مهندسی عمران شریف
دوره‌ی ۲-۲۸، شماره‌ی ۱، ص. ۲۹-۳۸

قابلیت تبدیل ارتقاء یافته در مقایسه با تبدیل کلاسیک هیلبرت ـ هوآنگ

سهیل رمضانی (کارشناس ارشد)
امید بهار* (استادیار)
پژوهشگاه بین‌المللی زلزله‌شناسی و مهندسی زلزله

تبدیل کلاسیک هیلبرت ـ هوآنگ در بخش تحلیل طیفی هیلبرت محدودیت‌هایی دارد که ممکن است بر صحت، دقت و خوانایی نتایج حاصل از ارزیابی سیگنال‌ها تأثیر قابل ملاحظه‌یی بگذارد. در این نوشتار با بررسی این محدودیت‌ها، روش جایگزینی به‌نام «تبدیل ارتقاءیافته» پیشنهاد شده است. برای ارزیابی و نشان دادن کارآیی این روش، چهار مثال عددی ارائه شده که توانایی روش پیشنهادی را در تغییرات دقیق فرکانس آنی، ارزیابی صحیح توزیع دامنه ـ فرکانس، افزایش خوانایی طیف زمان ـ فرکانس ـ دامنه‌ی یک سیگنال باندپهن مانند زلزله، و جابه‌جایی تابع فاز به‌میزان دقیقاً ۹۰ درجه نشان می‌دهد. مقایسه‌ی نتایج حاصل از روش‌های کلاسیک و روش تبدیل ارتقاءیافته نشان می‌دهد که روش پیشنهادی توانایی بسیار بالایی در ارزیابی سیگنال‌ها و نیز استخراج نتایج صحیح‌تر و از نظر فیزیکی معنادارتر را دارد.

واژگان کلیدی: تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ، تبدیل ارتقاءیافته‌ی هیلبرت ـ هوآنگ، طیف هیلبرت، فرکانس آنی، طیف زمان ـ فرکانس ـ دامنه، تابع فاز.

s.ramezani@iiees.ac.ir
omidbahar@iiees.ac.ir

۱. مقدمه

سیگنال‌ها در طبیعت از فرایندهای گوناگونی ایجاد می‌شوند و اطلاعات فیزیکی مهمی از فرایندهای ایجادکننده‌ی خود دارند. استخراج خصوصیات فیزیکی سیستم‌ها به‌وسیله‌ی مطالعه‌ی سیگنال‌ها موضوع علم «پردازش سیگنال» است. بسیاری از سیگنال‌ها حاصل فرایندهای غیرخطی‌اند که در عین حال ماهیت گذرا نیز دارند. تاکنون برای پردازش سیگنال‌ها روش‌های زیادی ــ مانند تحلیل طیفی فوریه، تبدیل فوریه‌ی زمان‌کوتاه، طیف‌نما، طیف تکاملی، توزیع ویگنر ـ ویل و تبدیل موجک ــ معرفی شده است، اما نقصِ کاراییِ این روش‌ها در برابر سیگنال‌های گذرا و غیرخطی به اثبات رسیده است.[۱-۳] تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ برای پردازش سیگنال‌های گذرای غیرخطی توسعه داده شده[۴] که دامنه‌ی کاربرد آن به‌عنوان ابزاری قدرت‌مند در علوم مختلف رو به افزایش است. در مهندسی زلزله از تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ برای پردازش سیگنال‌هایی مانند جنبش قوی زمین، پاسخ ارتعاشی سازه‌ها و شناسایی آسیب در سازه‌ها استفاده شده است. این کاربردها نشان‌گر قابلیت تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ در استخراج دقیق‌ترِ خصیصه‌های گذرا و غیرخطی سیگنال‌ها، نسبت به روش‌های سنتیِ پردازش هستند.[۴-۶]

تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ از دو بخش «تجزیه‌ی تجربی مودی» و «تحلیل طیفی هیلبرت» تشکیل شده است. هدف تجزیه‌ی تجربی مودی تجزیه‌ی سیگنال به تعداد متناهی از توابع مودی ذاتی است، به‌طوری که هریک از این توابع دارای تبدیل هیلبرت خوش‌رفتار باشد.[۴] هدف از تحلیل طیفی هیلبرت به دست آوردن دامنه و فرکانس آنی هریک از توابع مودی ذاتی به‌وسیله‌ی تبدیل هیلبرت، و درنهایت به دست آوردن توزیع دامنه ـ زمان ـ فرکانس برای سیگنال است. درخصوص ارتقاء عملکرد تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ تاکنون تحقیقات زیادی صورت گرفته است، اما بیشتر این تحقیقات بر بخش تجزیه‌ی تجربی مودی متمرکز بوده است.[۷-۱۳] در بخش تحلیل طیفی هیلبرت نیز کار کم‌تری انجام شده[۱۴،۱۵] به طوری که در بیشتر کاربردها ملزومات مرتبط با این قسمت نادیده گرفته شده است.

ملزومات استفاده از تبدیل هیلبرت عبارت‌اند از: ۱. برای کسب فرکانس لحظه‌یی به‌لحاظِ فیزیکی معنی‌دار، تعریف تابع مودی ذاتی تنها یک شرط لازم است؛ علاوه بر این باید شرط‌های مرتبط با قضایای بِدروسین و نوتال را نیز برآورده کرد.[۱۴] برای در نظر گرفتن قضیه‌ی بدروسین، روش تبدیل هیلبرتِ نرمال‌شده با دامنه، پیشنهاد شده است.[۱۴] برای در نظر گرفتن قضیه‌ی نوتال نیز، به‌جای محاسبه‌ی تابع فاز به‌وسیله‌ی تبدیل هیلبرت، محاسبه‌ی آن از طریق اعمال تابع $\cos^{-1}$ به موج حامل، $\cos\theta(t)$، یک تابع مودی ذاتی پیشنهاد شده است.[۱۵] اما به‌علت عاری از نقص نبودن عملیات نرمال‌سازی، مقادیری خارج از [۱،۱-] برای موج حامل به دست می‌آید که این موضوع استفاده از تابع $\cos^{-1}$ را با موانعی مواجه می‌سازد. ۲. در مواجهه با سیگنال‌های دارای باند فرکانسی پهن، توابع مودی ذاتی با نمایه‌ی پایین‌تر،

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۸۸/۶/۱۰، اصلاحیه ۱۳۸۹/۹/۷، پذیرش ۱۳۸۹/۱۲/۹.

پهنای باند بیشتری دارند.[۹،۸] این امر موجب پراکندگی فرکانسیِ زیادی در محدوده‌ی فرکانس‌های بالاترِ طیف هیلبرت شده و خوانایی آن را دشوار می‌سازد. برای کاهش پراکندگی فرکانسی در طیف هیلبرت، محققین نوعی هموارسازی پیشنهاد می‌کنند که البته با محدودیت همراه است.[۴]

در این نوشتار روندی پنج‌مرحله‌یی به‌عنوان جایگزین تبدیل کلاسیک هیلبرت ـ هوآنگ پیشنهاد می‌شود.[۱۶] در ادامه، کارآیی روش ارتقاءیافته در قالب چهار مثال بررسی می‌شود. در مثال اول توانایی روش ارتقاءیافته در افزایش صحت فرکانس آنی نشان داده شده است. در مثال دوم با تحلیل پاسخ حاصل از یک سیستم سازه‌یی تحت تحریک یک نوفه‌ی سفید، قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش صحت توزیع دامنه ـ فرکانس نشان داده شده است. در مثال سوم با تحلیل مؤلفه‌ی شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت زلزله‌ی اِل‌سِنترو (۱۹۴۰)، قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش خوانایی طیف زمان ـ فرکانس ـ دامنه‌ی سیگنال‌های دارای باند فرکانسی پهن مورد بررسی قرارگرفته است. در آخرین مثال نیز توانایی روش ارتقاءیافته در جابه‌جا کردن تابع فاز به‌میزان دقیقاً ۹۰ درجه نشان داده شده است. برای مشخص‌شدن تفاوت‌های دو روش کلاسیک و ارتقاءیافته هریک از آن‌ها به‌اختصار در قسمت‌های بعد شرح داده می‌شوند.

۲. تبدیل کلاسیک هیلبرت ـ هوآنگ

چنان که گفته شد، تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ از دو بخش تجزیه‌ی تجربی مودی و تحلیل طیفی هیلبرت تشکیل شده است. تجزیه‌ی تجربی مودی به‌عنوان قسمتی کلیدی در تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ، شرط لازم برای استفاده از تحلیل طیفی هیلبرت را فراهم می‌کند. سپس به‌وسیله‌ی تحلیل طیفی هیلبرت توزیع فرکانس و دامنه‌ی سیگنال به‌صورت متغیر با زمان به دست می‌آید.

۱.۲. تجزیه‌ی تجربی مودی

تجزیه‌ی تجربی مودی روشی تجربی برای تجزیه‌ی یک سیگنال به تعداد متناهی از توابع نوسانی مرتبط با عوامل فیزیکی سازنده‌ی سیگنال است که به آن‌ها توابع مودی ذاتی گفته می‌شود.[۴] شرایط هر یک از توابع مودی ذاتی عبارت است از: ۱. در کل محدوده‌ی زمانی سیگنال تعداد کل کمینه‌ها و بیشینه‌ها با تعداد تلاقی با صفرهای سیگنال برابر یا حداکثر یک عدد اختلاف داشته باشد؛ ۲. در هر لحظه از زمان، میانگین دامنه‌ی لحظه‌یی (پوش) تعریف‌شده بر روی بیشینه‌های نسبی و دامنه‌ی لحظه‌یی تعریف شده بر روی کمینه‌های نسبی برابر صفر باشد.

برای شروع عملیات تجزیه‌ی تجربی مودی، سیگنال مورد نظر باید دست‌کم یک زوج کمینه و بیشینه داشته باشد. روش تجزیه‌ی تجربی مودی سیگنالی ــ مانند $x(t)$ ــ را می‌توان در شش گام خلاصه کرد: ۱. کل کمینه‌ها و بیشینه‌های نسبی $x(t)$ تعیین شوند؛ ۲. بین بیشینه‌های نسبی (و نیز کمینه‌های نسبی) یک منحنی درجه سوم درون‌یاب عبور داده شود تا پوش بیشینه، e_{max}، (و نیز پوش کمینه، $e_{\min}$) به دست آید؛ ۳. میانگین پوش‌های بیشینه و کمینه، m_1، محاسبه شود؛ ۴. تفاضل m_1 از $x(t)$ محاسبه شود، که به آن اولین پیش‌تابع مودی ذاتی (h_1) گفته می‌شود. اگر h_1 شرط‌های یک تابع مودی ذاتی را ارضاء کند به‌عنوان اولین تابع مودی ذاتی انتخاب می‌شود. در غیر این صورت گام‌های یکم تا چهارم، موسوم به «عملیات غربال‌گری»، بر روی h_1 آن‌قدر تکرار می‌شود تا اولین تابع مودی ذاتی، c_1، حاصل شود؛ ۵. تفاضل c_1 از $x(t)$ محاسبه می‌شود تا اولین باقی‌مانده، r_1، به دست آید؛ ۶. گام‌های یکم تا چهارم بر روی r_1 مجدداً تکرار می‌شود تا جایی که n تابع مودی ذاتی استخراج شود. چون r_n فاقد یک زوج کمینه و بیشینه است، عملیات غربال‌گری متوقف می‌شود. حال سیگنال $x(t)$ به‌صورت رابطه‌ی ۱ تجزیه می‌شود:

$$x(t)=\sum_{i=1}^{n}c_i(t)+r_n(t) \qquad (۱)$$

از میان توابع مودی ذاتی، c_1 دارای بالاترین محتوای فرکانسی و c_n دارای پایین‌ترین محتوای فرکانسی است.

۲.۲. تحلیل طیفی هیلبرت

برای هر تابع $c(t)$ از کلاس L^p، تبدیل هیلبرت یا $y(t)$ چنین تعریف می‌شود:

$$y(t)=\frac{1}{\pi}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c(\tau)}{t-\tau}d\tau \qquad (۲)$$

که در آن P نشان‌دهنده‌ی مقدار ویژه‌ی کوشی انتگرال تکین است. برای تعریف تابع فاز، $\theta(t)$ ، سیگنالی تحلیلی متناظر با $c(t)$ تعریف می‌شود:

$$z(t)=c(t)+iy(t)=A(t)e^{i\theta(t)} \qquad (۳)$$

و در آن

$$A(t)=\sqrt{c^2(t)+y^2(t)},\qquad \theta(t)=\tan^{-1}\left(\frac{y(t)}{c(t)}\right) \qquad (۴)$$

$A(t)$ دامنه‌ی لحظه‌یی (پوش) و $\theta(t)$ تابع فاز نامیده می‌شود. فرکانس لحظه‌یی نیز به‌صورت مشتق تابع فاز تعریف می‌شود:

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\frac{d\theta(t)}{dt} \qquad (۵)$$

با داشتن تعاریف فوق، می‌توان $c(t)$ را چنین نوشت:

$$c(t)=\Re(z(t))=\Re(A(t)e^{i\theta(t)})=A(t)\,\cos\theta(t) \qquad (۶)$$

که $\Re(\cdot)$ نشان‌گر بخش حقیقی عدد مختلط است. اگر $c(t)$ را یک تابع مودی ذاتی در نظر بگیریم، در تحلیل طیفی هیلبرت هر تابع مودی ذاتی به‌صورت $A(t)\cos\theta(t)$ و تبدیل هیلبرت متناظر با آن نیز به‌صورت $A(t)\sin\theta(t)$ است؛ $A(t)$ تابعی همواره مثبت و $\theta(t)$ تابعی با مشتق همواره نامنفی است. با اعمال تبدیل هیلبرت به توابع مودی ذاتی سیگنال $x(t)$، می‌توان $x(t)$ را چنین بیان کرد:

$$x(t)=\Re\left\{\sum_{j=1}^{n}A_j(t)e^{i\int 2\pi f_j(t)dt}\right\} \qquad (۷)$$

چون r_n از الگوی تقریباً ثابتی پیروی می‌کند، فرکانس‌هایی نزدیک به صفر دارد و می‌توان آن را از (رابطه‌ی ۷) کنار گذاشت. با توجه به (رابطه‌ی ۷) می‌توان دامنه و فرکانس توابع مودی ذاتی را در یک نمودار سه‌بعدی به‌صورت متغیر با زمان نمایش داد، یا این‌که دامنه را به‌صورت تغییرات رنگ به نمودار دوبعدی زمان ـ فرکانس اضافه کرد. طیف به دست آمده از این طریق طیف هیلبرت سیگنال $x(t)$، $H(f,t)$، نامیده می‌شود. طیف حاشیه‌یی هیلبرت، $h(f)$، نیز چنین تعریف می‌شود:

$$h(f)=\int_0^T H(f,t)dt \qquad (۸)$$

۳.۲. ملزومات تحلیل طیفی هیلبرت

برای کاربرد تحلیل طیفی هیلبرت دست‌کم دو نیازمندی وجود دارد: همان‌گونه که بیان شد برای کسب فرکانس معنادار به‌وسیله‌ی تبدیل هیلبرت، تعریف تابع مودی ذاتی تنها یک شرط لازم است و باید دو شرط دیگر نیز مطابق قضایای بدروسین و نوتال برآورده شوند.

طبق قضیه‌ی بدروسین، تبدیل هیلبرت تابعی به‌صورت سمت راست رابطه‌ی ۶ را که به‌صورت حاصل‌ضرب دو تابع بیان می‌شود، تنها در صورتی که محتوای فرکانسی طیف‌های فوریه‌ی دو تابع $\cos\theta(t)$ و $A(t)$ گستره‌ی فرکانسی مشترک نداشته باشند و محدوده‌ی فرکانس‌های طیف فوریه‌ی $\cos\theta(t)$ بالاتر از محدوده‌ی فرکانس‌های طیف فوریه $A(t)$ باشد، می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۹ نوشت:

$$H\left[A(t)\cos\theta(t)\right] = A(t)H\left[\cos\theta(t)\right] \quad (۹)$$

شرایط این قضیه، برای استفاده از تبدیل هیلبرت محدودیت جدی ایجاد می‌کند. درصورت ارضاء نشدن این شرط بیان $z(t)$ به‌صورت (رابطه‌ی ۳) صحیح نیست؛ توابع فاز و دامنه با یکدیگر مخلوط می‌شوند؛ درنتیجه تابع فاز دچار اعوجاج شده و از میزان اعتماد به فرکانس حاصل کاسته خواهد شد. برای رفع این مشکل تبدیل هیلبرت نرمال‌شده با دامنه پیشنهاد شده است.[۱۴]

مراحل تبدیل هیلبرت نرمال‌شده با دامنه عبارت است‌از: ۱. انجام تجزیه‌ی تجربی مودی و به دست آوردن توابع مودی ذاتی؛ ۲. اتصال بیشینه‌های نسبی هر تابع مودی ذاتی با یک منحنی درجه‌ی سوم درون‌یاب به‌عنوان دامنه‌ی لحظه‌یی، $A(t)$؛ ۳. تقسیم هر تابع مودی ذاتی به دامنه‌ی لحظه‌یی‌اش و دست‌یابی به موج حامل، $\cos\theta(t)$، برای هر تابع ذاتی؛ ۴. اعمال تبدیل هیلبرت به موج حامل هر تابع مودی ذاتی و محاسبه‌ی فرکانس لحظه‌یی. حتی در صورت بی‌نقص بودن این روش، محدودیت مرتبط با قضیه‌ی نوتال کماکان وجود دارد.

مطابق قضیه‌ی نوتال، اگر در سیگنالی که به‌صورت سمت راست رابطه‌ی ۹ تعریف شده، $\theta(t)$ و $A(t)$ توابعی دلخواه باشند که لزوماً پهنای باند باریک ندارند، تبدیل هیلبرت مقدار فاز را به میزان دقیقاً ۹۰ درجه جابه‌جا نمی‌کند[۱۴] (یعنی: $H\left[\cos\theta(t)\right] \neq \sin\theta(t)$)، که در این صورت بیان $\theta(t)$ به‌صورت رابطه‌ی ۴ و در نتیجه فرکانس آنی حاصل نیز صحیح نیست. برای در نظر داشتن خطای ناشی از محدودیت قضیه‌ی نوتال، محققین شاخص خطایی را براساس تبدیل هیلبرت نرمال‌شده با دامنه و به‌صورت متغیر با زمان پیشنهاد کردند.[۱۴] اگرچه برای عدم برخورد با محدودیت قضیه‌ی نوتال، اِعمال تابع $\cos^{-1}$ به موج حامل برای محاسبه‌ی تابع فاز پیشنهاد شده،[۱۷] به‌دلیل بی‌نقص نبودن نرمال‌سازی، مقادیر موج حامل به‌طور کامل محدود به دامنه‌ی [۱،۱-] نمی‌شود. بنابراین استفاده از تابع $\cos^{-1}$ برای به دست آوردن فرکانس لحظه‌یی هنوز با مشکل مواجه است.

علاوه براین، تحقیقات انجام‌شده نشان داده است که روش تجزیه‌ی تجربی مودی معادل با یک بانک فیلتر دوتایی است که در آن توابع مودی ذاتی با نمایه‌ی کوچک‌تر پهنای فرکانس بیشتری دارند.[۹و۸] این موضوع در برخورد با سیگنال‌های دارای باند پهن فرکانسی، باعث افزایش پراکندگی فرکانسی در فرکانس‌های بالاتر طیف هیلبرت می‌شود و درنتیجه خوانایی طیف هیلبرت کاهش می‌یابد. برای رفع این مشکل نوعی هموارسازی پیشنهاد شده است[۴] که این روش هم دارای محدودیت است.

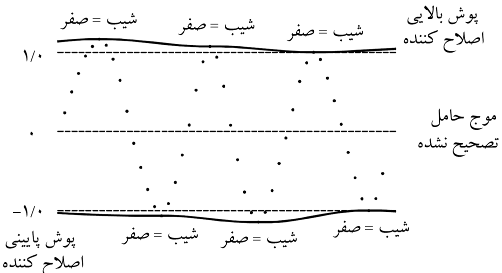
۳. روش ارتقاءیافته برای تحلیل فرکانسی توابع مودی ذاتی

در نوشتار حاضر روش ارتقاءیافته برای تحلیل فرکانسی توابع مودی ذاتی پیشنهاد می‌شود.[۱۶] هر تابع مودی ذاتی در این روش همانند تحلیل طیفی هیلبرت به‌صورت $A(t)\cos\theta(t)$ در نظر گرفته می‌شود، اما برای محاسبه‌ی $A(t)$ و $\theta(t)$ از تبدیل هیلبرت استفاده نمی‌شود. روش ارتقاءیافته به‌عنوان جایگزین تحلیل طیفی هیلبرت از پنج گام تشکیل شده است: ۱. پس از اعمال تجزیه‌ی تجربی مودی، دامنه‌ی لحظه‌یی، $A(t)$، از طریق روش تبدیل هیلبرت نرمال‌شده با دامنه محاسبه می‌شود. آنگاه موج حامل به دست آمده پس از انجام یک روش تصحیح پیشنهادی به مقادیر [۱،۱-] محدود می‌شود؛ ۲. تابع صعودی فاز از طریق اعمال تابع $\cos^{-1}$ به موج حامل تصحیح‌شده در گام پیشین محاسبه می‌شود؛ ۳. یک منحنی هموارکننده از نوع درجه سوم به تابع صعودی فاز منطبق می‌شود؛ ۴. مشتق تابع هموارشده‌ی فاز برای حصول فرکانس آنی محاسبه می‌شود؛ ۵. حال با داشتن دامنه‌ی آنی و فرکانس آنی، طیف ارتقاءیافته‌ی سیگنال مورد مطالعه فراهم می‌شود. روش پیشنهادی ضمن سادگی، فارغ از محدودیت‌های مرتبط با تحلیل طیفی هیلبرت است.

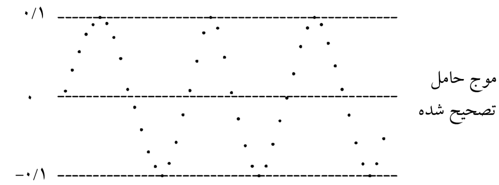
در ادامه تصحیح موج حامل و هموارسازی تابع فاز به‌عنوان دو بخش مهم روش ارتقاءیافته شرح داده می‌شوند.

۱.۳. تصحیح مقادیر موج حامل

در روش ارتقاءیافته پیشنهادی برای دست‌یابی به موج حامل، مقادیر مثبت تابع مودی ذاتی به منحنی درجه‌ی سوم درون‌یاب عبورکننده از بیشینه‌های محلی و مقادیر منفی آن به قدر مطلق منحنی درجه سوم درون‌یاب عبورکننده از کمینه‌های محلی نرمال می‌شوند. با توجه به امکان وقوع تقاطع بین منحنی‌های درون‌یاب و تابع مودی ذاتی، مقادیر بیشینه و کمینه‌ی موج حامل لزوماً به [۱،۱-] محدود نمی‌شوند. برای به دست آوردن مقادیر تابع فاز به‌کمک اعمال تابع $\cos^{-1}$ بر مقادیر موج حامل، لازم است تا به‌طریقی مقادیر موج حامل به [۱،۱-] محدود شوند. یک موج حامل بدون نقص به‌صورتی است که اولاً در آن مقادیر بیشینه و کمینه محدود به [۱،۱-] هستند و ثانیاً شیب نیز در این نقاط برابر صفر است. از همین خواص می‌توان برای تصحیح موج حاملِ حاصل از پوش‌های تعریف‌شده استفاده کرد. بنابراین با داشتن چهار شرط برای دو بیشینه‌ی نسبی متوالی (و نیز دو کمینه‌ی نسبی متوالی) از موج حامل، پوش اصلاح‌کننده تعریف می‌شود. برای این کار از یک چندجمله‌یی درجه سوم استفاده می‌شود. شکل کلی پوش‌های اصلاح‌کننده در شکل ۱الف و موج حامل تصحیح‌شده‌ی حاصل از آن در شکل ۱ب نشان داده شده است. با داشتن پوش‌های اصلاح‌کننده و برای تصحیح موج حامل، مقادیر مثبت موج حامل به پوش بالایی اصلاح‌کننده و مقادیر منفی آن به قدرمطلق پوش پایینی اصلاح‌کننده نرمال می‌شوند. همان‌طور که در شکل ۱الف مشخص است، حالت منحنی‌های اصلاح‌کننده به‌گونه‌یی است که احتمال تداخل آن‌ها با موج حامل کم است، اما در صورتی که تداخلی رخ دهد، ممکن است مقادیر بیشینه و کمینه‌ی اضافه و غیرواقعی ایجاد شوند. در این صورت لازم است با انجام یک هموارسازی مناسب مقادیر غیرواقعی حذف شود. با توجه به بهره‌گیری روش ارتقاءیافته از نرمال‌سازی به دامنه‌ی لحظه‌یی (مانند آنچه که در تبدیل هیلبرت نرمال‌شده با دامنه انجام می‌شود)، محدودیتی از جانب قضیه‌ی بدروسین متوجه روش ارتقاءیافته نیست.

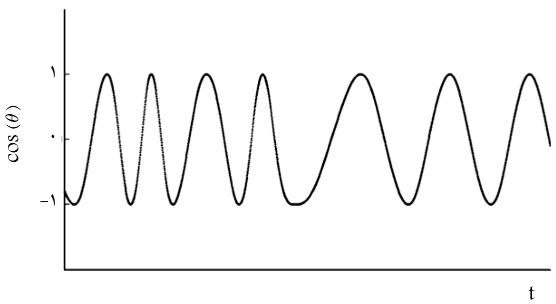


الف) قبل از اعمال تصحیح شده؛

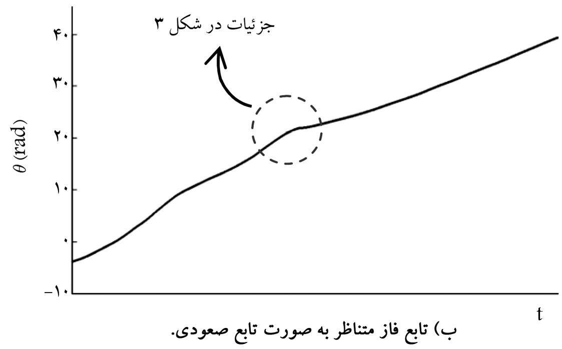


ب) بعد از اعمال تصحیح.

شکل ۱. تصحیح موج حامل به‌وسیله‌ی منحنی‌های اصلاح‌کننده.



الف) صورت کلی یک موج حامل تصحیح شده؛



ب) تابع فاز متناظر به صورت تابع صعودی.

شکل ۲. محاسبه‌ی تابع فاز به‌صورت تابعی صعودی به‌وسیله‌ی تابع $\cos^{-1}$.

با انجام تصحیح فوق، موج حاملِ حاصل در [۱،۱-] قرار می‌گیرد و می‌توان تابع $\cos^{-1}$ را به آن اعمال کرد تا تابع فاز، $\theta(t)$، مشخص شود. با توجه به استفاده از تابع $\cos^{-1}$ در محاسبه‌ی $\theta(t)$، رابطه‌ی $\sin^2\theta(t)+\cos^2\theta(t)=1$ برقرار است. بنابراین روش ارتقاءیافته از جانب قضیه‌ی نوتال نیز محدود نمی‌شود. در شکل ۲الف شمای کلیِ یک موج حاملِ تصحیح‌شده نشان داده شده که در آن تابع فاز با اعمال تابع $\cos^{-1}$ و افزودن مضارب π، به‌صورت تابع صعودی (شکل ۲ب) به‌دست آمده است. مطابق تعریف، برای محاسبه‌ی فرکانس لحظه‌یی باید مشتق زمانی تابع لحظه‌یی فاز محاسبه شود، اما اگر به‌هر دلیل تابع فاز مغشوش باشد، محاسبه‌ی فرکانس منجر به پراکندگی زیاد در تابع فرکانس می‌شود. در این مطالعه برای مقابله با این موضوع تابع گسسته‌ی فاز با یک منحنی هموارکننده جایگزین می‌شود.

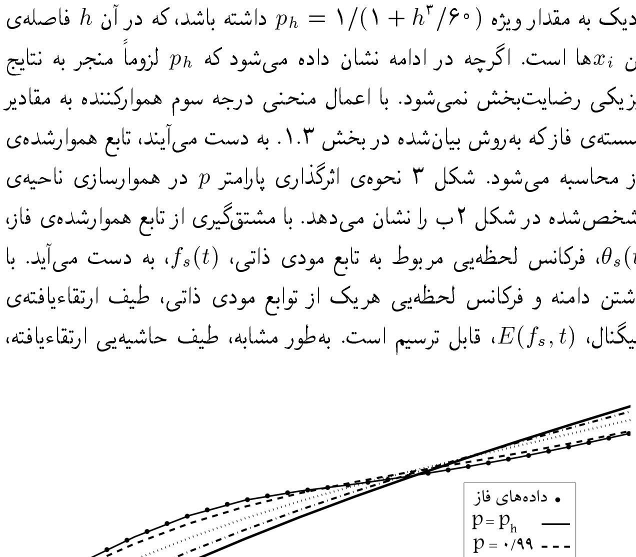
۲.۳. هموارسازی تابع فاز

یک منحنی درجه سوم درون‌یاب از تعدادی چندجمله‌یی درجه سوم به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ تشکیل شده است که مجموعه‌یی از نقاط گسسته (گره‌ها)، مانند (x_i, y_i) را به هم متصل می‌کند.[۱۸] منحنی درجه سوم درون‌یاب به‌گونه‌یی تعریف می‌شود که در گره‌ها مشتقات یکم و دوم پیوسته باشد. اگر گره‌ها معرف یک فرایند آلوده به نوفه باشند، تابع درون‌یابِ مبتنی بر این گره‌ها تحت تأثیر ماهیت نوفه، دچار پراکندگی شدیدی می‌شود. در این صورت تابع درون‌یاب، تخمین درستی از فرایند اصلی ــ که فاقد نوفه است ــ نخواهد بود. برای این که تخمین فرایند اصلی اثرپذیری کم‌تری از نوفه داشته باشد، لازم است به‌جای تابع درون‌یاب، تابعی هموارکننده با عبور از میان گره‌ها (و نه از خود گره‌ها) فرایند اصلی را تخمین بزند. با توجه به فرض پیوستگی مشتق یکم در تابع فرکانس، در این نوشتار از یک منحنی درجه‌ی سوم هموارکننده به‌منظور هموارسازی فاز استفاده می‌شود. تعریف منحنی درجه‌ی سوم هموارکننده، $S(p)$، به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ است.[۱۸]

$$C(x)=a_i+b_ix+c_ix^2+d_ix^3 \quad if \quad x_i\le x<x_{i+1} \tag{10}$$

$$S(p)=p\sum_i w_i\left[y_i-C(x_i)\right]^2+(1-p)\int\lambda(z)C''(z)^2dz \tag{11}$$

در تعریف فوق، p پارامتر هموارسازی نامیده می‌شود که مقادیر پیشنهادی برای آن در بازه [۰،۱] قرار دارد و f نیز منحنی درجه سوم درون‌یاب است. w و λ به‌ترتیب بردار وزن و تابع وزن هستند که در این مطالعه برابر ۱ در نظر گرفته شده‌اند. در این تعریف، ضرایب $C(x)$ به‌گونه‌یی محاسبه می‌شوند که سمت راست رابطه‌ی ۱۱ کمینه شود. به‌ازای $p=1$ در رابطه‌ی ۱۱، منحنی درجه سوم هموارکننده به منحنی درجه سوم درون‌یاب تبدیل می‌شود. در مقابل، به‌ازای $p=0$ فقط جمله‌ی دارای انتگرال باید کمینه شود که این حالت معادل با درون‌یابی خطی y به‌ازای مقادیر x است. مشخص است که با انتخاب مقداری بین ۰ و ۱ برای p، منحنی درجه سوم هموارکننده با نوعی تعادل بین درون‌یابی خطی و درون‌یابی درجه سوم از میان گره‌ها عبور می‌کند. از نظر ریاضی، حالت مناسبِ انطباق منحنی هموارکننده هنگامی رخ می‌دهد که p مقداری نزدیک به مقدار ویژه $p_h=1/(1+h^3/60)$ داشته باشد، که در آن h فاصله‌ی بین x_iها است. اگرچه در ادامه نشان داده می‌شود که p_h لزوماً منجر به نتایج فیزیکی رضایت‌بخش نمی‌شود. با اعمال منحنی درجه سوم هموارکننده به مقادیر گسسته‌ی فاز که به‌روش بیان‌شده در بخش ۱.۳. به دست می‌آیند، تابع هموارشده‌ی فاز محاسبه می‌شود. شکل ۳ نحوه‌ی اثرگذاری پارامتر p در هموارسازی ناحیه‌ی مشخص‌شده در شکل ۲ب را نشان می‌دهد. با مشتق‌گیری از تابع هموارشده‌ی فاز، $\theta_s(t)$، فرکانس لحظه‌یی مربوط به تابع مودی ذاتی، $f_s(t)$، به دست می‌آید. با داشتن دامنه و فرکانس لحظه‌یی هریک از توابع مودی ذاتی، طیف ارتقاءیافته‌ی سیگنال، $E(f_s, t)$، قابل ترسیم است. به‌طور مشابه، طیف حاشیه‌یی ارتقاءیافته،



شکل ۳. اثر پارامتر p بر هموارسازی تابع صعودی فاز.

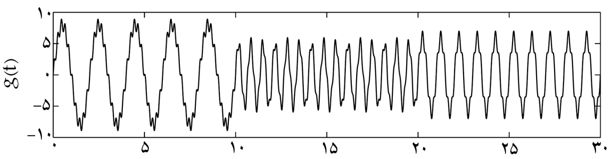
$e(f_s)$، به‌صورت $\int_{0}^{T} E(f_s,t)dt$ قابل تعریف است. در پژوهش حاضر از مقدار یکسانِ پارامتر هموارسازی برای تمام توابع مودی ذاتی استفاده می‌شود.

۴. بحث و بررسیِ نتایج حاصل از روش ارتقاءیافته‌ی هیلبرت ـ هوآنگ

در این بخش قابلیت روش ارتقاءیافته در قالب چهار مثال مورد بررسی قرارگرفته است. در مثال اول با ارائه‌ی یک سیگنال دومؤلفه‌یی، قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش صحت فرکانس لحظه‌یی نشان داده می‌شود. در مثال دوم، با تحلیل پاسخ‌های یک سیستم سه درجه آزاد خطی تحریک‌شده با یک نوفه‌ی سفید، قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش صحت توزیع دامنه ـ فرکانس سیگنال مورد بررسی قرارگرفته است. در مثال سوم، قابلیت‌های روش ارتقاءیافته در ارتقاء خوانایی طیف زمان ـ فرکانس ـ دامنه سیگنال‌های دارای باند فرکانسی پهن با تحلیل مؤلفه‌ی شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰) مورد ارزیابی قرارگرفته است. و بالاخره در مثال چهارم، توانایی روش ارتقاءیافته در جابه‌جایی تابع فاز به میزان دقیقاً ۹۰ درجه نشان داده شده است. در هریک از این مثال‌ها نتایج حاصل از تبدیل کلاسیک هیلبرت ـ هوآنگ نیز به‌منظور مقایسه ارائه شده است.

۱.۴. قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش صحت توزیع زمان ـ دامنه ـ فرکانس

سیگنال $g(t)$ را مطابق تعریف رابطه‌ی ۱۲ در نظر بگیرید. این سیگنال حاوی یک مؤلفه با فرکانس ثابت ۵ Hz و مؤلفه‌ی دیگر با فرکانس متغیر ۰٫۵ Hz و ۱٫۵ Hz و ۱ Hz است. $g(t)$ با نرخ نمونه‌برداری ۰٫۰۰۲ s در شکل ۴ نشان داده شده است.

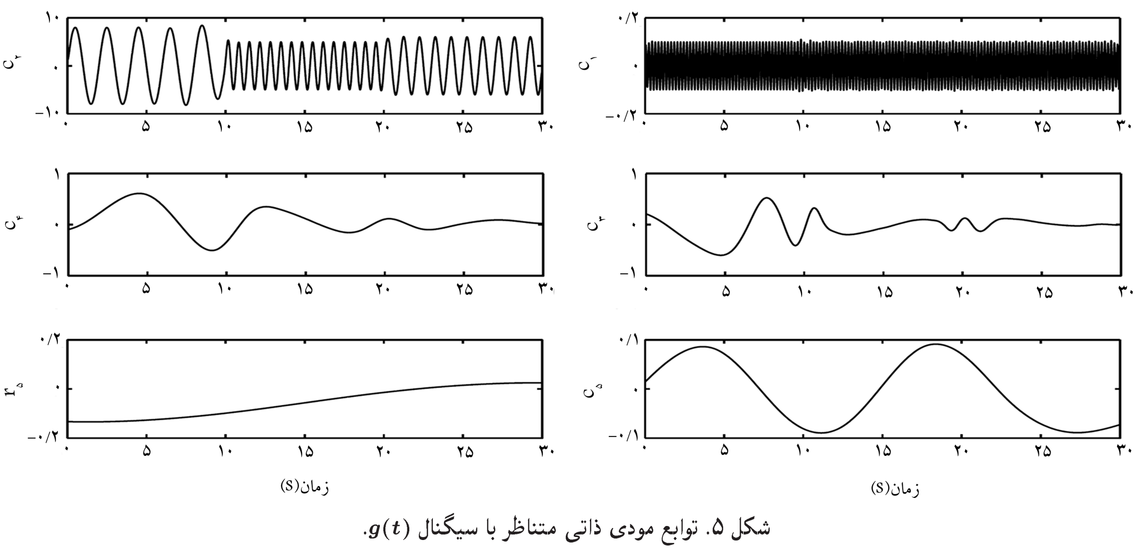


شکل ۴. سیگنال $g(t)$.

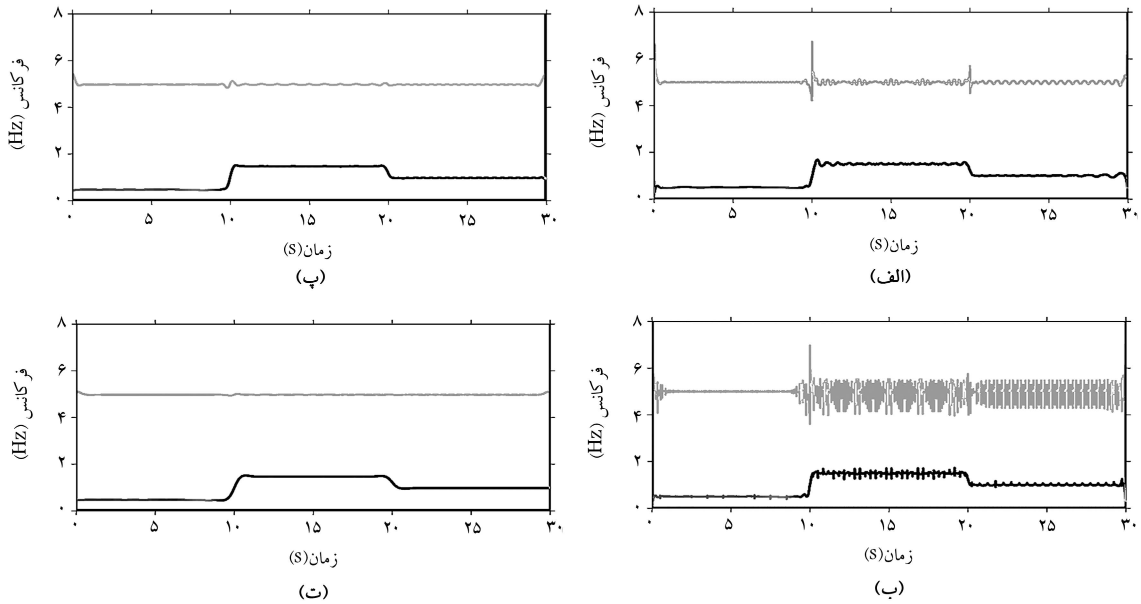
$$g(t)=\begin{cases} 8\sin(\pi t)+\sin(10\pi t) & 0\le t<10 \\ 5\sin(3\pi t)+\sin(10\pi t) & 10\le t<20 \\ 6\sin(2\pi t)+\sin(10\pi t) & 20\le t<30 \end{cases} \qquad (12)$$

توابع مودی ذاتی متناظر با $g(t)$ که از تجزیه‌ی تجربی مودی به دست آمده‌اند در شکل ۵ نشان داده شده است. چون تجزیه‌ی تجربی مودی از نظر عددی بی‌نقص عمل نمی‌کند، سه تابع مودی ذاتی غیر واقعی، علاوه بر توابع اول و دوم، ایجاد شده‌اند. طیف‌های هیلبرت ـ هوآنگ کلاسیک و ارتقاءیافته متناظر با دو تابع مودی ذاتی اول و دوم $g(t)$ در شکل ۶ نمایش داده شده‌اند. در شکل ۶الف اثرپذیری تجزیه‌ی تجربی مودی و همچنین تبدیل هیلبرت از تغییرات ناگهانی دامنه و فرکانس نشان داده شده است.[۴] همچنین فرکانس تابع مودی ذاتی اول در قسمت‌های میانی دچار پراکندگی شده است که این مورد را نیز می‌توان به بی‌نقص نبودن عملکرد تجزیه‌ی تجربی مودی نسبت داد.

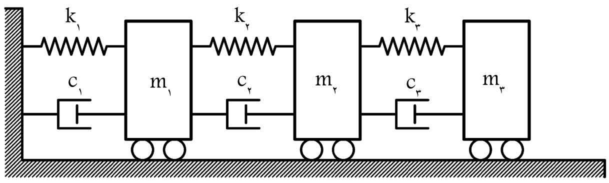
اثر انحراف دو تابع مودی ذاتی اول و دوم از تعریف ریاضی آن‌ها با انتخاب p_h در طیف شکل ۶ب به‌صورت بارزتری پدیدار شده است. این موضوع نشان می‌دهد که روش ارتقاءیافته با مقدار ویژه‌ی پارامتر هموارسازی در مقابل تأثیرات منفی ناشی از نقص عملکرد تجزیه تجربی مودی، حساس‌تر از تبدیل هیلبرت است و باعث انعکاس تمامی نوسات فرکانسی، از جمله نوسانات فاقد معنای فیزیکی، نیز می‌شود. روش ارتقاءیافته قادر است با تنظیم پارامتر هموارسازی از اثر نوسانات فاقد معنای فیزیکی در فرکانس لحظه‌یی توابع مودی ذاتی بکاهد. با کاهش مقدار پارامتر هموارسازی در شکل ۶پ به ۰٫۹۵، تأثیرات منفی یادشده به‌طور چشمگیری کاهش می‌یابند. چنان که مشاهده می‌شود اثر تغییرات ناگهانی فرکانس ناچیز شده و پراکندگی‌های ناشی از نقص عملکرد تجزیه‌ی تجربی مودی دیده نمی‌شود. با کاهش بیشتر پارامتر هموارسازی در شکل ۶ت به ۰٫۵۰، طیف ارتقاءیافته هموارتر شده اما در محدوده‌های تغییر فرکانس دقت پاسخ کاهش یافته است. این مطلب به‌طور کلی نشان‌گر آن است که حد مشخصی برای تعریف پارامتر هموارسازی وجود دارد که از حوصله‌ی این بحث خارج است.



شکل ۵. توابع مودی ذاتی متناظر با سیگنال $g(t)$.



شکل ۶. طیف‌های هیلبرت ـ هوآنگ کلاسیک و هیلبرت ـ هوآنگ ارتقاءیافته متناظر با دو تابع مودی ذاتی اول $g(t)$.



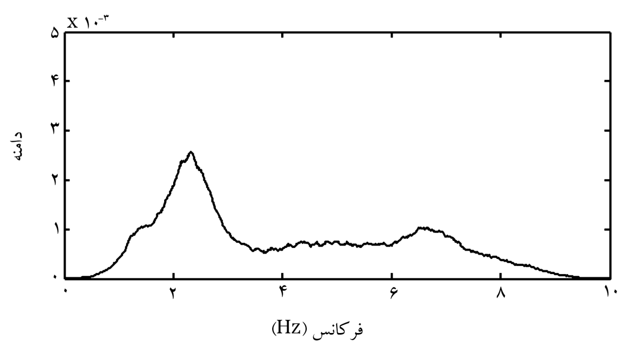
شکل ۷. سازه سه درجه آزاد خطی.

۲.۴. قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش صحت توزیع دامنه ـ فرکانس

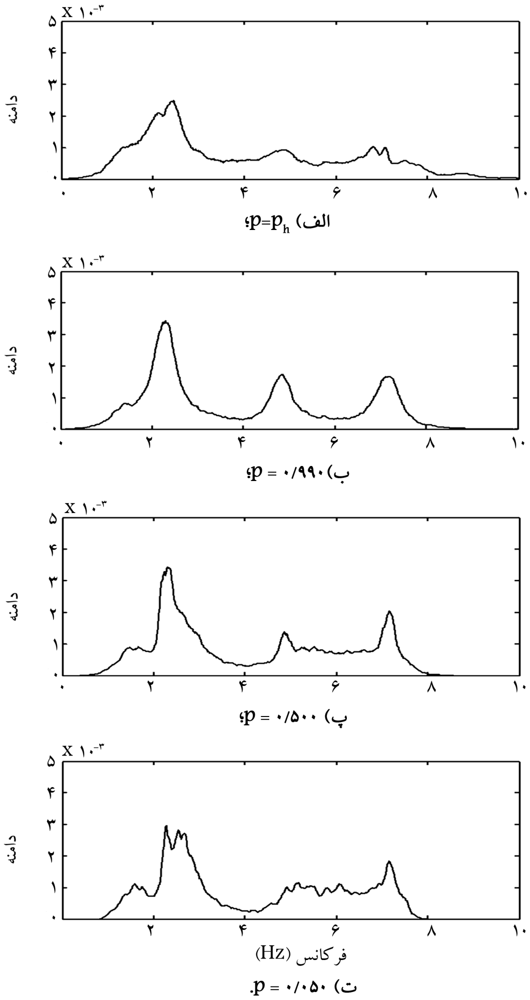
سازه‌ی سه درجه آزاد خطی به‌صورت شکل ۷ در نظر گرفته شده است. مشخصات جرم و سختی سازه عبارت‌اند از: $m_1 = m_2 = 2m_3 = 2\,\mathrm{kg}$، $k_1/3 = k_2/2 = k_3 = 631.7\,\mathrm{N/m}$. با این مشخصات فرکانس‌های طبیعی سیستم به‌ترتیب برابر Hz ۲٫۲۴، Hz ۴٫۹۰ و Hz ۷٫۱۴ هرتز هستند. با فرض میرایی رایلی برای سازه، نسبت میرایی متناظر با مودهای اول و دوم به‌ترتیب برابر ۰٫۰۷ و ۰٫۰۳ در نظر گرفته شده است. برای تحریک سازه از یک نوفه‌ی سفید به‌مدت s ۶۰۰ با بیشینه شتاب g ۰٫۰۰۰۱ و نرخ نمونه‌برداری s ۰٫۰۱۲۵ استفاده شده است. پس از محاسبه‌ی پاسخ‌ها، برای کاهش حجم محاسبات، کاهش نرخ نمونه‌برداری به s ۰٫۰۵ به پاسخ‌ها اعمال شد که از همین پاسخ‌ها برای انجام تحلیل استفاده شده است.

مطابق اصول دینامیک سازه‌ها، در بیان دامنه ـ فرکانس از پاسخ دینامیکی سازه‌های خطی با میرایی کوچک، قله‌ها در اطراف فرکانس‌های طبیعی شکل می‌گیرند. با توجه به قابلیت طیف حاشیه‌یی هیلبرت و همچنین طیف حاشیه‌یی ارتقاءیافته در ارائه‌ی طیف دامنه ـ فرکانس از سیگنال، در مثال حاضر از آن‌ها برای تحلیل پاسخ‌های سازه سه درجه آزاد استفاده می‌شود. برای انجام تحلیل دامنه ـ فرکانس، تجزیه‌ی تجربی مودی به پاسخ هریک از درجات آزادی اعمال شد تا توابع مودی ذاتی به دست آیند. سپس یک طیف حاشیه‌یی برای پاسخ هریک از درجات آزادی محاسبه شد و بین سه طیف به دست آمده یک میانگین‌گیری انجام گرفت تا در نهایت یک طیف حاشیه‌یی میانگین برای سازه به دست آید. باتوجه به محدوده‌ی فرکانسی توابع مودی ذاتی در مثال حاضر، فقط از سه تابع مودی ذاتی اول همراه با هموارسازی، برای ترسیم طیف حاشیه‌یی میانگین استفاده شده است. شکل ۸ طیف حاشیه‌یی میانگین حاصل از تبدیل هیلبرت را نشان می‌دهد که در این طیف مشخصاً دو قله به چشم می‌خورد. با توجه به محدودیت‌های تبدیل هیلبرت صحت نتایج از طریق مقایسه با نتایج روش ارتقاءیافته مورد بررسی قرار می‌گیرد.

در شکل ۹ طیف‌های حاشیه‌یی میانگین حاصل از روش ارتقاءیافته به‌ازای مقادیر مختلفی از پارامتر هموارسازی نشان داده شده است. در شکل ۹الف با تعریف $p = p_h$ مشابه شکل ۸ پاسخ مناسبی به دست نیامده است. با اندکی کاهشِ پارامتر هموارسازی به ۰٫۹۹۰ در شکل ۹ب، مشخصاً سه قله در طیف ظاهر شده است. با کاهش بیشتر پارامتر هموارسازی از ۰٫۹۹۰ به ۰٫۰۵۰ در شکل‌های ۹ب تا ۹ت به‌تدریج از صحت توزیع دامنه ـ فرکانس کاسته می‌شود، به‌طوری که درکنار سه قله‌ی مذکور قله‌های فاقد معنای فیزیکی نیز ظاهر شده‌اند. مقایسه‌ی طیف‌های شکل ۹ نشان می‌دهد که روش ارتقاءیافته از طریق کاهش پارامتر هموارسازی به مقادیری مناسب (مثلاً ۰٫۹۹۰) قادر به کاهش تأثیرات فاقد معنای فیزیکی و افزایش



شکل ۸. طیف حاشیه‌یی میانگین حاصل از تبدیل هیلبرت.



شکل ۹. طیف حاشیه‌یی میانگین حاصل از روش ارتقاءیافته.

صحت طیف دامنه ـ فرکانس است. مقادیر متناظر با قله‌های شکل‌های ۸ و ۹ در جدول ۱ ارائه شده است.

از مقایسه‌ی مقادیر فرکانسی جدول ۱ با مقادیر فرکانس طبیعی سازه‌ی مورد نظر مشخص می‌شود که استفاده از تحلیل طیفی هیلبرت یا استفاده از پارامتر هموارسازی نامناسب در روش ارتقاءیافته (مثلاً p_h)، باعث ایجاد خطا در توزیع دامنه ـ فرکانس سیگنال می‌شود. علاوه بر این، چون فرکانس‌های طبیعی فقط تابع خواص سازه‌اند، فرکانس‌های متناظر با قله‌ها در جدول ۱ نسبت به تغییرات پارامتر هموارسازی حساسیت چندانی ندارند.

۳.۴. قابلیت روش ارتقاءیافته در بهبود خوانایی طیف زمان ـ دامنه ـ فرکانس سیگنال‌های با باند فرکانسی پهن

در شکل ۱۰ مؤلفه‌ی شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰) به‌همراه ۳ تابع مودی ذاتی اول آن نشان داده شده است.[۱۵]

چنان‌که مشخص است مقادیر فرکانس توابع مودی ذاتی با افزایش نمایه‌ی آن‌ها کاهش می‌یابد و پنج تابع مودی ذاتی اول بیشترین سهم از دامنه‌ی (انرژی) کل سیگنال را به همراه دارند. در شکل ۱۱ طیف‌های مؤلفه‌ی شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰) به‌ازای مقادیر متفاوت پارامتر هموارسازی نمایش

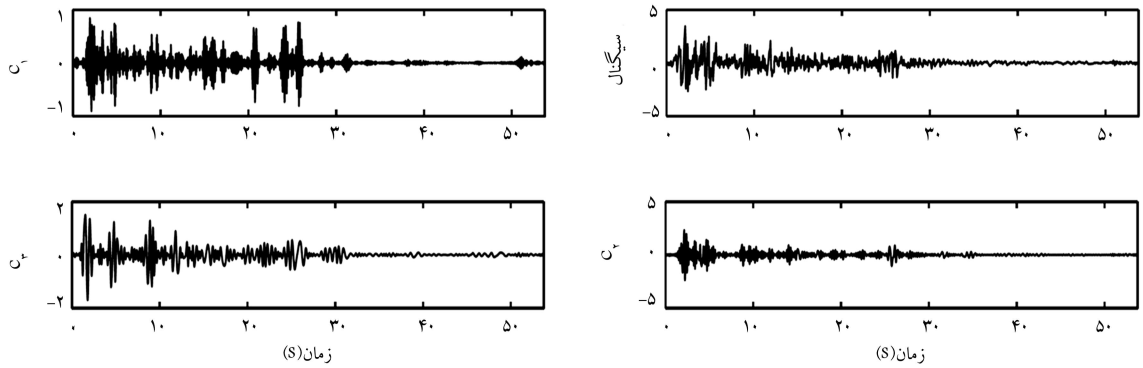
جدول ۱. مقادیر فرکانسی متناظر با قله‌ها برای سازه سه درجه آزاد.

مود		اول	دوم	سوم
فرکانس متناظر با قله‌های حاصل از روش ارتقاء یافته (Hz)	$p = p_h$	۲٫۴۶	۴٫۸۴	۶٫۸۲
	$p = ۰٫۹۹۹$	۲٫۳۲	۴٫۷۹	۶٫۳۷
	$p = ۰٫۹۹۵$	۲٫۳۰	۴٫۸۳	۷٫۲۴
	$p = ۰٫۹۹۰$	۲٫۳۰	۴٫۸۶	۷٫۱۶
	$p = ۰٫۹۵۰$	۲٫۳۰	۴٫۸۴	۷٫۱۵
	$p = ۰٫۹۰۰$	۲٫۳۰	۴٫۸۲	۷٫۱۶
	$p = ۰٫۷۰۰$	۲٫۳۰	۴٫۸۴	۷٫۱۵
	$p = ۰٫۵۰۰$	۲٫۳۱	۴٫۸۶	۷٫۱۶
	$p = ۰٫۳۰۰$	۲٫۲۹	۴٫۸۹	۷٫۱۲
	$p = ۰٫۰۵۰$	۲٫۲۸	-	۷٫۱۶
فرکانس متناظر با قله‌های حاصل از تبدیل هیلبرت (Hz)		۲٫۳۲	-	۶٫۶۶

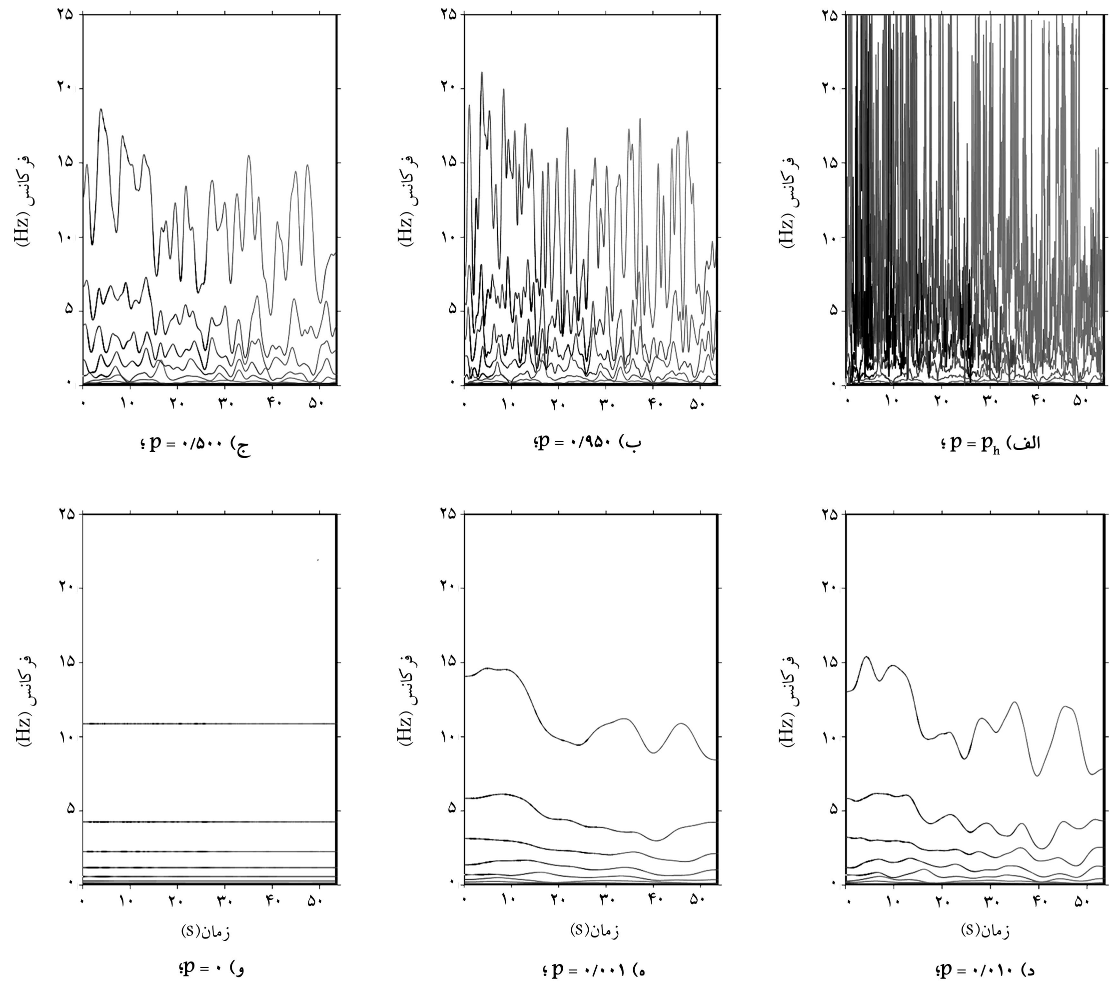
داده شده است. مشاهده می‌شود که میزان پراکندگی فرکانس توابع مودی ذاتی کاملاً با پارامتر هموارسازی مرتبط است.

در شکل ۱۱الف انتخاب مقدار ویژه‌ی پارامتر هموارسازی باعث ایجاد پراکندگی زیادی در فرکانس‌های چند تابع مودی ذاتی اول می‌شود که به‌دنبال آن وضوح طیف حاصل به‌طور چشم‌گیری کاهش می‌یابد، به‌طوری که در آن نحوه‌ی توزیع دامنه نسبت به زمان و فرکانس مشخص نیست. چنان که پیش‌تر اشاره‌شد، با کاهش نمایه‌ی توابع مودی ذاتی، پهنای فرکانسی آن‌ها ذاتاً افزایش می‌یابد. بنابراین فرکانس‌های متعلق به آن‌ها با پراکندگی زیادی در طیف ظاهر می‌شود و به دنبال آن، خوانایی طیف به‌شدت افت می‌کند. برای افزایش خوانایی طیف لازم است از میزان پراکندگی فرکانسی در طیف کاسته شود. این کار در روش ارتقاءیافته با کاهش پارامتر هموارسازی از مقدار p_h امکان‌پذیر است. در شکل ۱۱ب پارامتر هموارسازی به ۰٫۹۵ کاهش داده شده، که در آن روند تغییرات دامنه به‌صورت تغییرات رنگ نسبت به زمان و فرکانس کاملاً قابل تشخیص است. با کاهش مقدار پارامتر هموارسازی از ۰٫۹۵ تا صفر، در (شکل ۱۱ج تا ۱۱و) مرتباً از میزان جزئیات فرکانسی کاسته می‌شود؛ این امر به درک بهتر الگوی غالب تغییرات فرکانس در هر تابع مودی ذاتی کمک زیادی می‌کند. بسته به میزان کاهش پارامتر هموارسازی می‌توان به الگویی غالب از تغییرات فرکانس دست یافت. این امتیاز ویژه‌یی است که روش ارتقاءیافته در تحلیل سیگنال‌های پیچیده در اختیار قرار می‌دهد. در حالت حدی که پارامتر هموارسازی برابر صفر است، برای هر تابع مودی ذاتی درکل بازه زمانی تنها یک فرکانس متوسط حاصل می‌شود (شکل ۱۱و). با انجام یک تحلیل ساده می‌توان نشان داد که به‌ازای $p = ۰$ شیب خط راست منطبق شونده به فاز تابع مودی ذاتی برابر با میانگین فرکانس آن درکل بازه زمانی است.

طیف‌های حاصل از تبدیل کلاسیک و ارتقاءیافته هیلبرت ـ هوآنگ به‌همراه طیف حاصل از مدل VARMA [۱۵] در شکل ۱۲ نشان داده شده است. در شکل ۱۲الف، صرف نظر از محدودیت‌های ریاضی تبدیل هیلبرت، به‌دلیل پهنای



شکل ۱۰. شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰، مؤلفه شمال ـ جنوب) برحسب m/s^2 و ۳ تابع مودی ذاتی اول آن.

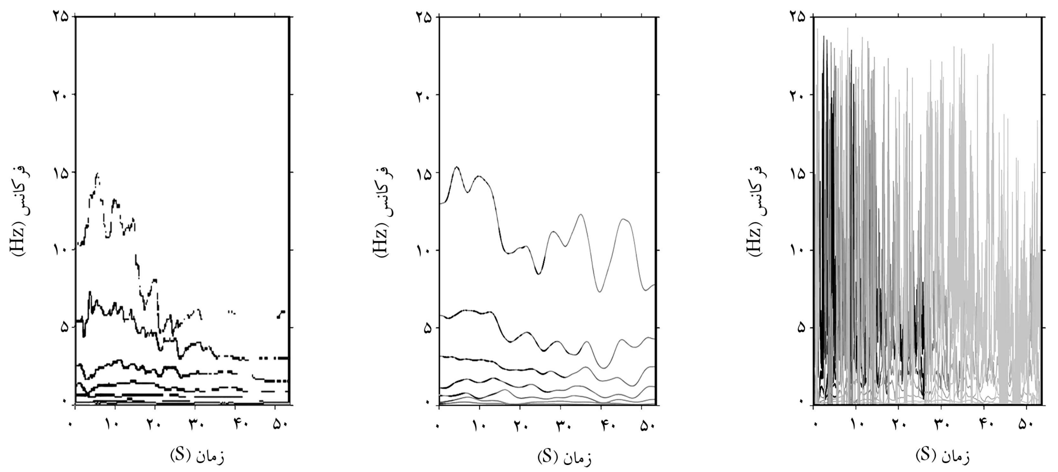


شکل ۱۱. طیف‌های ارتقاءیافته مؤلفه شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰) حاصل از روش ارتقاءیافته.

باند فرکانسی در چند تابع مودی ذاتی اول، خوانایی طیف همانند طیف شکل ۱۱الف کاملاً مخدوش است و در آن توزیع دامنه نسبت به زمان و فرکانس مشخص نیست. طیف ارتقاءیافته با مقدار پارامتر هموارسازی برابر ۰٫۰۱ در شکل ۱۲ب الگویی با وضوح مناسب از تغییرات فرکانس را نشان می‌دهد. همان‌طورکه مشاهده می‌شود این طیف در محدوده‌ی فرکانسی پایین شباهتی نسبی با طیف شکل ۱۲ج دارد.

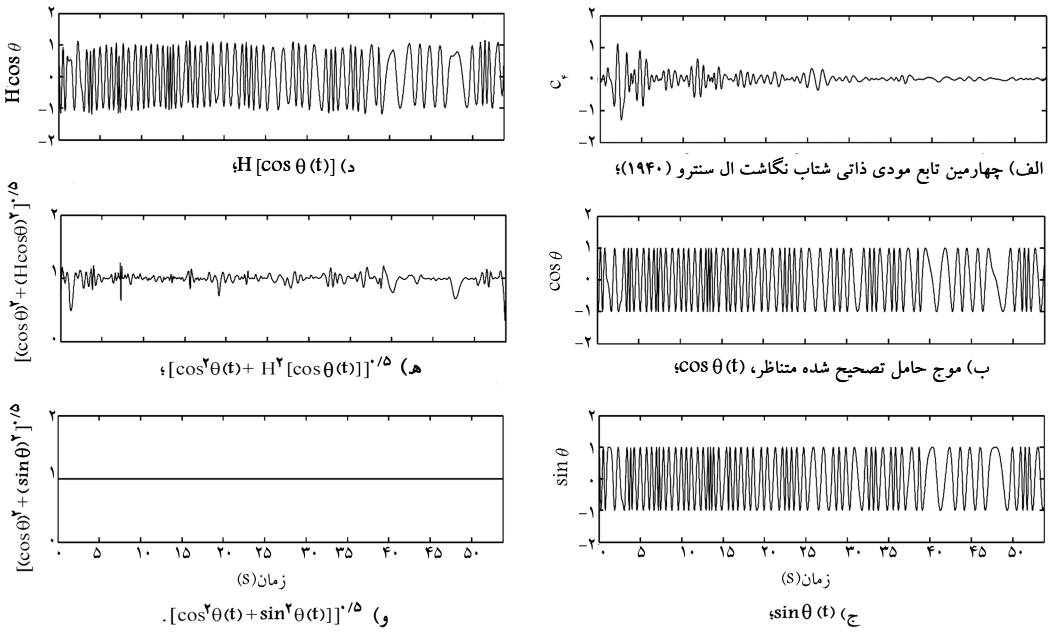
۴.۴. توانایی روش ارتقاءیافته در جابه‌جاکردن تابع فاز به میزان دقیقاً ۹۰ درجه

چنان که بیان شد در روش ارتقاءیافته مقادیر تابع فاز از طریق اعمال تابع $\cos^{-1}$ بر موج حامل تصحیح‌شده به دست می‌آید. چنانچه تابع sin به فاز به دست آمده اعمال شود، موج به دست آمده با موج حامل تصحیح‌شده دقیقاً



الف) تبدیل هیلبرت؛ ب) روش ارتقاء یافته $p = ۰/۰۱$؛ ج) مدل varma.[۱۵]

شکل ۱۲. طیف‌های مؤلفه شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰).



الف) چهارمین تابع مودی ذاتی شتاب نگاشت ال سنترو (۱۹۴۰)؛ ب) موج حامل تصحیح شده متناظر، $\cos\theta(t)$؛ ج) $\sin\theta(t)$؛ د) $H[\cos\theta(t)]$؛ ه) $[\cos^2\theta(t)+H^2[\cos\theta(t)]]^{0.5}$؛ و) $[\cos^2\theta(t)+\sin^2\theta(t)]^{0.5}$.

شکل ۱۳. توانایی روش ارتقاء یافته در جابه‌جایی فاز به میزان دقیقاً ۹۰درجه.

۹۰ درجه اختلاف فاز دارد. انجام این کار به‌وسیله‌ی تبدیل هیلبرت، با توجه به محدودیتی که از جانب قضیه‌ی نوتال وجود دارد امکان‌پذیر نیست. این موضوع با بررسی چهارمین تابع مودی ذاتی شتاب‌نگاشت ال‌سنترو، c_4، نشان داده شده است (شکل ۱۳الف). همچنین موج حامل تصحیح‌شده و مقادیر سینوس تابع فاز صعودی متناظر با c_4 به‌ترتیب در شکل ۱۳ب و ۱۳ج نمایش داده شده است.

تبدیل هیلبرت موج حامل تصحیح‌شده نیز در شکل ۱۳د نشان داده شده است. چنان که مشاهده می‌شود به‌علت محدودیت قضیه‌ی نوتال بین مقادیر شکل ۱۳ج و ۱۳د اختلاف وجود دارد. همچنین هرگونه انحراف نرم سیگنال تحلیلی متناظر با یک موج حامل، از مقدار واحد، شاخصی از خطای تبدیل هیلبرت براثر محدودیت قضیه‌ی نوتال است.[۱۴] برای مشخص شدن بهتر این محدودیت، مقادیر $[(\sin\theta)^2 + (H[\cos\theta])^2]^{0.5}$ و $[(\sin\theta)^2 + (\cos\theta)^2]^{0.5}$ به‌ترتیب در شکل ۱۳ه و ۱۳و آورده شده است. مقدار واحد در شکل ۱۳و گویای توانایی روش ارتقاءیافته در جابه‌جاکردن فاز به‌میزان ۹۰ درجه است.

۵. نتیجه‌گیری

در این مطالعه ابتدا به تبدیل هیلبرت ـ هوآنگ به‌عنوان ابزاری برای پردازش داده‌های گذرا و غیرخطی پرداخته شده و نیز به ملزومات تحلیل طیفی هیلبرت اشاره شده است. برای عدم رویارویی با این محدودیت‌ها روشی ارتقاءیافته مشتمل بر تصحیح موج حامل هر تابع مودی ذاتی و استخراج فرکانس لحظه‌یی براساس تخمین تابع فاز به‌وسیله‌ی یک منحنی درجه سوم هموارکننده و سپس مشتق‌گیری از آن پیشنهاد شده است. در ادامه، با ارائه‌ی چهار مثال به بررسی کارآیی روش ارتقاءیافته پرداخته

شده است. در این بررسی، قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش صحت تشخیص فرکانس‌های لحظه‌یی و نیز توزیع دامنه ـ فرکانس سیگنال مورد ارزیابی قرار گرفت. با تحلیل مؤلفه‌ی شمال ـ جنوب شتاب‌نگاشت ال‌سنترو (۱۹۴۰)، قابلیت روش ارتقاءیافته در افزایش خوانایی طیف زمان ـ دامنه ـ فرکانس سیگنال‌های دارای باند پهن فرکانسی نشان داده شد. در انتها قابلیت روش ارتقاءیافته در جابه‌جاکردن فاز توابع مودی ذاتی به میزان دقیقاً ۹۰ درجه مورد بررسی قرار گرفت.

این بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش ارتقاءیافته با کنارگذاشتن محدودیت‌های تحلیل طیفی هیلبرت، قادر به استخراج نتایج صحیح‌تر و از نظر فیزیکی معنادارتر نسبت به روش‌های متناظر است.

منابع

1. Cohen, L., *Time-frequency analysis,* New York: Prentice-Hall (1995).
2. Daubechies, I., *Ten Lectures on Wavelets,* CBMS-NSF Lecture Notes No. 61, Philadelphia SIAM (1992).
3. Flandrin, P., *Time-Frequency/Time-Scale Analysis,* San Diego, Academic Press (1999).
4. Huang, N.E.; Shen, Z.; Long, S.R.; Wu, M.C.; Shih, H.H.; Zheng, Q. and et al, "The empirical mode decomposition and the Hilbert spectrum for nonlinear and non-stationary time series analysis", *Proceedings of Royal Society of London Series A,* **454**, pp. 903-995 (1998).
5. Zhang, R.C.; Ma, S.; Safak, E. and Hartzell, S. "Hilbert–Huang transform analysis of dynamic and earthquake motion recordings", *Journal of Eng. Mechanics ASCE,* **129**(8), pp. 861-75 (2003).
6. Liu, B.; Riemenschneider, S. and Xu, Y. "Gearbox fault diagnosis using empirical mode decomposition and Hilbert spectrum", *Mechanical Systems and Signal Processing,* **20**, pp. 718-34 (2006).
7. Rilling, G.; Flandrin, P. and Goncalves, P. "On empirical mode decomposition and its algorithms", *In: Proceedings of IEEE-EURASIP Workshop on Nonlinear Signal and Image Processing,* (2003).
8. Wu, Z. and Huang, N.E. "A study of the characteristics of white noise using the empirical mode decomposition method", *Proceedings of Royal Society of London Series A,* **460**, pp. 1597-1611 (2004).
9. Flandrin, P.; Rilling, G. and Goncalves, P. "Empirical mode decomposition as a filter bank", *IEEE Signal Processing Letter,* **11**(2), pp. 112-114 (2004).
10. Peng, Z.K.; Tse, P.W. and Chua, F.L. "An improved Hilbert–Huang transform and its application in vibration signal analysis", *Journal of Sound and Vibration,* **286**, pp. 187-205 (2005).
11. Deering, R. and Kaiser, J.F. "The use of a masking signal to improve empirical mode decomposition", *Proceedings of IEEE International Conference on Acoustics, Speech, and Signal Processing,* **4**, pp. 485-8 (2005).
12. Wu, Z. and Huang, N.E. "Ensemble empirical mode decomposition: A noise-assisted data analysis method", *Advances in Adaptive Data Analysis,* **1**(1), pp. 1-41 (2008).
13. Lin, Li. and Hongbing, Ji. "Signal feature extraction based on an improved EMD method", *Measurement,* **286** pp. 796-803 (2009).
14. Huang, N.E. and Bethesda, M.D. "Computing instantaneous frequency by normalizing Hilbert transform", US Patent 6901353 (2005).
15. Yinfeng, D.; Yingmin, L.; Mingkui, X. and Ming, L.A. "Analysis of earthquake ground motions using an improved Hilbert-Huang transform", *Journal of Soil Dynamic and Earthquake Eng.,* **28**, pp. 7-19 (2008).
16. Ramezani, S., *Developing a System Identification Process Based on a New Enhanced Hilbert-Huang Transform,* MSc thesis, International Institute of Earthquake Engineering and Seismology, Tehran (2009) (In Farsi).
17. Huang, N.E. "Introduction to Hilbert-Huang transform and some recent developments", in: Huang N.E., Attoh-Okine N.O. (Eds.), The Hilbert-Huang Transform in Eng., Taylor & Francis, Boca Raton, pp. 1-22 (2005).
18. De Boor, C., *A Practical Guide to Splines,* New York, Springer (1978).