEM}^F به ترتیب بردار جابجایی برای مرحله‌ی P تعداد المان و بردار جابجایی برای مرحله‌ی F با تعداد المان‌های تحلیل اولیه هستند. زمانی که مقدار η با افزایش تعداد المان‌ها ثابت باقی بماند، می‌توان جواب تحلیل را به عنوان جایگزین حل دقیق در نظر گرفت.

در این مثال، از نرم‌افزار SIGMAW [18] برای تحلیل عددی براساس روش المان محدود استفاده شده است تا با داشتن المان‌های لغزش، به راحتی بتوان لایه‌ی واسطه را مدل‌سازی کرد چراکه شباهت بسیار خوبی با مدل‌سازی در روش بدون شبکه دارد. البته این مورد فقط در تحلیل ارتجاعی کاربرد دارد. حل اولیه در این مثال با ۴ المان برای محیط، ۲ المان برای مسلح‌کننده و ۲ المان برای هر لایه‌ی واسطه (شکل ۶) آغاز شد. با افزایش تعداد المان‌ها و مقایسه‌ی جابجایی‌ها با مدل



شکل ۵. ستونی از محیط ارتجاعی گسسته تحت بار متمرکز.



شکل ۶. مدل‌های المان محدود که از راست به چپ با افزایش تعداد المان‌ها همراه است.

مرحله‌ی بعد از ضابطه‌ی ۷۱ استفاده شده است که در آن $\| \cdot \|$ معرف نرم اقلیدسی و f_{ext} نیروی گره‌ی ناموازن و f_{ext} نیروی گره‌ی خارجی هستند.

$$\frac{\|f_{unb}\|}{\|f_{ext}\|} < 0.001 \quad (71)$$

نکته‌ی که در تحلیل ارتجاعی - خمیری خاک‌های مسلح باید در نظر گرفت آن است که در برخی موارد مانند آزمایش بیرون‌کشیدن^{۳۸} یا در پایداری شیب‌های مسلح، امکان لغزش^{۳۹} یا جدایی^{۴۰} مسلح‌کننده‌ها نسبت به خاک اطرافشان وجود دارد. در این نوشتار از مفهوم المان رابط هرمن^{۴۱} [۱۶] برای مدل‌سازی این‌گونه پدیده‌ها استفاده شده است. بر طبق روش هرمن^۳ پاسخ متفاوت در رابطه با رفتار اندرکنشی بین خاک و مسلح‌کننده وجود دارد که آن‌ها را جدایی، لغزش و اتصال می‌نامیم. هنگامی که برای لایه‌ی واسطه هیچ‌گونه مقاومت کششی در نظر گرفته نشود، اگر جابجایی نسبی دو صفحه‌ی لایه‌ی واسطه برای دورشدن آن‌ها از هم باشد، جدایی رخ می‌دهد. در این حالت ضرایب سختی لایه‌ی واسطه در هر دو جهت برشی و عمودی (به ترتیب k_s و k_n) صفر در نظر گرفته می‌شود. زمانی که جابجایی نسبی صفحات لایه‌ی واسطه برای دورشدن از هم نباشند، باید تنش برشی در این لایه بررسی شود. اگر تنش برشی در هر نقطه از لایه‌ی واسطه (τ) به مقاومت برشی در آن نقطه (τ_{max}) که بر اساس معیار زوال تعریف می‌شود-رسیده باشد، آنگاه لغزش اتفاق می‌افتد و باید ضریب سختی برشی (k_s) را صفر منظور داشت. در این حالت پس از لغزش، لایه‌ی واسطه فقط می‌تواند تنش برشی مساوی با τ_{max} را انتقال دهد و تفاوت بین τ و τ_{max} باید بین گره‌های همسایه باز پخش شود. زمانی که هیچ‌یک از شرایط ذکر شده رخ ندهد، حالت اتصال است و تحلیل با استفاده از ضرایب سختی مشخص شده انجام می‌شود.

براساس مراحل مذکور، یک برنامه‌ی رایانه‌ی با استفاده از زبان برنامه نویسی MATLAB [۱۷] تهیه و مثال‌هایی که در ادامه می‌آیند با این برنامه تحلیل شده است.

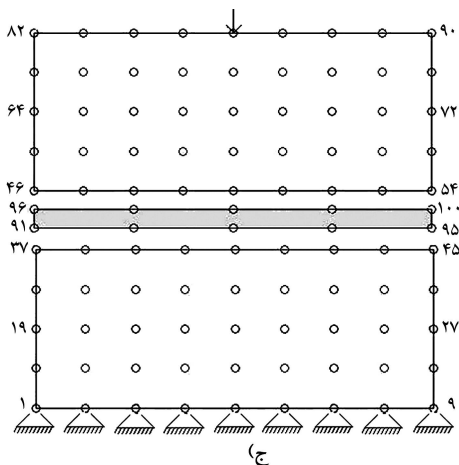
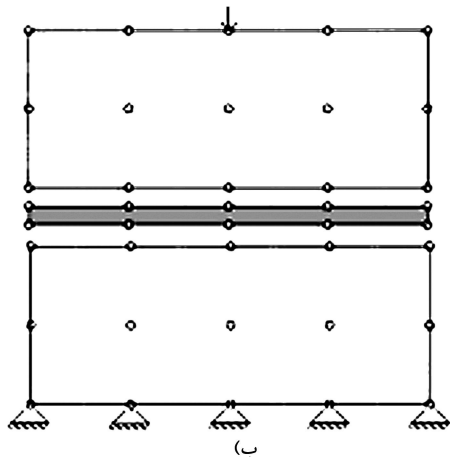
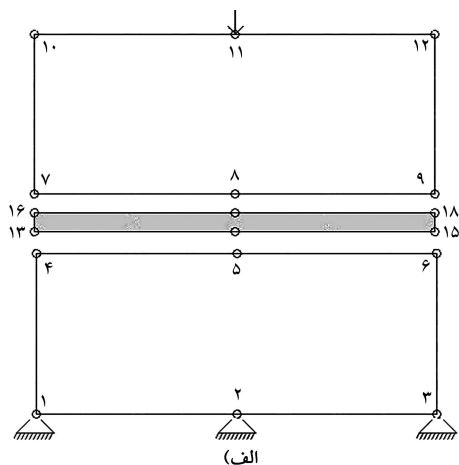
مطالعه‌ی عددی

در این قسمت با استفاده از برنامه‌ی رایانه‌ی MATLAB، ۳ مثال بررسی می‌شوند. با توجه به عدم مشاهده‌ی حل تحلیلی دقیق (بدون فرضیه‌های ساده‌شونده) برای محیط‌های گسسته، برای تأیید برنامه از نتایج برنامه‌ی المان محدود استفاده شده است. در این مثال‌ها فرض بر آن بوده است که با افزایش تعداد المان‌ها جواب مسئله به حل دقیق نزدیک‌تر می‌شود.

مثال ۱. محیط ارتجاعی گسسته تحت بار متمرکز

در این مثال ستونی از محیط مسلح در نظر گرفته شده که لایه‌ی مسلح‌کننده در وسط ارتفاع ستون قرار گرفته است. بار متمرکز ۵۰ kN در بالای ستون وارد می‌شود. هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی در شکل ۵ نشان داده شده است. محیط، بدون وزن و کاملاً ارتجاعی با مدول ارتجاعی ۳۰ MPa و ضریب پواسون ۰/۳ فرض و مسلح‌کننده نیز کاملاً ارتجاعی و با مدول ارتجاعی ۶۰۰ MPa و ضریب پواسون ۰/۲۵ در نظر گرفته شده است. در بالا و پایین مسلح‌کننده دو لایه‌ی واسطه وجود دارند که رفتار این دو لایه مشابه هم است و دارای ضریب سختی برشی (k_s) و عمودی (k_n) به ترتیب برابر با 10^4 kN/m^2 و 10^6 kN/m^2 هستند.

با توجه به اینکه حل دقیق تحلیلی برای این مسئله وجود ندارد، از روش المان محدود برای حل آن استفاده شده است. به این ترتیب مرتباً با افزایش تعداد المان‌ها،



شکل ۸. مدل‌های بدون شبکه که با افزایش تعداد گره‌ها همراه است.

و بیشینه‌ی خطای کلی حدود ۱۱٪ است. نتایج این مثال نشان‌دهنده‌ی عملکرد مناسب روش بدون شبکه در محیط‌های گسسته‌ی ارتجاعی است.

مثال ۲. آزمایش بیرون‌کشیدن مسلح‌کننده

هدف از این مثال بررسی رفتار ارتجاعی-خمیری لایه‌ی واسطه براساس مفهوم المان رابط هرمن در روش بدون شبکه است. در این مثال آزمایش دو بُعدی بیرون‌کشیدن مسلح‌کننده شبیه‌سازی شده است. این مسئله برای بررسی صحت مدل‌سازی لایه‌ی

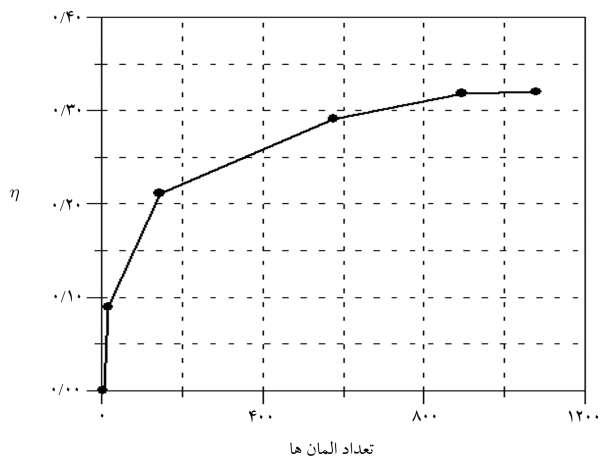
اولیه در هر مورد مقدار η به دست آمد. در شکل ۷، مقدار η در مقابل تعداد المان‌ها ترسیم شده است. با توجه به این شکل می‌توان مدل المان محدود را با ۹۹۲ المان (۸۹۶ المان برای محیط، ۳۲ المان برای مسلح‌کننده و نیز هر لایه‌ی واسطه) به منزله‌ی جایگزین حل دقیق در نظر گرفت.

پس از به دست آوردن جوابی به منزله‌ی جایگزین حل دقیق، باید هم‌گرایی حل مسئله برای روش بدون شبکه بررسی شود. لذا مطابق شکل ۸، سه مدل بدون شبکه در نظر گرفته می‌شود. در مدل اول فاصله‌ی بین گره‌ها ۱م فرض شده است و هندسه‌ی مسئله با ۱۲ گره برای محیط و ۶ گره برای مسلح‌کننده (جمعاً ۱۸ گره) شبیه‌سازی می‌شود. سپس فاصله‌ی بین گره‌ها به ۰٫۵م و نهایتاً به ۰٫۲۵م تقلیل می‌یابد که به ترتیب ۴۰ و ۱۰۰ گره تولید می‌شوند. در همه‌ی مدل‌ها از شبکه‌ی پس‌زمینه‌ی ۴×۴ بلوکی که هر بلوک شامل ۱۶ نقطه‌ی گاوس است (شکل ۹) استفاده شده است. شعاع دامنه‌ی تکیه‌گاهی در مدل‌های مختلف متفاوت است. به این ترتیب که در مدل ۱۸ گره‌ی از شعاع تأثیر ۱٫۵م و در مدل‌های ۴۰ و ۱۰۰ گره‌ی به ترتیب از شعاع‌های ۱م و ۰٫۷م استفاده شده است. مقدار خطای نسبی جایجایی‌های روش بدون شبکه نسبت به حل المان محدود که اکنون جایگزین حل دقیق شده است از رابطه‌ی ۷۳ تعیین می‌شود:

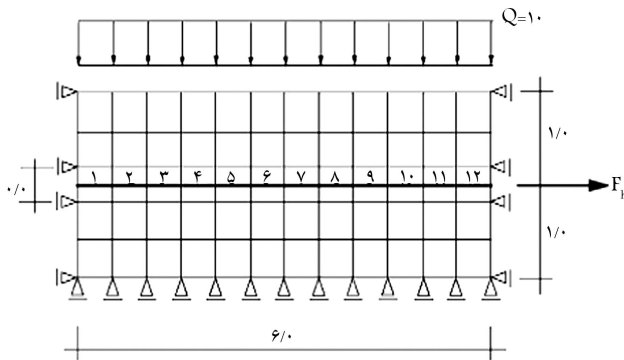
$$e_d = \frac{\sum_{i=1}^N |u_i^{MFM} - u_i^{FEM}|}{\sum_{i=1}^N |u_i^{FEM}|} \quad (73)$$

در این رابطه، e_d خطای نسبی جایجایی‌ها، u_i^{MFM} جایجایی گره‌ی i ام در روش بدون شبکه، u_i^{FEM} جایجایی گره‌ی i ام در روش المان محدود و N تعداد گره‌های مورد بررسی است. در شکل ۱۰، نحوه‌ی تغییر خطای نسبی جایجایی‌ها نسبت به فاصله‌ی گره‌ها بر حسب الگوریتم مقادیر ترسیم شده است.

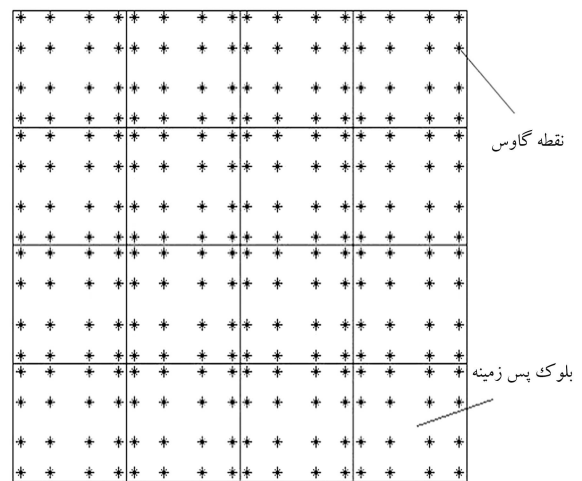
مشاهده می‌شود که با کم شدن فاصله‌ی گره‌ها خطای نسبی کاهش می‌یابد و این امر هم‌گرایی روش را تأیید می‌کند. در جدول ۱، نتایج مربوط به شماره‌ی گره‌های شکل (۸-الف) برای مدل ۹۰ گره‌ی و روش المان محدود نشان داده شده است. با توجه به تقارن مدل، نتایج فقط برای نیمی از گره‌ها ارائه شده است. در ستون آخر این جدول خطای کلی جواب‌های روش بدون شبکه نسبت به روش المان محدود نشان داده شده است. مشاهده می‌شود که جواب‌ها مطابقت بسیار خوبی دارند



شکل ۷. تغییرات پارامتر η با تعداد المان‌ها.



شکل ۱۱. مدل سازی دو بُعدی آزمایش بیرون کشیدن مسلح کننده. [۲۰]

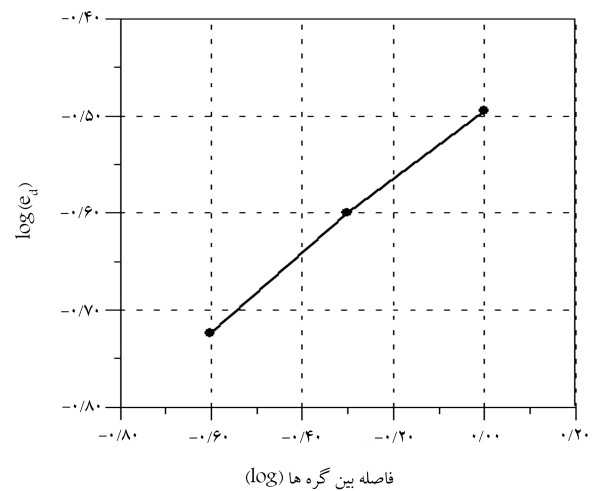


شکل ۹. شبکه‌ی پس زمینه برای انتگرال گیری.

واسطه استفاده شده است [۱۹] و نتایج به دست آمده از روش بدون شبکه با نتایج فوق مقایسه می شود.

همان طور که در شکل ۱۱ نشان داده شده است، مسئله با ۴۸ المان چهارضلعی برای محیط، ۱۲ المان خرابایی برای مسلح کننده و ۱۲ المان لایه‌ی واسطه با ضخامت صفر در هر طرف مسلح کننده شبیه سازی شده است. المان های بالایی لایه‌ی واسطه از ۱ تا ۱۲ شماره گذاری شده اند. رفتار لایه‌ی واسطه به صورت ارتجاعی - خمیری در نظر گرفته شده است که از معیار موهر کولمب با چسبندگی صفر و ضریب اصطکاک ۰/۵ نیروی می کند. ضریب های سختی برشی و نرمال در لایه‌ی واسطه به ترتیب 10^6 kN/m^2 و 10^4 kN/m^2 هستند.

با فرض شرایط کرنش صفحه‌یی، محیطی ارتجاعی با مدول ارتجاعی ۲ MPa و ضریب پواسون ۰/۲۵ اطراف مسلح کننده در نظر گرفته شده است. با توجه به اینکه هدف مقایسه‌ی عددی نتایج است، از وزن محیط صرف نظر شده است. مسلح کننده به صورت میله‌ی یک بُعدی با مدول ارتجاعی ۲۰ MPa و سطح مقطع 0.1 m^2 مدل سازی شده است. برای تحلیل رفتار لایه‌ی واسطه، بار گسترده‌ی یکنواخت 10 kN/m به صورت فشاری بر روی محیط اعمال می شود که طی تحلیل ثابت نگاه داشته می شود. در این بین بار افقی F_h به تدریج از مقدار صفر تا 60 kN



شکل ۱۰. تغییرات خطای نسبی جابجایی ها نسبت به فاصله‌ی گره ها.

جدول ۱. نتایج روش المان محدود با ۹۹۲ المان و روش بدون شبکه با ۹۰ گره.

خطای کلی. %	روش بدون شبکه		روش المان محدود		شماره‌ی گره
	جابجایی در جهت Y(mm)	جابجایی در جهت X(mm)	جابجایی در جهت Y(mm)	جابجایی در جهت X(mm)	
۷,۴۸۲۰۸۱	-۴,۷۸E-۰۱	-۱,۳۵E-۰۱	-۴,۹۱E-۰۱	-۱,۷۱E-۰۱	۴
۷,۷۲۶۱۶۵	-۸,۱۸E-۰۱	۰	-۸,۸۶E-۰۱	۰	۵
۱۰,۳۵۸۴۳	-۵,۶۵E-۰۱	-۴,۲۶E-۰۱	-۵,۲۶E-۰۱	-۴,۸۹E-۰۱	۷
۷,۳۳۵۷۸۸	-۸,۹۶E-۰۱	۰	-۹,۶۷E-۰۱	۰	۸
۲,۸۰۴۸۸۷	-۵,۳۴E-۰۱	۱,۸۴E-۰۱	-۵,۴۶E-۰۱	۱,۹۵E-۰۱	۱۰
۱۰,۹۵۸۹	-۴,۵۵	۰	-۵,۱۱	۰	۱۱
۱,۴۶۸۴۵۹	-۵,۱۳E-۰۱	-۶,۵۸E-۰۲	-۵,۰۶E-۰۱	-۶,۶۹E-۰۲	۱۳
۷,۳۷۴۷۰۲	۸,۵۴E-۰۱	۰	-۹,۲۲E-۰۱	۰	۱۴
۲,۵۴۲۲۶۲	-۵,۱۶E-۰۱	-۱,۹۷E-۰۲	-۵,۰۸E-۰۱	-۳,۰۲E-۰۲	۱۶
۷,۳۴۵۴۴۱	-۸,۶۱E-۰۱	۰	-۹,۲۹E-۰۱	۰	۱۷

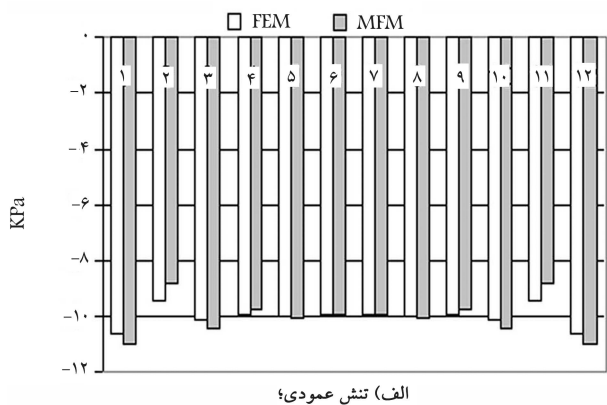
افزایش می یابد و در مقاطع مختلف توزیع تنش های برشی و عمودی در لایه ی واسطه بررسی می شود.

مدل سازی بدون شبکه ی محیط مطابق شکل ۱۲ الف، با ۷۸ گره برای محیط و ۲۶ گره برای مسلح کننده انجام شده است. هر لایه ی واسطه به ۱۲ زیر لایه با ضخامت $0.05m$ تقسیم شده است. با توجه به نتایج ارائه شده ی تحلیل در نوشتار [۱۹] که هر المان به صورت میانگین در مرکز المان ارائه شده است، لایه ی واسطه در روش بدون شبکه به ۱۲ زیر لایه $0.05m$ تقسیم و نتایج به صورت میانگین در هر زیر لایه ارائه شده است. برای انتگرال گیری مطابق شکل ۱۲ ب، شبکه یی 12×4 بلوکی با ۴ نقطه ی گاوس در هر بلوک در نظر گرفته شده است. شعاع دامنه ی تکیه گاهی $0.7m$ و خصوصیات مربوط به هندسه و مصالح مطابق روش المان محدود است.

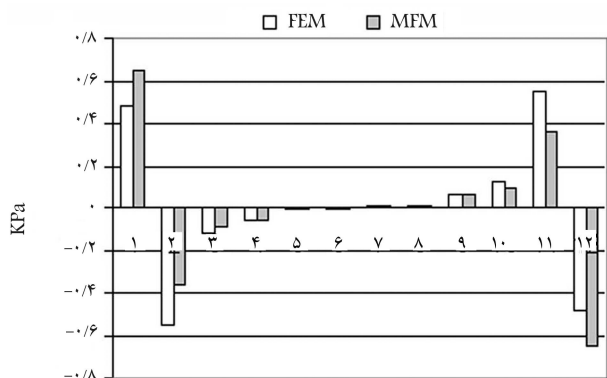
نحوه ی توزیع تنش های برشی و نرمال در لایه ی واسطه ی بالایی برای هر دو روش المان محدود و بدون شبکه در شکل های ۱۳ تا ۱۶ ارائه شده است که نشانگر مطابقت بسیار خوب بین مقادیر و نحوه ی توزیع تنش ها برای دو روش المان محدود و بدون شبکه هستند، و این امر صحت عملکرد برنامه را در مدل سازی رفتار ارتجاعی -خمیری لایه ی واسطه و نیز توانایی آن را در شبیه سازی لغزش در لایه ی واسطه تأیید می کند.

مثال ۳. اعمال بار توسط پی انعطاف پذیر بر روی خاک مسلح

در این مثال یک پی نواری انعطاف پذیر به عرض $2m$ فشاری یکنواخت را بر روی جعبه یی از خاک مسلح به ابعاد $10m \times 6m$ اعمال می کند. مطابق شکل ۱۷، سه

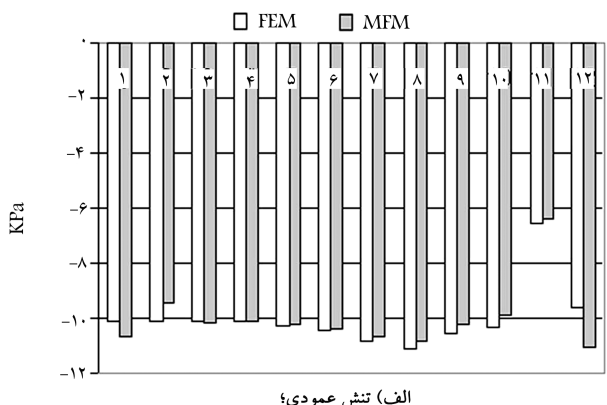


الف) تنش عمودی؛

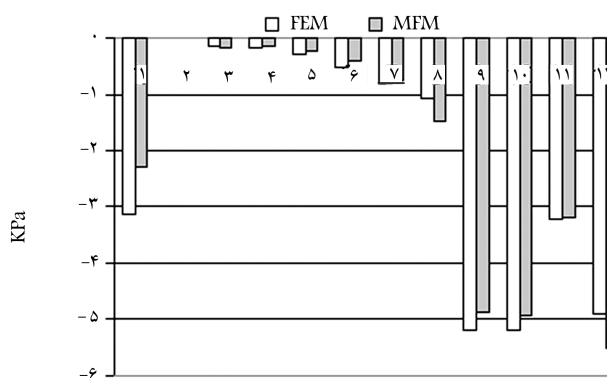


ب) تنش برشی.

شکل ۱۳. توزیع تنش برای $F_h = 0$.

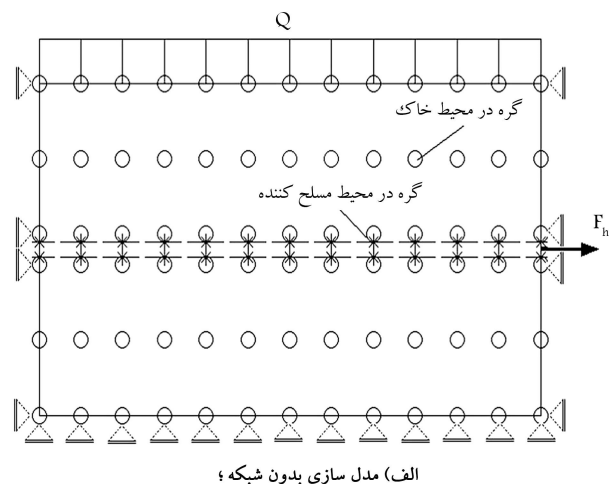


الف) تنش عمودی؛

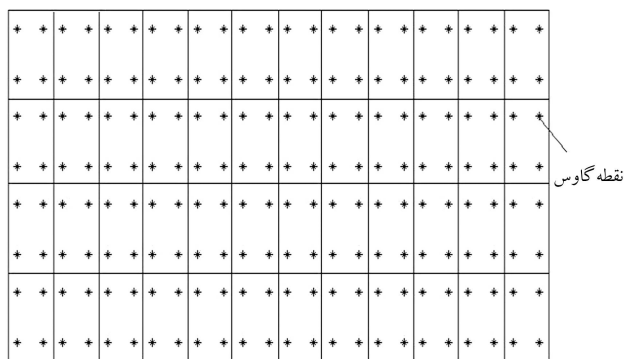


ب) تنش برشی.

شکل ۱۴. توزیع تنش برای $F_h = 25kN$.



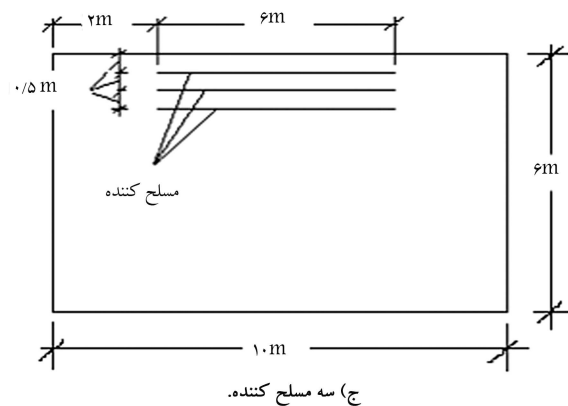
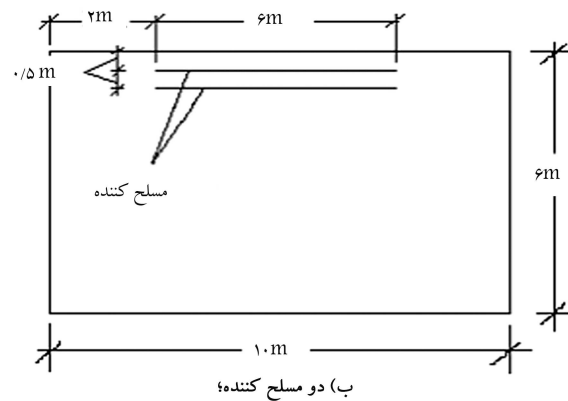
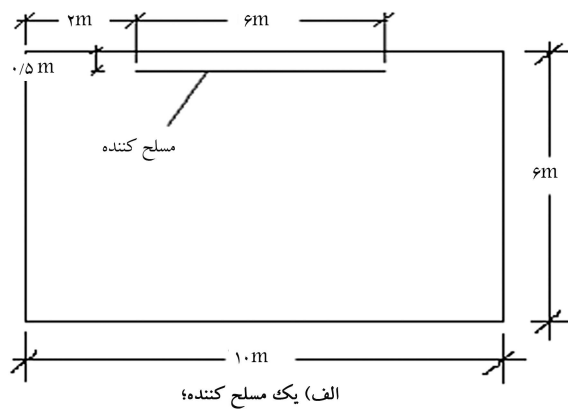
الف) مدل سازی بدون شبکه؛



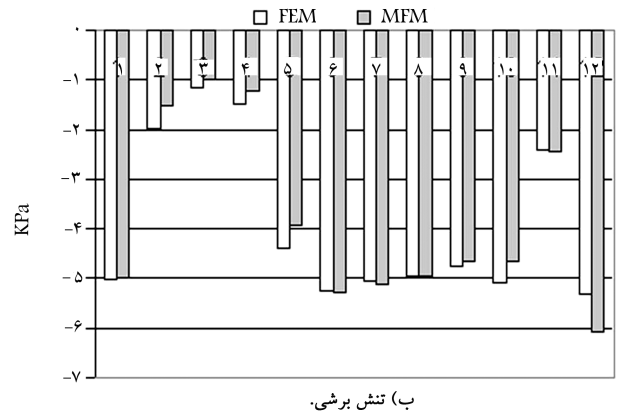
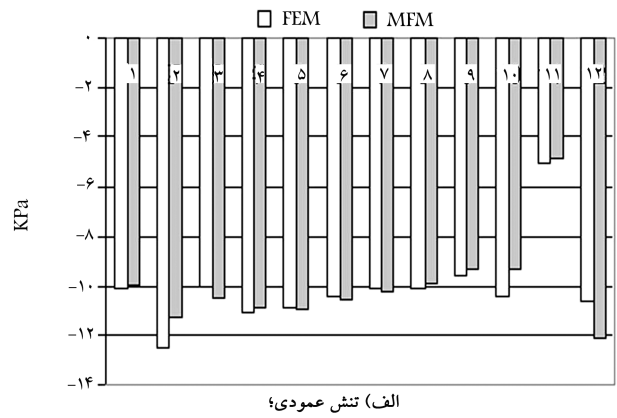
ب) شبکه ی پس زمینه برای انتگرال گیری.

شکل ۱۲. شمای کلی مدل سازی آزمایش بیرون کشیدن مسلح کننده.

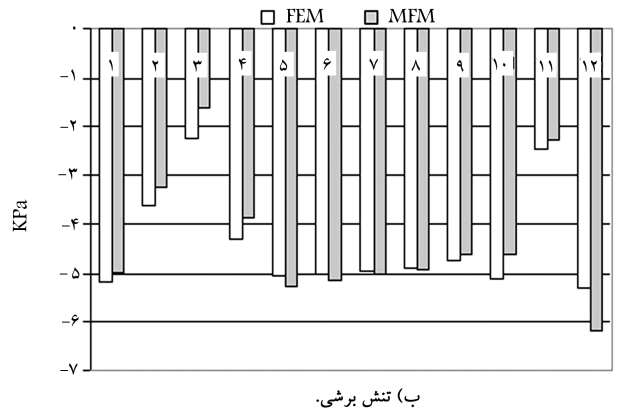
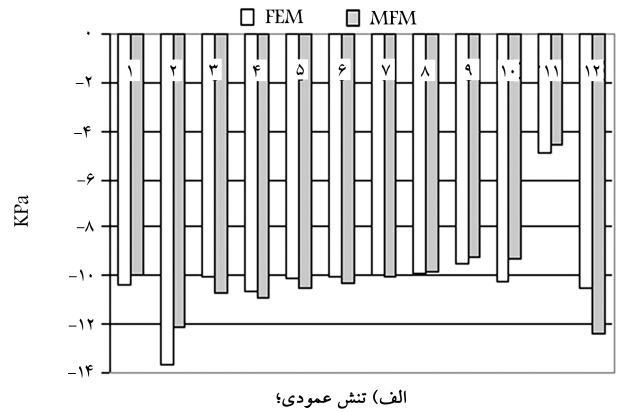
الگو برای نحوه‌ی آرایش مسلح‌کننده‌ها در نظر گرفته شده است. هدف آن است که منحنی بار-تغییر فرم در نقطه‌ی میانی در زیر پی برای دو روش المان محدود (که با افزایش تعداد المان‌ها به منزله‌ی جایگزین حل دقیق در نظر گرفته می‌شود) و روش بدون شبکه به دست آید و با یکدیگر مقایسه شوند. هندسه‌ی مسئله و نحوه‌ی قرارگیری مسلح‌کننده‌ها در شکل ۱۷ نشان داده شده است. خاک در برگیرنده‌ی مسلح‌کننده‌ها که ماده‌ی بی رفتار ارتجاعی -خمیری و بدون وزن در نظر گرفته شده است، از معیار زوال مور کولمب پیروی می‌کند. ویژگی‌های این خاک به شرح زیر است:
 مدول ارتجاعی 30 MPa ؛ ضریب پواسون 0.3 ؛ چسبندگی 20 kPa ؛ زاویه‌ی اصطکاک داخلی 25° و با فرض رفتار ناهمراه در حالت خمیری زاویه‌ی اتساع خاک 5° در نظر گرفته شده است.



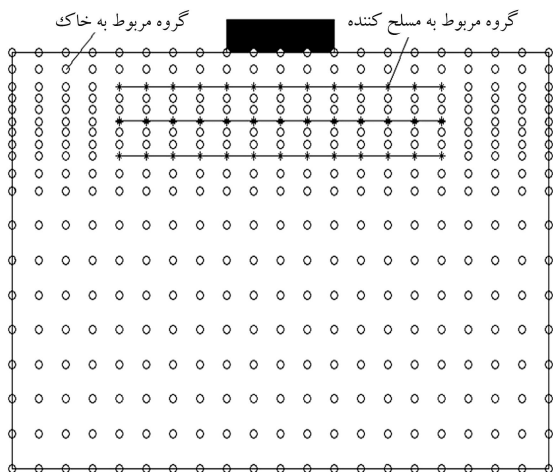
شکل ۱۷. الگوهای در نظر گرفته شده.



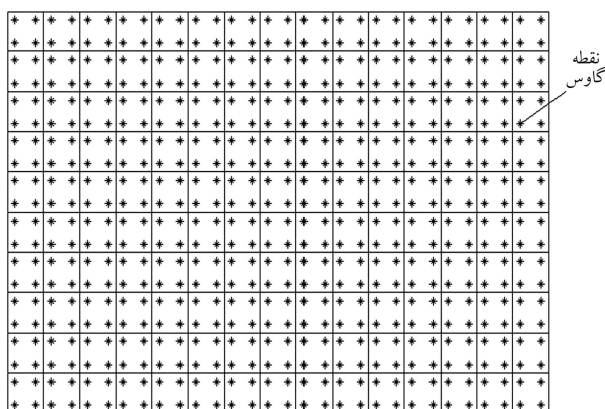
شکل ۱۵. توزیع تنش برای $F_h = 50 \text{ kN}$.



شکل ۱۶. توزیع تنش برای $F_h = 57.5 \text{ kN}$.



الف) مدل سازی روش بدون شبکه؛



ب) شبکه ی پس زمینه برای انتگرال گیری.

شکل ۱۸. شمای کلی مدل سازی پی روی خاک مسلح.

هستند. t_i ضخامت لایه‌ی واسطه است که ضخامت مجازی t_i نامیده می‌شود و به صورت خودکار با نرم افزار به گونه‌ی انتخاب می‌شود که سختی مناسبی به دست آید. با توجه به رابطه‌های ۵۴ تا ۵۶ و رابطه‌ی ۷۶ داریم:

$$D_i = \begin{bmatrix} k_s & 0 \\ 0 & k_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{G_i}{t_i} & 0 \\ 0 & \frac{E_{ode,i}}{t_i} \end{bmatrix} \quad (78)$$

بنابراین می‌توان با استفاده از ضخامت لایه‌ی واسطه، پارامترهای ارتجاعی خاک و نیز ضریب کاهشدهی، R_{inter} را با رابطه‌ی ۷۸ سختی‌های برشی و نرمال لایه‌ی واسطه در روش بدون شبکه تعیین کرد.

در شکل‌های ۱۹ و ۲۰ منحنی‌های بار-تغییرفرم که از روش‌های المان محدود (PLAXIS) و بدون شبکه به دست آمده‌اند، قرارگیری مسلح‌کننده‌ها برای ۳ الگوی مختلف نشان داده شده است. برای منحنی‌های نشان داده شده در شکل ۱۹ اتصال کامل مسلح‌کننده‌ها و خاک برقرار است ($R_{inter}=1$). در شکل ۲۰ منحنی‌ها برای شرایطی به دست آمده‌اند که پارامترهای مقاومت برشی در لایه‌ی واسطه ۰٫۷ مقدار پارامترهای متناظر در خاک هستند ($R_{inter}=0٫۷$). مقایسه‌ی این منحنی‌ها مطابقت بسیار خوبی را بین جواب‌های روش بدون شبکه و جایگزین حل دقیق نشان می‌دهد که عملکرد مناسب روش بدون شبکه را در حالت کلی با رفتار ارتجاعی-خمیری خاک نشان می‌دهد.

مسلح‌کننده‌ها به صورت مصالح ارتجاعی با مدول ارتجاعی 600 MPa و ضریب پواسون $0٫۳$ در نظر گرفته شده‌اند. ضخامت هر مسلح‌کننده نیز $0٫۱ \text{ m}$ است. بالا و پایین هر مسلح‌کننده لایه‌ی واسطه‌ی به ضخامت $0٫۰۵ \text{ m}$ قرار دارد.

برای مدل‌سازی با روش المان محدود از PLAXIS^[۲۰] که نرم‌افزاری قوی در مدل‌سازی‌های مربوط به مسائل ژئوتکنیکی است، استفاده شده است و در آن تولید شبکه به صورت خودکار انجام می‌شود و کاربر در هر مرحله فقط می‌تواند شبکه‌بندی را نسبت به مرحله‌ی قبل ریزتر کند، از این رو از نتایج ریزترین حالت شبکه‌بندی که نرم‌افزار قادر به انجام آن است به منزله‌ی جواب‌های جایگزین حل دقیق استفاده شده است. به این ترتیب برای الگوهایی با یک، دو و سه مسلح‌کننده به ترتیب از مدل‌های المان محدود با 2312 ، 2248 ، 2182 المان استفاده شده است. در نرم‌افزار PLAXIS مسلح‌کننده‌ها به صورت المان‌های یک‌بندی شبیه‌سازی می‌شوند که فقط قابلیت انتقال نیروی محوری را دارند. همچنین برای شبیه‌سازی لایه‌ی واسطه از روش ضریب کاهشدهی استفاده می‌شود. در این روش کاربر ضریب کاهشدهی (R_{inter}) را برای لایه‌ی واسطه تعیین می‌کند. مقدار R_{inter} کمتر یا مساوی ۱ است. با در نظر گرفتن معیار موهر-کولمب رابطه‌ی بین پارامترهای مقاومت برشی خاک و لایه‌ی واسطه با توجه به R_{inter} به صورت رابطه‌های ۷۴ و ۷۵ است:

$$\xi_i = R_{inter} \xi_{soil} \quad (74)$$

$$\tan(\Theta_i) = R_{inter} \tan(\Theta_{soil}) \leq \tan(\Theta_{soil}) \quad (75)$$

در این رابطه‌ها، ξ_i و ξ_{soil} به ترتیب چسبندگی در لایه‌ی واسطه و خاک و Θ_i و Θ_{soil} به ترتیب زاویه‌ی اصطکاک داخلی در لایه‌ی واسطه و خاک هستند. تحلیل‌ها در روش المان محدود برای دو مقدار متفاوت R_{inter} انجام شده است.

در روش بدون شبکه همان‌طور که در شکل ۱۸ الف، نشان داده شده است، از 360° گره با آرایش منظم برای مدل‌سازی محیط خاک استفاده شده است. هر یک از مسلح‌کننده‌ها نیز با 26 گره در راستای دو خط موازی (که فاصله‌ی خطوط برابر ضخامت مسلح‌کننده است) شبیه‌سازی شده‌اند. برای انتگرال‌گیری از شبکه‌ی 10×15 بلوکی استفاده شده است که هر بلوک ۴ نقطه‌ی گاوس دارد (شکل ۱۸ ب). شعاع دامنه‌ی تکیه‌گاهی نیز 1 m منظور شده است.

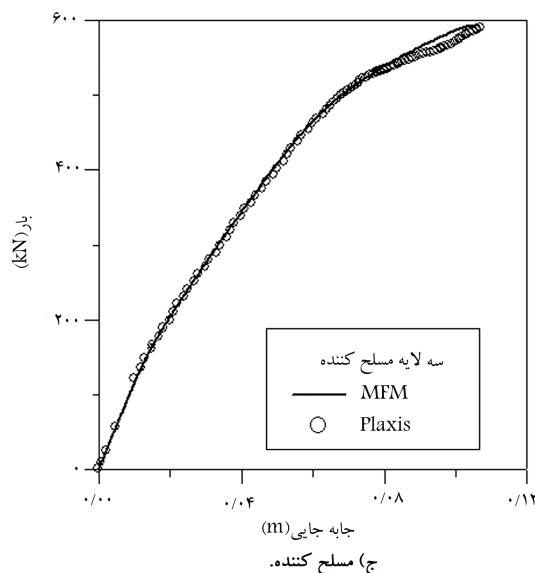
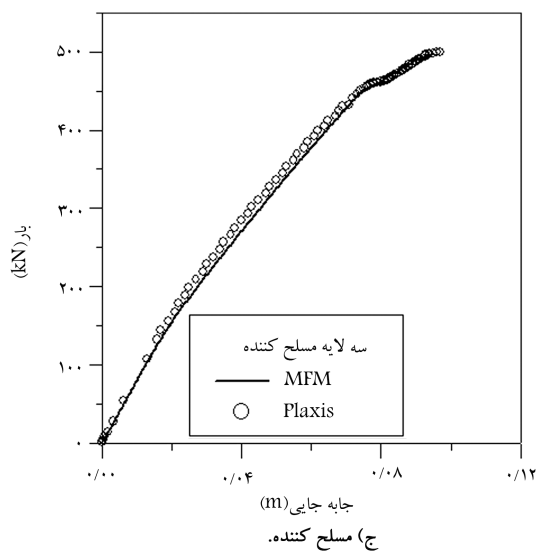
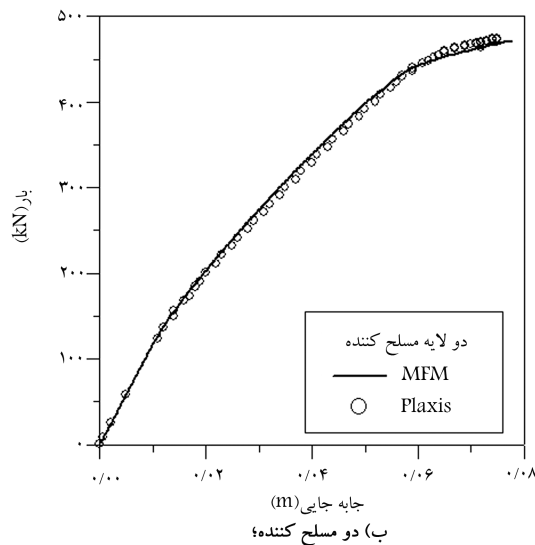
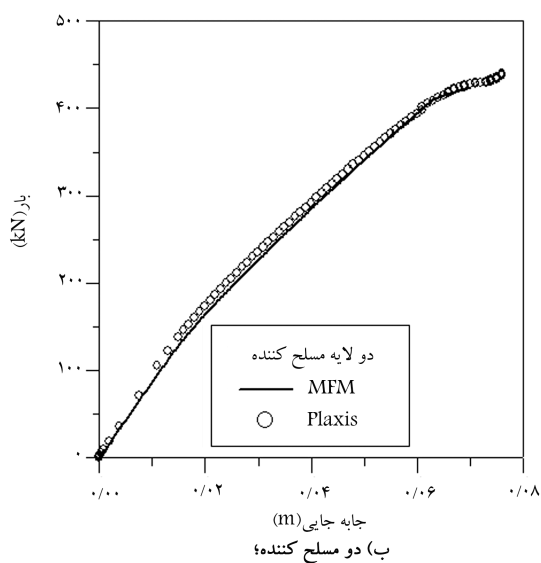
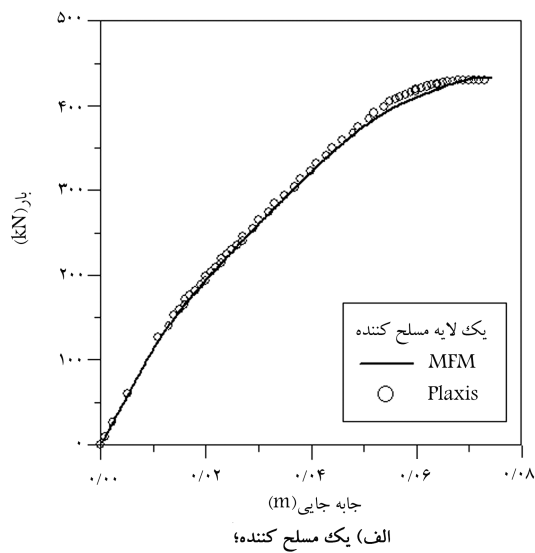
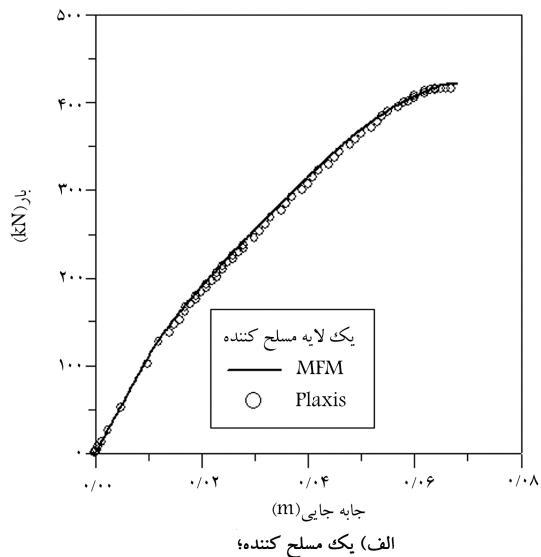
نکته‌ی مهم انتخاب ضرایب سختی لایه‌ی واسطه است به طوری که با مدل‌سازی نرم‌افزار PLAXIS همخوانی داشته باشد. برای این منظور لازم است تا رابطه‌ی مورد استفاده با نرم‌افزار PLAXIS برای محاسبه‌ی تنش‌ها و کرنش‌ها بررسی شود و آن‌ها را به نحوه‌ی مدل‌سازی روش مطرح شده در این نوشتار ربط داد تا بتوان ضرایب سختی لایه‌ی واسطه را تعیین کرد. در نرم‌افزار PLAXIS رابطه‌ی بین جابجایی‌های نسبی در لایه‌ی واسطه و تنش‌ها به صورت رابطه‌ی ۷۶ است:

$$\delta_s = \frac{\tau t_i}{G_i}, \quad \delta_n = \frac{\sigma t_i}{E_{ode,i}} \quad (76)$$

و G_i و $E_{ode,i}$ در رابطه‌ی ۷۶ از رابطه‌ی ۷۷ به دست می‌آیند:

$$E_{ode,i} = 2G_i \frac{1 - \nu_i}{1 - 2\nu_i}, \quad G_i = R_{inter}^2 G_{soil} \leq G_{soil}, \quad \nu_i = 0٫۴۵ \quad (77)$$

در رابطه‌های ۷۶ و ۷۷، δ_n و δ_s به ترتیب جابجایی نسبی در جهت عمود و مماس بر لایه‌ی واسطه و σ و τ به ترتیب تنش عمودی و تنش برشی در لایه‌ی واسطه



شکل ۲۰. منحنی بار-تغییر فرم در نقطه‌ی میانی زیر پی در روش‌های المان محدود و بدون شبکه با $R_{inter}=0.7$.

شکل ۱۹. منحنی بار-تغییر فرم در نقطه‌ی میانی زیر پی در روش‌های المان محدود و بدون شبکه با $R_{inter}=1$.

نتیجه‌گیری

در این نوشتار، روش بدون شبکه‌یی با عنوان درون‌یابی نقطه‌یی براساس توابع شعاعی، برای تحلیل ارتجاعی-خمیری خاک‌های مسلح استفاده شده است. در این روش ساخت توابع، شکل مستقلی از شبکه بندی است و فقط از شبکه بندی برای انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود. با توجه به مثال‌های حل شده مطابقت بسیار خوبی بین جواب‌های با روش مطرح شده در این نوشتار و نتایج حل‌های جایگزین با حل دقیق مشاهده شد، به طوری که با تعداد گره‌های نسبتاً کم، نتایج روش بدون شبکه، مطابقت بسیار خوبی با جواب‌های

روش المان محدود با تعداد المان‌های زیاد داشتند. این امر می‌تواند نکته‌ی مثبتی در استفاده از این روش‌ها برای تحلیل خاک‌های مسلح تلقی شود. با وجود این لازم است که سایر روش‌های بدون شبکه نیز برای تحلیل خاک‌های مسلح استفاده و نتایج عددی با تست‌های آزمایشگاهی مقایسه شوند. اما آنچه به نظر می‌رسد آن است که روش‌های بدون شبکه با توجه به نداشتن محدودیت‌ها در مورد قیود هندسی (نظیر ضخامت کم مسلح‌کننده‌ها) و توانایی مدل‌سازی دو بُعدی مسلح‌کننده‌ها (برخلاف روش‌های المان محدود که به صورت یک بُعدی شبیه‌سازی می‌کنند)، می‌توانند جواب‌های دقیق‌تری را به خصوص در رفتار ارتجاعی-خمیری مسلح‌کننده‌ها به دست دهند.

پانویس

1. radial basis point interpolation method
2. elasto-plastic
3. reproducibility
4. interface layer
5. weak form
6. smoothed particle hydrodynamics
7. basis functions
8. moving least square
9. element free galerkin
10. finite cloud
11. reproducing kernel particle method
12. point interpolation method
13. material point method
14. interface layer
15. local compact support domain
16. moment matrix
17. kronecker delta
18. essential boundary conditions
19. singular
20. multi quadratic
21. Gaussian
22. consistency
23. composite description
24. anisotropic
25. discrete description
26. linkage elements
27. normal
28. Mohr-Coulomb
29. Lode angle
30. non-associated
31. functional
32. background mesh
33. Gauss
34. visibility criterion
35. compatibility
36. modified newton-raphson method
37. unbalanced force
38. pull out test
39. slip

40. separation
41. herrmann linkage element
42. sub-interface
43. virtual thickness

منابع

1. Lucy, L.B., "A numerical approach to the testing of fission hypothesis", *The Astronomical Journal*, **82**(12), pp. 1013-1024 (1977).
2. Libersky, L.D., and Petschek, A.G., "Smoothed particle hydrodynamics with strength of materials", *Proceeding of The Next Free Lagrange Conference*, pp. 248-257 (1991).
3. Nayroles, B., Touzot, G., and Villon, p., "Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse elements", *Computational Mechanics*, **10**, pp.307-318 (1992).
4. Belytschko, T.; Lu, Y.Y., and Gu, L., "Element-free galerkin methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **37**, pp. 229-256 (1994).
5. Duarte, C., and Oden, J.T., "An hp adaptive method using clouds", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **139**, pp.237-262 (1996).
6. Liu, W.K.; Jun, S., and Zhang, Y.F., "Reproducing kernel particle methods", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **20**, pp.1081-1106 (1995).
7. Liu, G.R., and Gu, Y.T., "A point interpolation method for two-dimensional solids", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **50**, pp.937-951 (2001).
8. Zhang, X.; Lu, M., and Wegner, J.L., "A 2-D meshless model for jointed Rock structures", *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, **47**, pp.1649-1661 (2000).

۹. هاتاف، نادر؛ حاج عزیزی، محمد، و قهرمانی، ارسلان، «تحلیل مکانیکی توده‌های سنگی درزه دار با استفاده از روش بدون شبکه و با اعمال روش پناستی»، مجله علمی پژوهشی شریف، (۴۰) ص. ۳-۱۱، (زمستان ۱۳۸۶).
10. Wang, J.G.; Liu, G.R., and Wu, Y.G., "A point interpolation method for simulating dissipation process of consolidation", *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, **190**, pp.5907-5922 (2001).
 11. Wang, W.D.; Wang, J.G.; Wang, Z.L., and Nogami, T., "An unequal-order radial interpolation meshless method for biot's consolidation theory" *computers and geotechnics*, **34**, (2), pp.61-70, (2007).
 12. Guangxin, L.; Jinhong, G., and Yuxin, J., "Free surface seepage analysis based on the element-free method", *Mechanics Research Communications*, **30**, pp. 9-19 (2003).
 13. Wiczowski, Z., "The material point method in large strain engineering problems", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **193**, pp. 4417-4438 (2004).
 14. Binesh, S.M.; Hataf, N., and Ghahramani, A., "Elastic analysis of reinforced soil using point interpolation method", *Journal of Iranian Science and Technology*, **31**(B5), pp. 577-581 (2007).
 15. Liu, G.R., "Mesh free methods: Moving beyond the finite element method", Florida, *CRC Press*, **171** (2002).
 16. Herrmann, L.R., "Finite element analysis of contact problems", ASCE, *J. Eng. Mech. Div.*, **104**(5), pp. 1043-1057 (1978).
 17. MATLAB manual; *The MathWorks, Inc.* 24 Prime Park Way, Natick, MA 01760 (2002).
 18. SIGMAW manual; *User's guide, Geo-Slope International Ltd.* Calgary, Alberta, Canada (2000).
 19. Coutinho, A.; Martin, M.; Sydenstricker, R.; Alves, J., and Landau, L., "Simple zero thickness kinematically consistent interface elements", *Computers and Geotechnics*, **30**, pp.347-374 (2003).
 20. PLAXIS manual; "Finite element code for soil and rock analysis", *Rotterdam (Netherland) : A.A. Balkema* (1995).

