مهندسی عمران شریف
دوره‌ی ۲-۲۷، شماره‌ی ۲، ص. ۱۰۷-۱۱۵، (یادداشت فنی)

مدل عددی آب کم‌عمق برای شبیه‌سازی بالاروی امواج بلند

علی مهدوی (دانشجوی دکتری)
ناصر طالب‌بیدختی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه شیراز

در این مطالعه یک مدل حجم محدود برمبنای معادلات غیرخطی آب کم‌عمق برای بررسی انتشار و بالاروی امواج شکننده و غیرشکننده‌ی بلند توسعه یافته است. مدل حاضر از یک الگوی صریح مرکزی به‌همراه الگوی یکنوای بالادست برای قوانین پایستار (MUSCL) استفاده می‌کند. عبارت چشمه که در برگیرنده‌ی اثرات توپوگرافی بستر است با روش گرادیان سطح (SGM) وارد محاسبات می‌شود. همچنین برای مکان‌یابی خط ساحل، که مرز متحرک مسئله به‌شمار می‌رود، یک الگوریتم ویژه تعریف می‌شود. الگوی حاصله، دارای دقتی از مرتبه‌ی دو در مکان و زمان بوده و قادر است ناپیوستگی‌های به وجود آمده در عمق جریان بر اثر شکست موج را به‌طور مؤثر تسخیر کند. تمامی محاسبات توسط برنامه‌یی که به‌همین منظور در محیط فرترن ۹۰ نوشته شده، صورت می‌پذیرد. نیمرخ‌های شبیه‌سازی شده‌ی سطح آزاد و تاریخچه زمانی جابه‌جایی سطح آزاد، توافق رضایت‌بخشی با جواب تحلیلی موجود و نیز داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهند.

واژگان کلیدی: معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، بالاروی موج منفرد، روش حجم محدود، الگوی عددی مرکزی مرتبه اول (FORCE) ، تسخیر شوک، الگوی موزون.

mahdavi@shirazu.ac.ir
taleb@shirazu.ac.ir

۱. مقدمه

توانایی پیش‌بینی بالاروی امواج بلند درکاستن از خطرات ساحلی امواج سونامی نقشی حیاتی ایفا می‌کند. به‌منظور شبیه‌سازی خصلت‌های اساسی امواج مهیب سونامی، معمولاً امواج منفرد یا ترکیبی از امواج منفرد مثبت و منفی مورد استفاده قرار می‌گیرند. تاکنون معادلات غیرخطی آب کم‌عمق کاربرد گسترده‌یی در توصیف تکامل و بالاروی امواج منفرد روی سواحل شیب‌دار داشته‌اند. در واقع مدل‌های تحلیلی بالاروی تنها قادر به شبیه‌سازی حرکت امواج غیرشکننده روی بسترهایی با توپوگرافی‌های ساده هستند. محققینی نظیر کریر و گرینسپن (۱۹۵۸)، تاک و هوانگ (۱۹۷۲) و سینولاکیس (۱۹۸۶) با اعمال نگاشت بر معادلات غیر خطی آب کم‌عمق، دستگاهی از معادلات خطی به دست آوردند که به‌روش تحلیلی قابل حل بود.[۱-۳] به‌دلیل مشکلات ریاضی ناشی از پیچیدگی‌های حرکت سیال، ارائه‌ی رهیافتی کاملاً نظری درمورد شکست موج غیرممکن است. بنابراین حل عددی این مسئله همواره مورد توجه بسیاری از محققین قرار گرفته است. از آنجا که در مدل‌سازی عددی بالاروی موج، برخی از گره‌های محاسباتی قبل از رسیدن موج به آنها خشک هستند، تعیین طول ناحیه‌ی حل و به‌بیان دیگر، مکان‌یابی مرز متحرک خشک ـ تَر در هر گام زمانی مشکلی عمده محسوب می‌شود.

برای حل عددی معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، چهار روش اساسی وجود دارد: ۱. روش مشخصه‌ها؛ ۲. روش تفاضلات محدود؛ ۳. روش اجزای محدود؛ ۴. روش حجم محدود. روش مشخصه‌ها دارای این مزیت است که خطوط مشخصه معنای فیزیکی روشنی دارند. این روش برای اولین‌بار در سال ۱۹۷۹ به‌منظور بررسی بالاروی امواج به کار گرفته شد.[۴] پس از آن، در سال ۱۹۹۵، محققین به‌کمک روش تفاضلات محدود به حل شکل مشخصاتی معادلات غیرخطی آب کم‌عمق پرداختند و از آن برای مدل‌سازی انتشار و بالاروی امواج منفرد استفاده کردند. در مدل آنها خط متحرک ساحلی با افزودن و کم‌کردن نقاط محاسباتی مطابق با موقعیت خط ساحلی شبیه‌سازی شد.[۵] مدل عددی ارائه‌شده در سال ۱۹۹۱، بارزترین نمونه‌ی تحلیل اجزای محدود معادلات آب کم‌عمق به‌شمار می‌رود. در این مدل، شکست موج به‌وسیله‌ی یک عبارت لزجت مصنوعی در معادله‌ی بقای اندازه حرکت وارد شد. تعیین این عبارت مستلزم واسنجی مدل با داده‌های آزمایشگاهی بود.[۶]

در سال ۲۰۰۶ با استفاده از حل‌کننده‌ی دقیق ریمان[۱] یک مدل دوبعدی حجم محدود برای معادلات آب کم‌عمق ارائه‌شد و به‌کمک آن بالاروی موج منفرد شکننده مورد بررسی قرارگرفت.[۷] مدل‌های دو بعدی ارائه‌شده در سال‌های ۲۰۰۱ و ۲۰۰۷ که در توسعه‌ی آنها از حل‌کننده‌ی تقریبی ریمان از نوع شار متوسط وزن‌دار (WAF)[۲] استفاده شده، به‌خوبی قادر به شبیه‌سازی ویژگی‌های مختلف

تاریخ: دریافت ۱۳۸۷/۱۲/۱۰، اصلاحیه ۱۳۸۸/۱۰/۱۶، پذیرش ۱۳۸۹/۹/۲.

امواج بلند طی فرایند انتشار و بالاروی هستند. این دو مدل از روش تفکیک جهت‌مند[۳]، به‌منظور تبدیل معادلات دوبعدی آب کم‌عمق به دو معادله‌ی یک‌بعدی بهره برده‌اند.[۸و۹]

رخداد پدیده‌ی شکست موج که با شکل‌گیری جبهه‌ی قائم موج همراه است از نقطه‌نظر شبیه‌سازی عددی با مشکلاتی همراه است. یک مدل محاسباتی فقط هنگامی برای تحلیل امواج شکننده مناسب است که به‌خوبی قادر به شبیه‌سازی شوک ناشی از شکست موج بدون ایجاد نوسان عددی باشد. بیشتر الگوهای عددیِ دارای خاصیتِ تسخیر شوک[۴]، که تاکنون برای حل معادلات آب کم‌عمق در حالت پایستار پیشنهاد شده‌اند، برای حالت همگن معادلات طراحی شده‌اند. نمونه‌های زیادی از این الگوها در کتاب تورو (۲۰۰۱) گزارش شده است.[۱۰] باید توجه داشت که کاربرد معادلات آب کم‌عمق در حالت همگن تنها به مواردی نظیر انتشار موج شوک، موج اُشترک[۵] و موج شکست سد بر روی بستر افقی محدود است. یک روش مستقیم و در عین حال ساده برای حل معادلات غیرهمگن تفکیک آنها به دستگاهی از معادلات شامل یک معادله‌ی همگن و یک یا چند معادله‌ی دیفرانسیل معمولی است.[۱۰] این روش درمورد جریان‌های دائمی یا شبه‌دائمی نتایج نسبتاً ضعیفی به دست می‌دهد. تجربه‌ی نگارندگان نشان داد که با استفاده از این روش تفکیک در شبیه‌سازی یک مخزن آب ساکن با بستر ناهموار، یک سری اغتشاشات غیرفیزیکی در سطح آزاد به وجود می‌آید که با گذشت زمان بر روی سطح آب منتشر می‌شوند. چنین نقیصه‌یی به عدم ارضای ویژگی موسوم به خاصیت C نسبت داده می‌شود. این خاصیت، توازن عبارت چشمه و گرادیان شار عددی را در مسائل جریان دائم تضمین می‌کند. در سال ۲۰۰۸، محققین با بحث پیرامون اهمیت ارضای خاصیت C توسط مدل محاسباتی بالاروی موج بلند بیان داشتند که عدم توجه به خاصیت مذکور در توسعه‌ی یک مدل عددی ممکن است در برخی از موارد به ایجاد مجموعه‌یی از امواج غیر فیزیکی و صرفاً عددی منجر شود که دارای ارتفاعی به بزرگای ارتفاع موج اصلیِ مورد مطالعه‌اند.[۱۱] به‌عنوان نمونه، مدل بالاروی ارائه‌شده در سال ۲۰۰۰، که از روش تفکیک برای عبارت چشمه استفاده کرده است، موزون[۶] نیست.[۱۲]

در سال ۱۹۹۴ تمهیدی موثر برای گنجاندن عبارت چشمه در الگوی عددی رو[۷] ابداع شد.[۱۳] پس از آن در سال ۱۹۹۹ با بهینه‌سازی این روش، از آن برای حل مسائل مختلف شامل جریان‌های دائمی استفاده شد.[۱۴] با این حال روش این محققین بسیار پیچیده است.

این مطالعه به توسعه‌ی یک الگوی عددی حجم محدود برای معادلات غیرخطی آب کم‌عمق می‌پردازد که در آن عبارت چشمه با روش گرادیان سطح (SGM)[۸] در محاسبات گنجانیده شده و از الگوی بهینه‌ی مرتبه سه رانگ‌ـکوتا برای انتگرال‌گیری زمانی معادلات نیمه‌گسسته استفاده شده است. الگوی ارائه‌شده بدون نیاز به هیچ‌گونه عبارت اضافی ــ نظیر لزجت مصنوعی که تعیین آن معمولاً با سعی و خطا همراه است ــ دارای قابلیت تسخیر شوک است و می‌توان نشان داد که خاصیت C را ارضاء می‌کند و به بیان دیگر، موزون است. همچنین این مدل بدون هرگونه نیاز به واسنجی با داده‌های آزمایشگاهی، قادر به پیش‌بینی انتشار امواج بلند روی سطح شیب‌دار است.

۲. معادلات حاکم

همان‌طور که پیش‌تر اشاره شد، تاکنون محققین بسیاری برای بررسی فرایند انتشار و بالاروی امواج بلند از معادلات غیرخطی آب کم‌عمق استفاده کرده‌اند. شکل پایستار[۹] معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، که در واقع بیان‌گر قوانین بقای جرم و اندازه حرکت هستند، عبارت است از:

$$\frac{\partial U}{\partial t}+\frac{\partial F(U)}{\partial x}=S(U) \qquad (۱)$$

که در آن U بردار متغیرهای پایستار، $F(U)$ بردار شار عددی و $S(U)$ عبارت چشمه نامیده می‌شوند و چنین تعریف می‌شوند:

$$U=\begin{bmatrix} h \\ hu \end{bmatrix}, \qquad F(U)=\begin{bmatrix} hu \\ hu^{۲}+\frac{۱}{۲}gh^{۲} \end{bmatrix},$$

$$S(U)=\begin{bmatrix} ۰ \\ -g\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}x}h \end{bmatrix}. \qquad (۲)$$

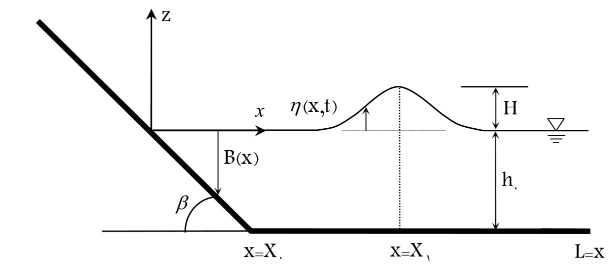
در تعریف فوق g شتاب گرانش، x راستای انتشار موج، t زمان، $h=h(x,t)$ عمق آب روی بستر، $B=B(x)$ تراز بستر و $u=u(x,t)$ سرعت افقی متوسط‌گیری شده در عمق در راستای انتشار موج هستند (شکل ۱). معادله‌ی ۱ در حالت نیمه‌گسسته چنین نوشته می‌شود:

$$\frac{\partial U}{\partial t}=-\frac{F_{i+(۱/۲)}-F_{i-(۱/۲)}}{\Delta x}+S_i \qquad (۳)$$

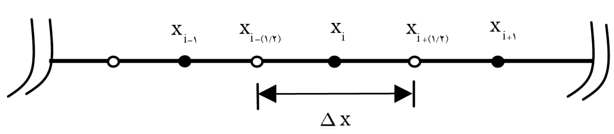
که در آن Δx اندازه‌ی سلول محاسباتی است و $F_{i+(۱/۲)}$ و $F_{i-(۱/۲)}$ نیز که به شارهای بین سلولی موسوم‌اند به‌ترتیب به شار عددی در نقاط $x=x_{i+(۱/۲)}$ و $x=x_{i-(۱/۲)}$ اشاره می‌کنند (شکل ۲). در ادامه، روش مورد استفاده برای تخمین شار عددی به‌تفصیل بیان می‌شود.

۳. الگوی یکنوای بالادست برای قوانین پایستار (MUSCL)

در روش حجم محدود در ابتدای هر گامِ زمانی، فقط داده‌های عمق (h) و اندازه حرکت جریان (hu) در مرکز هر سلولِ محاسباتی موجود است. این در حالی است که مطابق رابطه‌ی ۳، پیشبرد حل مستلزم تعیین متغیرهای جریان در مرز بین سلول‌هاست. در این مطالعه از الگوی یکنوای بالادست برای قوانین پایستار



شکل ۱. تعریف پارامترهای مربوط به انتشار و بالاروی یک موج منفرد (شکل بدون مقیاس است).



شکل ۲. گسسته‌سازی مکانی دامنه حل به‌کمک سلول‌هایی با اندازه‌ی Δx. نقاط توخالی مرزهای بین سلولی و نقاط توپر مرکز سلول‌ها را نشان می‌دهند.

(MUSCL)[۱۰]، که اولین‌بار توسط ون لیر پیشنهاد شد، استفاده می‌شود.[۱۰] براساس این روش در مرحله‌ی موسوم به بازساخت داده‌ها[۱۱]، مقادیر متغیرها در مرز سلول با برون‌یابی مقادیر مرکز سلول به دست می‌آیند. اعمال این برون‌یابی به‌گونه‌یی صورت می‌پذیرد که خصلت نوسانی جواب کنترل شود و ناپیوستگی‌های جریان بدون ایجاد استهلاک عددی تسخیر شود. برای بازساخت داده‌ها از یک محدودکننده‌ی غیرخطی شیب[۱۲] استفاده می‌شود تا استهلاک عددی مناسب به داده‌های بازسازی شده در مرز سلول افزوده شود. با استفاده از این روش، ضمن حفظ یکنوایی حل، از ایجاد نوسان‌های شدید و غیر فیزیکی در نزدیکی نواحی با گرادیان زیاد جلوگیری می‌شود. برهمین اساس برای اندازه حرکت در سلول iام خواهیم داشت:

$$(hu)^{-}_{i+(۱/۲)} = (hu)_i + \frac{۱}{۲}\delta_i(hu),$$
$$(hu)^{+}_{i+(۱/۲)} = (hu)_{i+۱} - \frac{۱}{۲}\delta_{i+۱}(hu). \qquad (۴)$$

از این پس بالانویس‌های + و - به‌ترتیب نشان‌دهنده‌ی مقادیر متغیرهای بازسازی شده در سمت راست و سمت چپ مرز مورد نظر خواهند بود. در رابطه‌ی ۴ گرادیان اندازه‌ی حرکت طبق رابطه‌ی ۵ داده می‌شود.

$$\delta_i(hu) = \Psi_i \times \left[\frac{\Delta_{i+(۱/۲)}(hu) + \Delta_{i-(۱/۲)}(hu)}{۲}\right] \qquad (۵)$$

که در آن $\Delta_{i+(۱/۲)}(hu)$ و $\Delta_{i-(۱/۲)}h(u)$ پرش در اندازه حرکت در دو سلول مجاور بوده و در قالب رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شوند.

$$\Delta_{i+(۱/۲)}(hu) = (hu)_{i+۱} - (hu)_i,$$
$$\Delta_{i-(۱/۲)}(hu) = (hu)_i - (hu)_{i-۱}. \qquad (۶)$$

در رابطه‌ی ۵، Ψ محدودکننده‌ی غیرخطی شیب Superbee است.[۱۰]

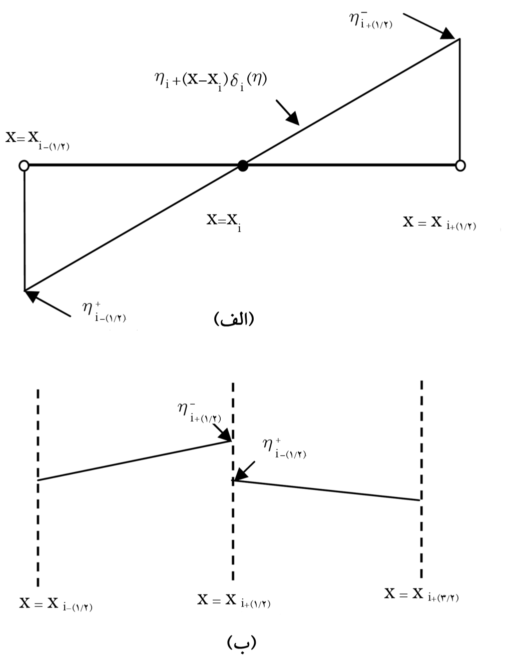
$$\Psi_i = \begin{cases} ۰ & r_i \leq ۰, \\ ۲r_i & ۰ \leq r_i \leq \frac{۱}{۲}, \\ ۱ & \frac{۱}{۲} \leq r_i \leq ۱, \\ \min(r_i, \frac{۲}{۱+r_i}, ۲) & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad (۷)$$

که در آن r_i نسبت اندازه حرکت در دو سلول متوالی است و طبق رابطه‌ی ۸ برابر است با:

$$r_i = \frac{\Delta_{i-(۱/۲)}(hu)}{\Delta_{i+(۱/۲)}(hu)} \qquad (۸)$$

۴. روش گرادیان سطح (SGM)

بازساخت عمق جریان با روشی مشابه آنچه در قسمت قبل برای اندازه حرکت به کار رفت، روش گرادیان عمق (DGM)[۱۳] نامیده می‌شود. این روش فقط برای شکل همگن معادلات (یعنی $S(U) = ۰$) مناسب است. به‌هر حال در مدل‌سازی بالاروی امواج منفرد باید اثرات شیب بستر در معادلات لحاظ شود، زیرا عمق آب در مرز هر سلول محاسباتی تحت تأثیر توپوگرافی بستر و همچنین تغییرات زمانی سطح آزاد جریان قرار دارد. در چنین حالتی، حتی اگر از روشی با مرتبه‌ی بالای دقت برای بازساخت عمق آب در مرز سلول استفاده شود، تغییرات واقعی عمق جریان در مرز



شکل ۳. بازساخت تراز سطح آزاد بر مبنای روش گرادیان سطح (SGM).

سلول به دست نمی‌آید. به‌بیان دیگر، خطای ناشی از روش (DGM) به محاسبه‌ی نادرست شار عددی می‌انجامد و جوابی نادرست برای مسئله به دست می‌آید. برای رفع این نقیصه، در این تحقیق از روش پیشنهادی محققین در سال ۲۰۰۱، که به‌روش گرادیان سطح (SGM) موسوم است، استفاده می‌شود.[15] براساس این روش به‌جای متغیر عمق جریان، تراز سطح آزاد در مرکز سلول به‌عنوان مبنای بازساخت داده به کار می‌رود (شکل ۳الف). تراز سطح آزاد را می‌توان چنین تعریف کرد:

$$\eta(x,t) = h(x,t) + B(x) \qquad (۹)$$

با پیروی از روندی مشابه روند مورد استفاده در اندازه حرکت، ابتدا مقادیر $\eta^{+}_{i+(۱/۲)}$ و $\eta^{-}_{i+(۱/۲)}$ به دست می‌آیند (شکل ۳ب) و سپس به‌کمک رابطه‌ی ۱۰ مقادیر عمق جریان در مرز سلول محاسبه می‌شود.

$$h^{-}_{i+(۱/۲)} = \eta^{-}_{i+(۱/۲)} - B_{i+(۱/۲)}$$
$$h^{+}_{i+(۱/۲)} = \eta^{+}_{i+(۱/۲)} - B_{i+(۱/۲)} \qquad (۱۰)$$

که در آن $B_{i+(۱/۲)}$ تراز بستر در مرز $x = x_{i+(۱/۲)}$ است. روش یادشده سبب کاهش چشمگیر خطای ناشی از برون‌یابی عمق در مرز سلول می‌شود. باید توجه داشت که در غیاب عبارت چشمه در معادله‌ی ۳، جواب‌های حاصل از SGM و DGM یکسان خواهد بود.

۵. تخمین شار عددی در مرز سلول به‌کمک الگوی عددی (FORCE)

هدف از تعیین متغیرهای عمق و اندازه حرکت در مرز هر سلول، محاسبه‌ی شار عددی بین سلولی است. برای این منظور تاکنون روش‌های گوناگونی پیشنهاد شده است. در این مطالعه به‌منظور تخمین شار عددی از الگوی عددی مرکزی مرتبه اول

(FORCE)[۱۴] که برای اولین‌بار در سال ۱۹۹۶ ارائه شد، استفاده می‌شود.[۱۶] این الگوی شار، علاوه بر سادگی پیاده‌سازی در برنامه‌ی رایانه‌یی، درکاربرد نیز بسیار قوی است. در ترکیب با روش الگوی یکنوای بالادست برای قوانین پایستار (MUSCL)، تخمین شار عددی در مرز سلول (FORCE) دارای دقتی از مرتبه‌ی دو در زمان و مکان است. بر اساس این الگو شار عددی در مرز $x_{i+(1/2)}$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ نوشته می‌شود:

$$F^{\mathrm{FORCE}}_{i+(1/2)}=\frac{1}{2}\left(F^{LF}_{i+(1/2)}+F^{LW}_{i+(1/2)}\right) \tag{11}$$

که در آن $F^{LF}_{i+(1/2)}$ نشان‌دهنده‌ی شار عددی لکس‌ـفردریش است و عبارت است از:

$$\begin{aligned}F^{LF}_{i+(1/2)}&=\frac{1}{2}\left[F(U^-_{i+(1/2)})+F(U^+_{i+(1/2)})\right]\\&-\frac{1}{2}\frac{\Delta x}{\Delta t}\left[U^+_{i+(1/2)}-U^-_{i+(1/2)}\right]\end{aligned} \tag{12}$$

در این معادله $U^+_{i+(1/2)}$ و $U^-_{i+(1/2)}$ به‌ترتیب معرف بردار محاسبه‌شده‌ی متغیرهای پایستار در وجه راست و چپ مرز $x_{i+(1/2)}$ هستند. همچنین در رابطه‌ی ۱۱، $F^{LW}_{i+(1/2)}$ شار عددی ریچمایر یا شار عددی دو مرحله‌یی لکس ـ وندروف است:

$$F^{LW}_{i+(1/2)}=F(U^{LW}_{i+(1/2)}) \tag{13}$$

که در آن، حالت میانی متغیر پایستار $U^{LW}_{i+(1/2)}$، با رابطه‌ی ۱۴ داده می‌شود.

$$\begin{aligned}U^{LW}_{i+(1/2)}&=\frac{1}{2}\left[U^-_{i+(1/2)}+U^+_{i+(1/2)}\right]\\&-\frac{1}{2}\frac{\Delta t}{\Delta x}\left[F(U^+_{i+(1/2)})-F(U^-_{i+(1/2)})\right]\end{aligned} \tag{14}$$

همان‌طور که تورو در سال ۲۰۰۶ اثبات کرد، الگوی عددی مرکزی مرتبه اول (FORCE) یک شار یکنوا بوده و در میان مجموعه‌یی از شارها که از ترکیب خطی شار لکس -فردریش و شار دو مرحله‌یی لکس‌ـ وندروف به وجود می‌آیند، عضوی بهینه محسوب می‌شود.[۱۷] لازم به ذکر است که ترکیب الگوی عددی مرکزی مرتبه اول (FORCE) و روش گرادیان سطح در متون پیشین گزارش نشده است.

۶. انتگرال‌گیری زمانی و ملاحظات پایداری

تا اینجا فقط گسسته‌سازی مکانی معادلات حاکم مورد توجه قرارگرفت. با استفاده از شرایط مرزی و اولیه‌ی مناسب، معادله‌ی ۳ به‌کمک روش گسسته‌سازی زمانی رانگ ـ کوتا حل می‌شود. این روش پایداری بسیار زیاد محاسبات را به‌همراه دارد و برای حل سیستم معادلات دیفرانسیل هذلولوی ــ نظیر معادلات غیر خطی آب کم‌عمق ــ بسیار مناسب است.[۱۸] روش بهینه‌ی مرتبه‌ی سه رانگ ـ کوتا طبق معادلات ۱۵ عبارت است از:

$$\begin{aligned}&U^{(1)}_i=U^n_i+\Delta t\,L(U^n_i),\\&U^{(2)}_i=\frac{3}{4}U^n_i+\frac{1}{4}U^{(1)}_i+\frac{1}{4}\Delta t\,L(U^{(1)}_i),\\&U^{n+1}_i=\frac{1}{3}U^n_i+\frac{2}{3}U^{(2)}_i+\frac{2}{3}\Delta t\,L(U^{(2)}_i).\end{aligned} \tag{15}$$

که در آن $(W=U^n_i,U^{(1)}_i,U^{(2)}_i)$ $L(W)$ طرف راست رابطه‌ی ۳ است که در W محاسبه شده است. $U^{(1)}_i$ و $U^{(2)}_i$ نیز متغیرهای میانی پایستار هستند. از آنجا که الگوی رانگ ـ کوتا الگویی صریح است، پایداری محاسبات با اعمال معیار کورانت ـ فردریش ـ لوی (CFL) بر روی مقدارگام زمانی تأمین می‌شود:

$$\Delta t=C_n\min_i\frac{\Delta x}{|u_i|+\sqrt{gh_i}},\qquad 0<C_n\leq 1 \tag{16}$$

که در آن C_n عدد کورانت است. رابطه‌ی ۱۶ بیان می‌کند که در یک گام زمانی موج نباید مسافتی بیش از طول یک گام مکانی را طی کند.

۷. شرایط مرزی لازم برای شبیه‌سازی بالاروی موج منفرد

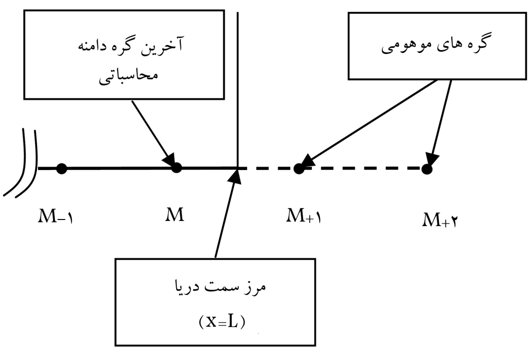
برای حل صحیح معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، ضرورت دارد شرایط مرزی به‌درستی اعمال شوند. در بررسی فرایند بالاروی موج بر روی ساحل، مرزها مشتمل‌اند بر مرز متحرک و مرز غیربازتابی، که در این قسمت به چگونگی پیاده‌سازی آنها در مدل عددی ارائه شده پرداخته می‌شود.

۱.۷. مرز متحرک

در تحلیل عددی فرایند بالاروی امواج بلند با استفاده از معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، بیشتر مشکلات ناشی از تعیین موقعیت خط ساحل است؛ زیرا خط ساحل در خلال بالاروی و پایین‌روی موج بر روی ساحل جابه‌جا می‌شود. به‌بیان دیگر مسئله‌ی بالاروی موج بر روی ساحل در قلمرو مسائل با مرز متحرک می‌گنجد. بنابراین لازم است که با اتخاذ رهیافتی خاص در مدل عددی، نسبت به تعریف خط ساحل اقدام شود. با پیروی از روشی مشابه روش‌های ارائه‌شده در سال‌های ۲۰۰۰ و ۲۰۰۶، در الگوی عددی یک عمق کمینه‌ی آب تعریف می‌شود.[۱۱و۱۹] در طول محاسبات چنانچه عمق آب در هر سلول محاسباتی کم‌تر از مقدار کمینه شود آن سلول خشک قلمداد می‌شود، و به اندازه حرکت جریان در آن سلول مقدار صفر نسبت داده می‌شود. در غیر این صورت سلول به‌عنوان سلول تَر تلقی می‌شود. در هر گام زمانی مرزی که سلول‌های تَر را از سلول‌های خشک جدا می‌کند به‌عنوان خط ساحل تعریف می‌شود. همچنین لازم به ذکر است که این مقدارکمینه‌ی عمق به‌عنوان عمق اولیه به تمامی گره‌های واقع بر ساحل خشک (گره‌هایی که در ترازی بالاتر از سطح آزاد اولیه‌ی آب قرار دارند) اختصاص می‌یابد.

۲.۷. مرز غیر بازتابی

در مرز سمت دریا ($x=L$، شکل ۱) که نوعی مرز غیر بازتابی به‌شمار می‌آید، شرط مرزی انتقال‌دهنده اعمال می‌شود. این شرط مرزی که خروج بدون انعکاسِ



شکل ۴. گره‌های موهومی برای مدل‌سازی شرط مرزی غیر بازتابی.

موج از دامنه‌ی محاسباتی را امکان‌پذیر می‌سازد، با افزودن گره‌های موهومی[۱۵] به دامنه‌ی محاسباتی اعمال می‌شود (شکل ۴). چنانچه اندیس آخرین گره محاسباتی با M نشان داده شود، اندیس گره‌های موهومی $M+1$ و $M+2$ خواهد بود. در این صورت می‌توان نوشت:

$$(hu)_{M+1}=(hu)_M\,,\qquad h_{M+1}=h_M$$
$$(hu)_{M+2}=(hu)_M\,,\qquad h_{M+2}=h_M \qquad (17)$$

رابطه‌ی ۱۷ بیان می‌کند که عمق و اندازه‌ی حرکت جریان نباید در راستای عمود بر مرز غیر بازتابی تغییر کنند.

۸. شرایط اولیه‌ی شبیه‌سازی موج منفرد

موج منفرد فقط دارای یک قله است و شکم ندارد. مدل‌سازی انتشار این موج معمولاً با حل معادلات غیرخطی آب کم‌عمق و با اعمال نیم‌رخ موج در لحظه‌ی $t=0$ به‌صورت مقادیر اولیه‌ی نیمرخ سطح آزاد $\eta(x,0)$، در مدل عددی صورت می‌پذیرد. براساس نظریه‌ی مرتبه‌ی اول امواج منفرد، نیم‌رخ یک موج منفرد که در جهت مثبت محور x انتشار می‌یابد، مطابق رابطه‌ی ۱۸ تعریف می‌شود:[۳]

$$\eta(x,t)=H\,\mathrm{sech}^2\left[\sqrt{\frac{3H}{4h_0^3}}\,(x-X_1-Ct)\right] \qquad (18)$$

که در آن H ارتفاع اولیه‌ی موج منفرد، h_0 عمق ثابت اولیه‌ی آب، X_1 موقعیت اولیه‌ی قله‌ی موج و $C=\sqrt{g(H+h_0)}$ سرعت انتشار موج است. مطابق شکل ۱، فاصله‌ی میان موقعیت اولیه‌ی قله‌ی موج منفرد و نقطه‌ی شروع ساحل شیب‌دار (X_0) چنین در نظر گرفته می‌شود:[۳]

$$X_1-X_0=\sqrt{\frac{4h_0^3}{3H}}\,\mathrm{arccosh}\left(\sqrt{\frac{1}{0{,}05}}\right) \qquad (19)$$

فاصله‌ی یادشده در واقع نصف طول مشخصه‌ی موج منفرد است. مقادیر اولیه‌ی سرعت جریان از رابطه‌ی ۲۰ به دست می‌آید.

$$u(x,0)=-\eta(x,0)\sqrt{\frac{g}{h_0}} \qquad (20)$$

علامت منفی در رابطه‌ی ۲۰ نشان می‌دهد که موج به سمت مکان اولیه‌ی خط ساحل (مبدأ مختصات در شکل ۱) حرکت می‌کند. در مواردی که از این پس مورد بررسی قرار خواهند گرفت، برای بیان نتایج از متغیرهای بدون بعد (رابطه‌ی ۲۱) استفاده می‌شود:

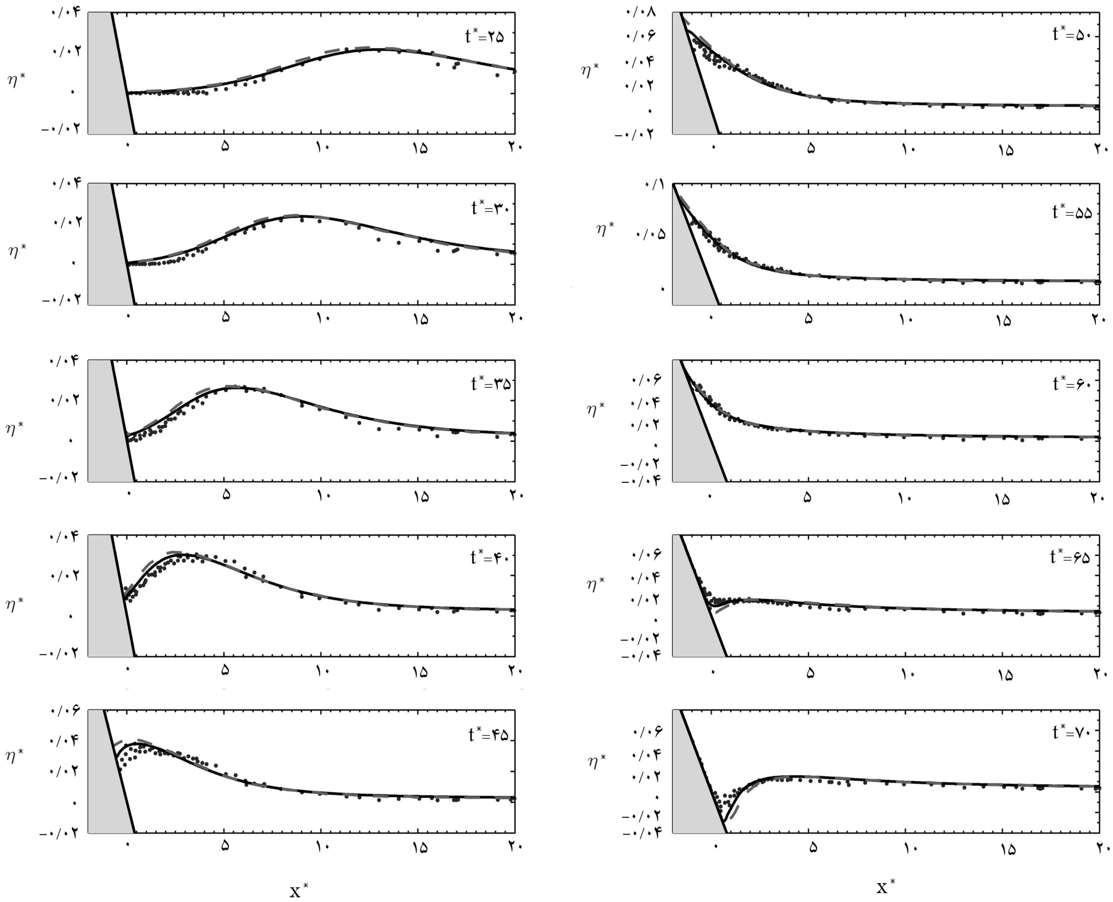
$$\eta^*=\frac{\eta}{h_0},\qquad x^*=\frac{x}{h_0},\qquad t^*=t\sqrt{\frac{g}{h_0}}. \qquad (21)$$

۹. نتایج و بحث

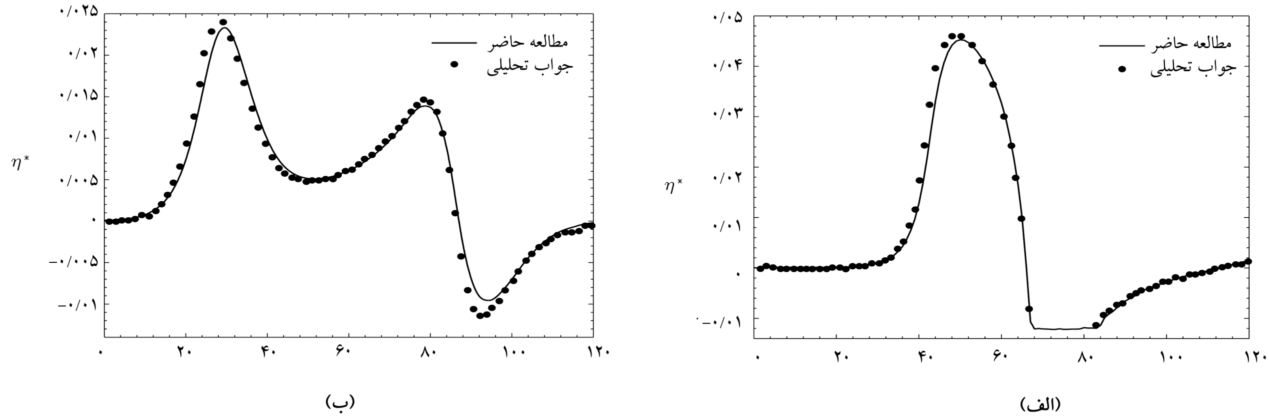
سینولاکیس (۱۹۸۶) در تحقیقات گسترده‌ی خود به ارائه‌ی یک مدل غیرخطی و تحلیلی برای بالاروی امواج غیر شکننده پرداخت. این محقق با استفاده از یک نگاشت معادلات غیرخطی آب کم‌عمق را حل کرد و جوابی تحلیلی برای نیم‌رخ سطح آزاد امواج غیرشکننده ارائه داد. مدل این محقق معمولاً برای صحت‌سنجی مدل‌های عددی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همچنین این محقق براساس آزمایش‌های خود که در مقایسه با کارهای پیشین، شیوه‌هایی دقیق‌تر در آنها مورد استفاده قرار گرفته بود، روابطی برای بیشینه بالاروی امواج منفرد غیرشکننده و شکننده ارائه داد.[۳] از آنجا که محققین بسیاری برای تعیین میزان دقت مدل‌های تحلیلی و عددی خود از نتایج آزمایشگاهی مذکور استفاده کرده‌اند، نتایج مدل ارائه‌شده در این تحقیق نیز با این داده‌ها مقایسه می‌شود. در شکل ۵ نتایج شبیه‌سازی عددی سطح آزاد با داده‌های آزمایشگاهی و جواب تحلیلی سینولاکیس مقایسه شده است. برای هماهنگی با داده‌های آزمایشگاهی ارتفاع بدون بعد موج $H/h_0=0{,}0185$، و شیب بستر ۱:۱۹٫۸۵ است. تحت چنین شرایطی این موج غیرشکننده محسوب می‌شوند. به‌روشنی تطابقی معقولانه میان داده‌های عددی تحلیلی و آزمایشگاهی وجود دارد. اگرچه در مقایسه با جواب تحلیلی، نتایج عددی از تطابق نسبتاً بهتری با داده‌های آزمایشگاهی برخوردارند. در شکل ۶، تغییرات زمانی سطح آزاد ناشی از موج یادشده در دو نقطه از سطح آزاد به تصویر کشیده شده است. شکل ۶الف مربوط به نقطه‌ی واقع در $x/h_0=0{,}25$ است، و شکل ۶ب نشان‌دهنده‌ی تغییرات زمانی جابه‌جایی سطح آزاد در نزدیکی نقطه‌ی میانی سطح شیب‌دار ($x/h_0=9{,}95$) است که در آن دو قله‌ی مجزا مشاهده می‌شود. قله‌ی اول ناشی از موج پیش‌رونده و قله‌ی دوم ناشی از موج بازتاب‌یافته از سطح شیب‌دار است. این در حالی است که در شکل ۶الف این دو قله در یکدیگر ادغام شده و عملاً یک نقطه‌ی اوج مشاهده می‌شود. تطابق معقولانه‌ی نتایج عددی و تحلیلی حاکی از توانایی مدل در شبیه‌سازی فرایندهای بالا و پایین روی موج منفرد بر ساحل شیب‌دار است.

در شکل ۷ نیم‌رخ‌های سطح آزاد برای موجی با $H/h_0=0{,}04$ که از شیب ۱:۱۹٫۸۵ بالا می‌رود با داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس مقایسه شده است. اگرچه بر مبنای معیار شکست موج باید شکست این موج اتفاق بیفتد، در آزمایشگاه شکست موج عملاً رخ نمی‌دهد.[۳] نتایج عددی نیز این حقیقت را تأیید می‌کند.

در شکل ۸ نتایج مدل عددی با داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس برای موج منفردی با ارتفاع $H/h_0=0{,}3$ که پس از انتشار بر روی آبی به‌عمق ثابت h_0، از سطحی با شیب ۱:۱۹٫۸۵ بالا می‌رود، مقایسه شده است. هنگامی که موج به سمت بالای سطح شیب‌دار حرکت می‌کند، جبهه‌ی موج نسبت به پشت آن شیب بیشتری می‌یابد و شکل موج حالت متقارن خود را از دست می‌دهد تا جایی که در موقعیتی خاص، که به نقطه‌ی شکست موج معروف است، جبهه‌ی موج کاملاً به حالت عمودی درمی‌آید. نتایج عددی در زمان‌های $t^*=15$ و $t^*=20$ چنین روندی را به‌خوبی نشان می‌دهند و همان‌گونه که از خصلت تسخیر شوک الگوی عددی انتظار می‌رفت، هیچ‌گونه نوسان عددی در نزدیکی جبهه‌ی قائم موج رخ نداده است. با این وجود به‌دلیل خاصیت غیرپخشی[۱۶] معادلات غیرخطی آب کم‌عمق، ارتفاع موج در لحظه‌ی شکست کم‌تر از مقدار آزمایشگاهی تخمین زده شده، و سرعت موج نیز قدری بیشتر از مقدار واقعی به دست آمده است. موج در ادامه‌ی انتشار به بالای سطح، در نزدیکی موقعیت اولیه‌ی خط ساحل فرو می‌ریزد و ارتفاع آن به‌شدت کاهش می‌یابد ($t^*=25$). حاصل این فرایند، تشکیل زبانه‌یی از سیال است که از سطح شیب‌دار بالا می‌رود. پس از این که زبانه به بالاترین نقطه‌ی صعود خود رسید، فرایند پایین‌روی موج آغاز می‌شود. در ابتدای این فرایند، زبانه‌ی موج عقب‌نشینی می‌کند و این در حالی است که دنباله‌ی موج هنوز به انتشار خود به سمت سطح شیب‌دار ادامه می‌دهد. جریانِ در حال عقب‌نشینی با دنباله‌ی موج برخورد می‌کند و یک پرش هیدرولیکی در نزدیکی موقعیت اولیه‌ی خط ساحل به وجود می‌آید.

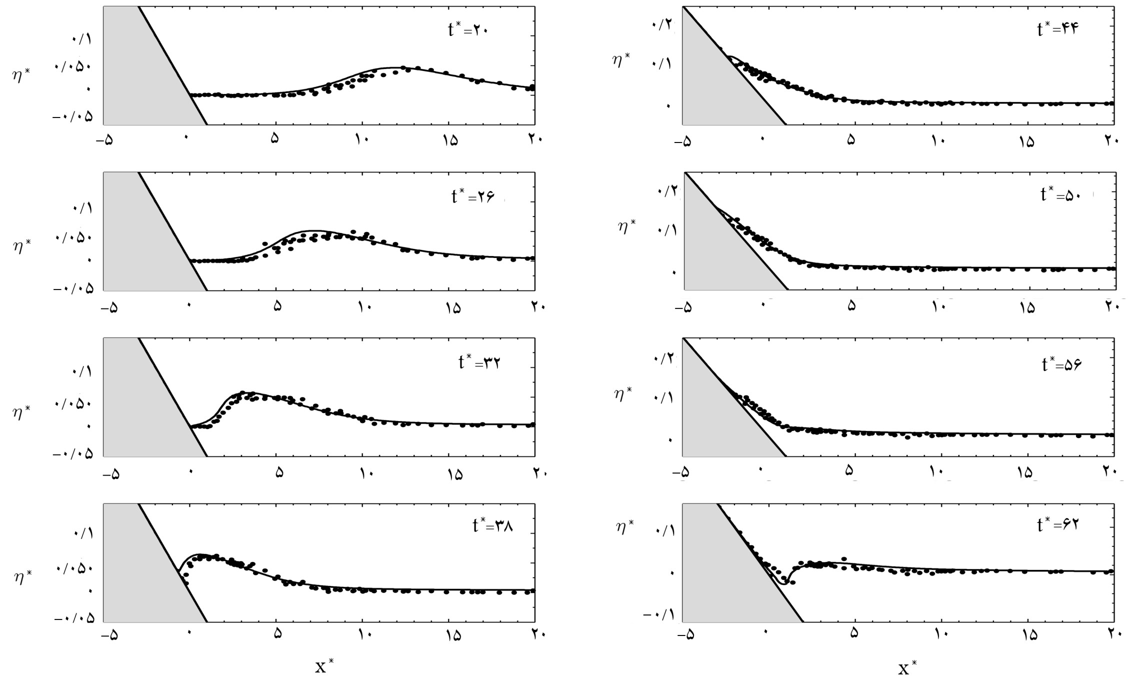


شکل ۵. نیمرخ سطح آزاد ($\eta^* = \eta/h_\circ$) به‌صورت تابعی از ($x^* = x/h_\circ$) برای بالاروی موج منفردی با ارتفاع اولیه $H/h_\circ = ۰٫۰۱۸۵$ بر روی شیب ۱:۱۹٫۸۵ در زمان‌های مختلف بدون بعد ($t^* = t\sqrt{g/h_\circ}$). خطوط ممتد: نتایج مطالعه‌ی حاضر، نقاط و خط‌چین‌ها به‌ترتیب داده‌های آزمایشگاهی و حل تحلیلی سینولاکیس (۱۹۸۶) را نشان می‌دهند.

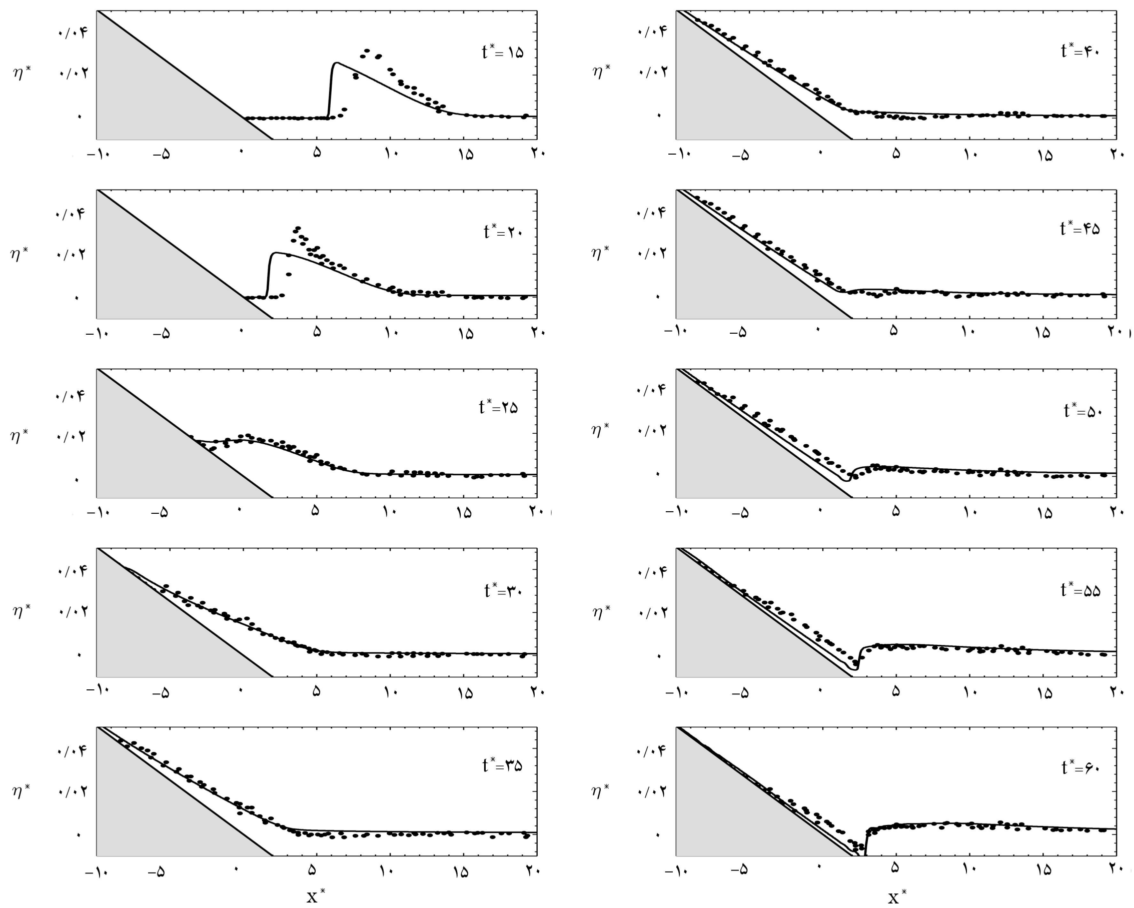


شکل ۶. جابه‌جایی سطح آزاد ($\eta^* = \eta/h_\circ$) به‌عنوان تابعی از زمان بدون بعد ($t^* = t\sqrt{g/h_\circ}$) در موقعیت (الف): $x^* = ۰٫۲۵$ و (ب): $x^* = ۹٫۹۵$ و مقایسه‌ی آن با حل تحلیلی سینولاکیس (۱۹۸۶) (ارتفاع اولیه موج: $H/h_\circ = ۰٫۰۱۸۵$، شیب بستر: ۱:۱۹٫۸۵).

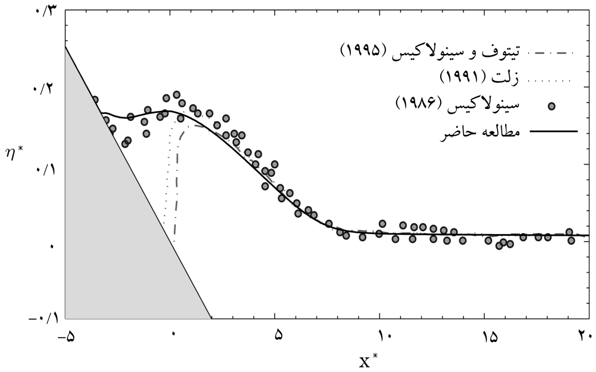
این موضوع به‌خوبی در بازه‌ی زمانی $۵۰ < t^* < ۶۰$ قابل مشاهده است. این که زبانه‌ی در حال عقب‌نشینی موج به‌صورت فیلم نازکی از سیال شبیه‌سازی شده است، ناشی از اعمال فرض سیال غیرلزج در به دست آوردن معادلات غیرخطی آب کم‌عمق است. در شکل ۹، نیمرخ محاسبه‌شده‌ی سطح آزاد در لحظه‌ی فروریزی موج ($t^* = ۲۵$، شکل ۸) با سایر روش‌های موجود مقایسه شده است. به‌روشنی الگوی عددی پیشنهادی در مقایسه با روش‌های عددی زلت (۱۹۹۱) و تیتوف و سینولاکیس (۱۹۹۵) از تطابق بهتری با داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس (۱۹۸۶) برخوردار است. این امر ناشی از توانایی مدل در حفظ خاصیت بقای جرم سیال در طول محاسبات است. چنانچه نسبت جرم از دست رفته در پایان محاسبات به جرم اولیه‌ی موجود در دامنه‌ی محاسباتی به‌عنوان خطای بقای جرم (MCE)[17] تعریف شود،



شکل ۷. بالاروی موج منفرد با ارتفاع اولیه $H/h_{\circ} =$ ۰٫۰۴ بر روی شیب ۱:۱۹٫۸۵ در زمان‌های مختلف بدون بعد. خطوط ممتد نتایج مطالعه حاضر و نقاط داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس (۱۹۸۶) را نشان می‌دهند.



شکل ۸. بالاروی موج منفرد با ارتفاع اولیه $H/h_{\circ} =$ ۰٫۳ بر روی شیب ۱:۱۹٫۸۵ در زمان‌های مختلف بدون بعد. خطوط ممتد نتایج مطالعه حاضر و نقاط داده‌های آزمایشگاهی سینولاکیس (۱۹۸۶) را نشان می‌دهند.



شکل ۹. مقایسه‌ی نتایج عددی مدل ارائه‌شده و سایر روش‌های موجود برای بالاروی موج منفردی با $H/h_\circ =$ ۰٫۳ از شیب ۱:۱۹٫۸۵ در لحظه $t^* =$ ۲۵.

شبیه‌سازی بالاروی موج شکننده‌ی مذکور با خطایی به‌اندازه‌ی MCE=٪۰٫۰۰۵ همراه است و این در حالی است که تیتوف و سینولاکیس (۱۹۹۵) در شبیه‌سازی همین موج تحت شرایطی مشابه خطایی به‌اندازه‌ی MCE=٪۰٫۷ گزارش کرده‌اند. لازم به ذکر است که جرم سیال در هرگام زمانی از انتگرال‌گیری سطح محصور میان نیم‌رخ موج و بستر جریان به دست آمده و در محاسبه‌ی آن شار جرم عبوری از مرز سمت دریا نیز لحاظ شده است. وجود این خطای ناچیز در شبیه‌سازی شوک حاصل از شکست موج، بر توانایی مدل در حفظ خاصیت پایستاری معادلات حاکم دلالت می‌کند.

۱۰. نتیجه‌گیری

در این مطالعه به تشریح یک مدل حجم محدود برای معادلات غیرخطی آب کم‌عمق پرداخته شد که در آن الگوی عددی FORCE که توانایی آن در مدل‌سازی جریان آب کم‌عمق در متون علمی پیشین به اثبات رسیده بود، برای اولین‌بار به‌منظور شبیه‌سازی انتشار موج بر روی بستر خشک با موفقیت مورد استفاده قرار گرفت. همچنین مقایسه‌هایی میان نتایج حاصل از مدل‌سازی عددی با داده‌های آزمایشگاهی و حل تحلیلی انجام پذیرفت. به‌هر حال در محدوده‌ی شبیه‌سازی‌های صورت‌گرفته در این مطالعه نتایج حاصله عبارت است از:

- معادلات غیرخطی آب کم‌عمق علی‌رغم فرض سرعت متوسط‌گیری شده در عمق، ابزاری توان‌مند برای بررسی پدیده‌ی انتشار و بالاروی امواج بلند هستند.
- درمقایسه با حل تحلیلی موجود، نتایج مدل ارائه‌شده به‌خاطر استهلاک عددی تطابق بهتری با داده‌های آزمایشگاهی نشان می‌دهد.
- با افزایش شیب سطح (زاویه‌ی β در شکل ۱) بیشینه بالاروی موج شکننده‌ی منفرد افزایش می‌یابد؛ این در حالی است که بالاروی موج غیرشکننده با ملایم‌تر شدن شیب بیشتر می‌شود.
- افزایش فاصله‌ی اولیه‌ی قله‌ی موج نسبت به خط ساحلی (X_1، شکل ۱) سبب کاهش بیشینه‌بالاروی موج بر روی ساحل می‌شود.
- مدل ارائه‌شده به‌دلیل خطای ناچیز در حفظ خاصیت بقای جرم معادلات حاکم، نتایج بهتری نسبت به برخی از مدل‌های پیشین در لحظه‌ی فروریزی یک موج شکننده به دست می‌دهد.
- فقدان خاصیت غیرپخشی در معادلات غیرخطی آب‌کم‌عمق، موجب ناهماهنگی میان نتایج عددی و داده‌های آزمایشگاهی در حوالی نقطه‌ی شکست موج شد.
- مطالعه‌ی اثر ناشی از اصطکاک بستر بر روی بیشینه بالاروی امواج و اضافه‌کردن عبارت پخشی در معادلات حاکم می‌تواند به‌عنوان موضوع تحقیقی دیگر مطرح شود.

منابع

1. Carrier, G.F. and Greenspan, H.P. "Water waves of finite amplitude on a sloping beach", *J. Fluid Mechanics,* **4**, pp. 97-109 (1958).
2. Tuck, E.O. and Hwang, L.S. "Long wave generation on a sloping beach", *J. Fluid Mechanics,* **51**, pp. 449-461 (1972).
3. Synolakis, C.E., *The Run-up of Long Waves,* PhD Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, CA, (1986).
4. Hibbert, S. and Peregrine, D.H. "Surf and run-up on a beach: A uniform bore", *J. Fluid Mechanics,* **95**, pp. 323-345 (1979).
5. Titov, V.V. and Synolakis, C.E. "Modeling of breaking and non-breaking long-wave evolution and run-up us-

پانوشت

1. exact Riemann solver
2. weighted average flux
3. directional splitting
4. shock-capturing
5. bore
6. well-balanced
7. Roe method
8. surface gradient method
9. conservative form
10. monotonic upstream scheme for conservation laws
11. data reconstruction
12. nonlinear slope limiter
13. depth gradient method
14. first order centerd scheme
15. ghost grid points
16. non dispersive
17. mass conservation error

ing VTCS-2", *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. ASCE,* **121**, pp.308-316 (1995).

6. Zelt, J.A. "The run-up of non-breaking and breaking solitary waves", *Coastal Engineering,* **15**, pp. 205-246 (1991).
7. Wei, Y.; Mao, X.Z. and Cheung, K.F. "Well-balanced finite-volume model for long-wave run-up", *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. ASCE,* **132**, pp. 114-124 (2006).
8. Brocchini, M.; Bernetti, R.; Mancinelli, A. and Albertini, G. "An efficient solver for nearshore flows based on the WAF method", *Coastal Engineering,* **43**, pp. 105-129 (2001).
9. Kim, D.H.; Cho, Y.S. and Yi, Y.K. "Propagation and run-up of nearshore tsunamis with HLLC approximate Riemann solver", *Ocean Engineering,* **34**, pp. 1164-1173 (2007).
10. Toro, E.F., *Shock-Capturing Methods for Free-Surface Shallow Flows,* Wiley, West Sussex, England (2001).
11. Brocchini, M. and Dodd, N. "Nonlinear shallow water equation modeling for coastal engineering", *J. Waterway, Port, Coastal, Ocean Eng. ASCE,* **134**(2), pp. 104-120 (2008).
12. Hu, K.; Mingham, C.G. and Causon, D.M. "Numerical simulation of wave overtopping of coastal structures using the non-linear shallow water equations", *Coastal Engineering,* **41**, pp. 433-465 (2000).
13. Bermudez, A. and Vazquez, M.E. "Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms", *J. Comput. Fluids,* **23**(8), pp. 1049-1071 (1994).
14. Vazquez-Cendon, M.E. "Improved treatment of source terms in upwind schemes for shallow water equations in channels with irregular geometry," *J. Comput. Physics,* **148**, pp. 497-526 (1999).
15. Zhou, J.G.; Causon, D.M.; Mingham, C.G. and Ingram, D.M. "The surface gradient method for the treatment of source terms in the shallow water equations", *J. Comput. Physics,* **168**, pp. 1-25 (2001).
16. Toro, E.F., *On Glimm-Related Schemes for Conservation Laws*, Technical Report MMU-9602, Department of Mathematics and Physics, Manchester Metropolitan University, UK (1996).
17. Toro, E.F. "MUSTA: A multi-stage numerical flux", *J. Applied Numerical Mathematics,* **56**, pp. 1464-1479 (2006).
18. Shu, C.W. and Osher, S. "Efficient implementation of essentially non-oscillatory shock-capturing schemes", *J. Comput. Physics,* **77**, pp. 439-471 (1988).
19. Que, Y.T. and Xu, K. "The numerical study of roll-waves in inclined open channels and solitary wave run-up", *International Journal for Numerical Methods in Fluids,* **50**, pp. 1003-1027 (2006).