مهندسی عمران شریف
دوره‌ی ۲-۲۸، شماره‌ی ۲، ص. ۱۲-۲۶

Original Article

تحلیل دقیق تنش‌های میان‌رویه در تیر بتن مسلح تقویت‌شده با ورق پیشانی

محمود عدالتی * **(استادیار)**
دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه ایلام

فریدون ایرانی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه فردوسی مشهد

در این نوشتار از روشی تحلیلی برای محاسبه‌ی تنش‌های برشی و قائم در میان‌رویه‌ی تیرهای بتن مسلح (RC)[۱] تقویت‌شده با ورق‌های FRP [۲] یا فولادی استفاده شده است. از آنجا که ترکیب بیشینه‌ی تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، در نزدیکی انتهای ورق‌های تقویتی FRP یا فولادی به‌وجود می‌آید، بنابراین بروز پدیده‌ی جداشدگی در این محل تشدید می‌شود و ممکن است سبب شکست ناگهانی در این سازه‌ها شود. در اینجا اثرات تغییرشکل‌های برشی در هر سه سازه (تیر بتنی، ورق تقویت و لایه‌ی چسبنده) کاملاً درنظر گرفته شده است. از این‌رو تیر بتن مسلح مرکب به‌صورت تیر تیموشنکو فرض می‌شود. به‌کارگیری فرضیات تیر تیموشنکو به یافتن یک زوج معادلات دیفرانسیل هم‌زمان درجه‌ی دوم و چهارم معمولی با ضرایب ثابت منجر می‌شود. معادلات مزبور در ادبیات مهندسی، دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر نامیده می‌شوند که به‌صورت تحلیلی و بدون حذف بخش‌هایی از آن‌ها حل شده‌اند. این نوشتار به درک اثرات تنش‌های میان‌رویه بر رفتار سازه‌های بتن مسلح تقویت‌شده با ورق‌های FRP یا فولادی، کمک شایانی می‌کند. سرانجام، سازگاری نتایج موجود و به‌دست‌آمده حاکی از آن است که دقت روش پیشنهادی در تعیین تنش‌های برشی و قائم در مرز مشترک دو ماده‌ی متفاوت، کاملاً پذیرفتنی است.

واژگان کلیدی: تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، ورق‌های تقویتی FRP یا فولادی، تیر RC، معادلات دیفرانسیل درگیر.

edalati.mahmoud@mail.ilam.ac.ir
irani@um.ac.ir

۱. مقدمه

تیرهای بتن مسلح را می‌توان با استفاده از ورق‌های FRP یا صفحات فولادی که به سطح بیرونی آن‌ها چسبانده می‌شوند، تقویت کرد. در حال حاضر، فن چسباندن این‌گونه ورق‌ها به سطح بیرونی تیرهایRC، یکی از روش‌های معمول مقاوم‌سازی به حساب می‌آید.[۱] اتصال قوی بین بتن و ورق‌های FRP یا فولادی به منزله‌ی پارامتری مهم در رفتار تیرهای RC است. از یک سو، نتایج آزمایشگاهی پیشین و روش‌های تحلیلی بیانگر آن است که توزیع تنش‌های برشی و قائم در هر دو سطح مشترک چسب با بتن و چسب با ورق تقویت، و در پی آن پدیده‌ی جداشدگی در میان‌رویه‌ی بتن با ورق‌های FRP یا فولادی بسیار پیچیده است.[۱و۲] از سوی دیگر، پژوهش‌های پیشین نشان می‌دهند که پژوهشگران در دو دهه‌ی گذشته چندین روش تحلیلی بدون درنظرگرفتن اثر کامل تغییرشکل‌های برشی به‌منظور تعیین تنش‌های میان‌رویه ارائه کرده‌اند.[۱]

در سازه‌های تقویت‌شده با ورق‌های FRP یا فولادی، جداشدگی ورق‌ها در انتهای آن‌ها از سطح تیر به مد شکست چالش‌برانگیزی تبدیل شده است، به گونه‌یی که از رسیدن تیر تقویت‌شده به مقاومت خمشی نهایی کامل آن جلوگیری می‌کند. از این‌رو یافتن پاسخ بار شکست جداشدگی، حائز اهمیت است. پدیده‌ی جداشدگی به شدت تمرکز تنش‌های برشی و قائم در سطح میان‌رویه‌ی تیر با ورق‌های تقویت بستگی دارد.[۱] بنابراین، تعیین تنش‌های مزبور در دو دهه‌ی گذشته برای تیرهای تقویت‌شده با ورق‌های FRP یا فولادی مورد کاوش پژوهشگران قرارگرفته است. در این میان، روش‌های صریحی که با روابط نسبتاً ساده‌یی به موضوع تعیین تنش‌های برشی و قائم پرداخته‌اند، به چشم می‌خورد.[۱-۶] این روابط بر پایه‌ی فرضیات ساده‌یی که بیشتر به لایه‌ی چسبنده مربوط است، ارائه شده‌اند. از این فرضیات می‌توان به ثابت‌بودن تنش‌های برشی و قائم در هر دو سوی ماده‌ی چسبنده اشاره کرد.

مطالعات متعددی برای تعیین تنش‌های میان‌رویه به‌صورت تئوری، عددی و یا ترکیب هم‌زمان این دو،[۱-۲۲] و همچنین مطالعه‌یی مقایسه‌یی و بسیار سودمند بر روی فرضیات، مزیت‌ها، و کاستی‌های روش‌های عمده‌ی به‌کاررفته در تعیین تنش‌های برشی و قائم انجام شده است.[۱] در اغلب بررسی‌های انجام‌شده، اثرات تغییرشکل‌های محوری، خمشی، و برشی به‌طور هم‌زمان درنظرگرفته نشده است. در پاره‌یی اندک از آن‌ها نیز، که اثر تغییرشکل‌های برشی وارد شده است، این اثر یا به گونه‌یی ناقص در هر سه (تیر اصلی، چسب و ورق تقویت) به‌طور غیرهم‌زمان

---

* نویسنده مسئول

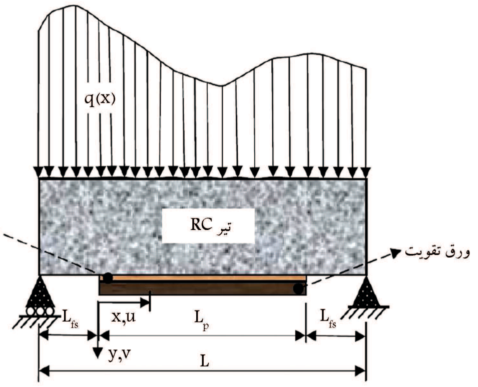
تاریخ: دریافت ۱۳۸۸/۱۱/۲۷، اصلاحیه ۱۳۸۹/۱۲/۱۸، پذیرش ۱۳۹۰/۱/۲۲.

وارد شده است، یا به تحلیل دقیق و ارائه‌ی روابط ریاضی منجر نشده است، و یا معادلات دیفرانسیل درگیر حاکم بر سیستم با حذف برخی از پارامترهای درگیرکننده به معادلات غیردرگیر تبدیل شده‌اند. عامل‌های یادشده می‌توانند به کسب نتایج با دقت نسبی منجر شوند. به‌ویژه در تیرهای کوتاه، اختلاف پاسخ‌های دیگر پژوهشگران با نتایج به‌دست‌آمده در این نوشتار، که عامل تغییرشکل‌های برشی در آن وارد شده است، بالاست. به‌طورکلی می‌توان گفت که در مقالات موجود، کلیه‌ی عوامل درگیر به‌صورت کامل دخالت داده نشده‌اند. در روش اسمیت و تنگ[۱] گرچه اثر تغییرشکل‌های برشی در تعیین معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم به‌کار رفته است، اما در حل معادلات دیفرانسیل به‌منظور درگیرنکردن آن‌ها از اثر مزبور چشم‌پوشی شده است. از سوی دیگر، در روش ینگ و وو[۲] با فرض پاره‌سازی معادلات دیفرانسیل به دو بخش مجزا (با و بدون اثر تغییرشکل‌های برشی)، و با تجمیع پاسخ‌ها از روش جمع آثار قوا به حل آن‌ها پرداخته شده است. همچنین برای حل معادلات دیفرانسیل اضافی وابسته به اثر تغییرشکل‌های برشی، از دو تابع فرضی به‌صورت جملاتی از سری فوریه‌ی کسینوسی و سینوسی که با تابعی خطی ترکیب شده‌اند، به‌ترتیب برای تعیین تنش‌های برشی و قائم استفاده شده است. سرانجام با کمک توابع فرضی مزبور و به‌کارگیری روش گالرکین، پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل تعیین شده است.[۱] پاسخ‌های به‌دست آمده با این پیشینه دقت نسبی دارد.

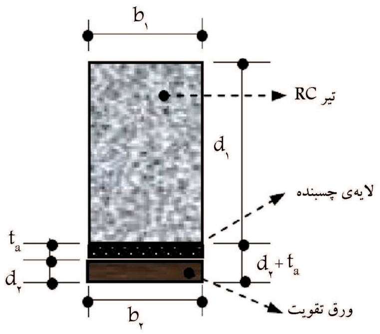
در نوشتار حاضر با تأثیر تغییرشکل‌های برشی در هر سه جزء (تیر بتنی، لایه‌ی چسبنده، و ورق تقویت) به تعیین تنش‌های برشی و قائم در میان‌رویه پرداخته شده است. همچنین تیر بتن مسلح به‌صورت تیر تیموشنکو فرض شده است. به‌سبب به‌کارگیری تیر تیموشنکو بخش‌هایی به معادلات دیفرانسیل دیگر پژوهشگران افزوده شده است. نوشتار حاضر به ارائه‌ی تحلیل دقیق در تعیین تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، بدون کاهش بخشی جزئی از معادلات دیفرانسیل درگیر، پرداخته است. فرض تیر تیموشنکو به‌گونه‌یی وارد مسئله شده است که می‌توان از روابط تحلیلی به‌دست‌آمده هم برای تیرهای معمولی و هم برای تیرهای با طول دهانه‌ی کوتاه با اثرات تغییرشکل‌های برشی استفاده کرد. به‌عبارت‌دیگر، در تیرهای با طول دهانه‌ی کوتاه، علاوه بر اثر ضریب شکل برشی مقطع به‌منظور کاهش سختی برشی آن، از ضریب کاهش دیگری که صلبیت خمشی معادل را به جای صلبیت خمشی حقیقی بر می‌گزیند، استفاده می‌شود. عدم اصلاح ضریب کاهش سختی خمشی مقطع در تیرهای کوتاه با نسبت دهانه به عمقِ کوچک‌تر از پنج به پاسخ‌های اشتباه، و در تیرهای معمولی به‌تقریب در نتایج کسب‌شده منجر می‌شود. برای تیرهای با ساختار فشرده، افزایش در تغییرمکان به‌سبب تغییرشکل‌های برشی ممکن است به بیش از ۵۰٪ نیز برسد.[۲۳] این افزایش در تغییرشکل‌ها، پیش از وقوع پدیده‌ی جداشدگی سبب افزایش چشمگیر تنش‌های برشی و قائم به‌ویژه در بین لایه‌های فشرده خواهد شد. لازم است در تیر بتنی تقویت شده‌ی تیموشنکو به انحنای خمشی، انحنای ناشی از اثر تغییرشکل‌های برشی نیز افزوده شود.

۲. فرضیات

تیر بتن مسلح دو سر ساده به طول L تحت اثر بارگسترده‌ی کلی به‌شدت $q(x)$ در واحد طول خود همانند شکل ۱الف قرارگرفته است. این تیر در قسمت میانی خود به‌کمک لایه‌ی چسبنده با ورق‌های FRP یا فولادی به طول L_p تقویت شده است.



الف) بار گسترده ی کلی وارد بر تیر؛



ب) مقطع عرضی تیر مرکب.

شکل ۱. تیر بتن مسلح دوسر ساده‌ی تقویت شده با ورق پیشانی.

فاصله‌ی هر یک از تکیه‌گاه‌های تیر از ابتدا و انتهای ورق تقویت برابر L_{fs} فرض می‌شود. از آنجا که در این مطالعه محدودیتی برای جنس مصالح تقویت اعمال نشده است، بنابراین ورق‌های تقویت را می‌توان غیر از FRP یا فولادی نیز درنظر گرفت. ابعاد مقطع عرضی تیر مزبور در شکل ۱ب نشان داده شده است. در این شکل، $b_۱$ و $b_۲$ به‌ترتیب بیانگر عرض تیر RC و عرض ورق تقویت هستند ($b_۲ \leq b_۱$). در این مطالعه عرض لایه‌ی چسبنده، b_a، باعرض ورق تقویت، $b_۲$، یکسان است. همچنین در شکل ۱ب، $d_۱$، $d_۲$ و t_a به‌ترتیب ضخامت‌های تیر بتنی، ورق تقویت، و لایه‌ی چسبنده هستند. به‌طورکلی در شکل ۱، مصالح بتنی با پانویس ۱ و ورق تقویت با پانویس ۲ تعریف شده‌اند.

فرضیات زیر در به‌دست آوردن روابط حاکم اعمال شده است:[۱،۴و۵]

- تمام مصالح با رفتارکشسان خطی فرض شده‌اند.
- تنش‌های برشی و قائم در ضخامت لایه‌ی چسبنده ثابت هستند.
- تغییرشکل‌های ناشی از لنگرهای خمشی، نیروهای برشی، و محوری در هر دو تیر بتنی و ورق تقویت درنظر گرفته شده است.
- از اثر تنش‌های قائم بر روی ضخامت لایه‌ی چسبنده چشم‌پوشی شده است، به گونه‌یی که انحنای تیر بتنی و ورق تقویت یکسان فرض شده‌اند.
- پیوستگی کامل در میان‌رویه‌ی اتصال ورق‌های تقویتی با تیر اصلی وجود دارد.
- از تغییرشکل‌های خمشی لایه‌ی چسبنده چشم‌پوشی شده است.

۳. معادلات حاکم بر تنش برشی در میان‌رویه‌ی تیر اصلی و ورق تقویت

یک جزء دیفرانسیلی به طول dx از تیر بتن مسلح تقویت‌شده با ورق، که تحت اثر بار گسترده‌ی کلی $q(x)$ قرار دارد، همانند شکل ۲ به سه بخش مجزا (جزء بتن مسلح، لایه‌ی چسبنده، و ورق تقویت) تقسیم شده است. در این شکل نیروهای محوری و برشی و لنگرهای مثبت، در هر یک از جزءها به‌ترتیب با علائم $N_j(x)$، $M_j(x)$ و $V_j(x)$، و تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه به‌ترتیب با $\tau(x)$ و $\sigma(x)$ بیان شده‌اند. پانویس‌های ۱ $= j$ و ۲ $= j$ به‌ترتیب تیر بتنی و ورق تقویت را معرفی می‌کنند. کرنش برشی γ در لایه‌ی چسبنده را می‌توان با رابطه‌ی ۱ ارائه کرد:[1]

$$\gamma = \frac{du(x,y)}{dy} + \frac{dv(x,y)}{dx} \qquad (۱)$$

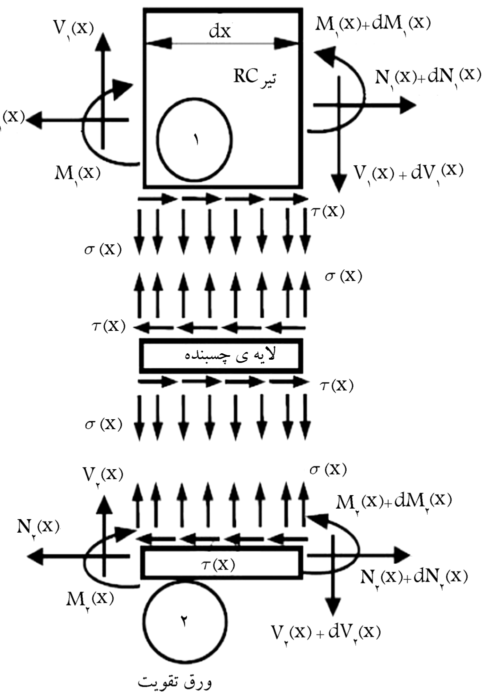
که $u(x,y)$ و $v(x,y)$ به‌ترتیب تغییرمکان‌های افقی و قائم در هر نقطه از لایه‌ی چسبنده‌اند. مبدأ سنجش کمیت‌های x، y، $u(x,y)$ و $v(x,y)$ در ابتدای ورق تقویت به‌صورت شکل ۱الف فرض شده‌اند.

تنش برشی $\tau(x)$ متناظر با کرنش برشی γ است و از رابطه‌ی ۲ به‌دست می‌آید:[1]

$$\tau(x) = G_a\gamma = G_a\left(\frac{du(x,y)}{dy} + \frac{dv(x,y)}{dx}\right) \qquad (۲)$$

که در آن G_a ضریب کشسانی برشی لایه‌ی چسبنده است. مشتق مرتبه‌ی اول رابطه‌ی ۲ نسبت به x از رابطه‌ی ۳ به‌دست می‌آید:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = G_a\left(\frac{d^2u(x,y)}{dxdy} + \frac{d^2v(x,y)}{dx^2}\right) \qquad (۳)$$



شکل ۲. اجزای مقطع عرضی تیر مرکب.

انحنای جزء دیفرانسیلی با تأثیر تغییرشکل‌های برشی را می‌توان به کمک شکل ۳ تعیین کرد.

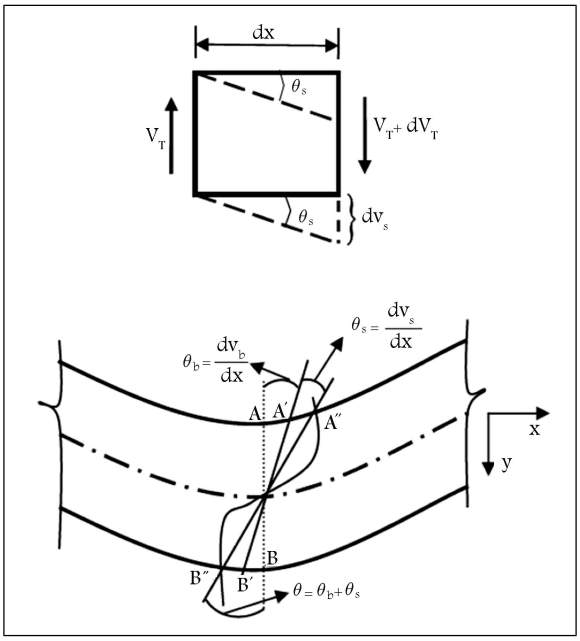
انحنای خمشی $\frac{d\theta_b}{dx}$، انحنای ناشی از تغییرشکل‌های برشی $\frac{d\theta_s}{dx}$ و انحنای کل $\frac{d\theta}{dx}$ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۴ نوشت:

$$\begin{cases} \frac{d\theta_b}{dx} = \frac{d^2v_b(x,y)}{dx^2} = \frac{-M_T(x)}{(EI)_t} \\ \frac{d\theta_s}{dx} = \frac{d^2v_s(x,y)}{dx^2} = \frac{-1}{(\alpha GA)_t}\frac{dV_T(x)}{dx} \\ \frac{d\theta}{dx} = \frac{d^2v(x,y)}{dx^2} = \frac{d\theta_b}{dx} + \frac{d\theta_s}{dx} \end{cases} \qquad (۴)$$

که در آن $v_b(x,y)$، $v_s(x,y)$ و $v(x,y)$ به‌ترتیب تغییرشکل‌های خمشی، برشی، و کل در مقطع عرضی و $V_T(x)$ و $M_T(x)$ به‌ترتیب نیروی برشی کل و لنگر خمشی کل در مقطع مرکب (شامل: تیر اصلی، چسب و ورق تقویت) هستند. همچنین $(\alpha GA)_t$ و $(EI)_t$ به‌ترتیب صلبیت برشی مؤثر و صلبیت خمشی مؤثر کل مقطع مرکب هستند و از رابطه‌ی ۵ به‌دست می‌آیند:[۲۳و۲۴]

$$\begin{cases} (\alpha GA)_t = \alpha(G_1A_1 + G_2A_2) \\ (EI)_t = E_1I_1 + E_2I_2 \\ I_1 = \frac{I_{1b}}{1+r_{1e}} \\ I_2 = \frac{I_{2b}}{1+r_{2e}} \end{cases} \qquad (۵)$$

که در آن‌ها E_j، I_j، G_j و A_j به‌ترتیب ضریب کشسانی، لنگر لختی مؤثر کاهش‌یافته نسبت به مرکز سطح، ضریب کشسانی برشی، و سطح مقطع عرضی در جزء jاُم‌اند. همچنین α ضریب شکل برشی مقطع عرضی است که در مقاطع مستطیلی برابر $\frac{5}{6}$ اختیار می‌شود.[23] سرانجام I_{1b} و I_{2b} به‌ترتیب لنگرهای لختی حقیقی در تیر بتنی و ورق تقویت هستند.[24] کمیت‌های r_{1e} و r_{2e} در رابطه‌ی ۵ از رابطه‌ی ۶



شکل ۳. انحناهای خمشی و برشی در تیر مرکب تیموشنکو.

تعیین می‌شوند:[23]

$$\begin{cases} \beta_1 = \frac{L_{fs}+x}{L} \\ \gamma_1 = \frac{192E_1I_{1b}}{5\alpha G_1A_1L^2} \\ r_{1e} = \frac{16}{5}(\beta_1^4 - 2\beta_1^3 + \beta_1) + \gamma_1(\beta_1 - \beta_1^2) - 1 \\ \quad \left(r_{1e} = \frac{48E_1I_{1b}}{5\alpha G_1A_1L^2} \ at \ x = \frac{L_p}{2}\right) \\ \beta_2 = \frac{L_{fs}+x}{L_p} \\ \gamma_2 = \frac{192E_2I_{2b}}{5\alpha G_2A_2L_p^2} \\ r_{2e} = \frac{16}{5}(\beta_2^4 - 2\beta_2^3 + \beta_2) + \gamma_2(\beta_2 - \beta_2^2) - 1 \\ \quad \left(r_{2e} = \frac{48E_2I_{2b}}{5\alpha G_2A_2L_p^2} \ at \ x = \frac{L_p}{2}\right) \end{cases} \tag{6}$$

بنابراین، انحنای کل جزء دیفرانسیلی در تیر بتنی تقویت‌شده‌ی تیموشنکو از رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2v(x,y)}{dx^2} = \frac{d\theta_b}{dx} + \frac{d\theta_s}{dx} = -\frac{M_T(x)}{(EI)_t} - \frac{1}{(\alpha GA)_t}\frac{dV_T(x)}{dx} \tag{7}$$

با فرض آنکه لایه‌ی چسبنده در معرض تنش‌های برشی یکنواخت قرارگرفته باشد، تغییرات $u(x,y)$ در ضخامت لایه‌ی چسبنده به‌صورت خطی است و می‌توان آن را به‌صورت رابطه‌ی ۸ نوشت:[1]

$$\frac{du(x,y)}{dy} = \frac{1}{t_a}\left[u_2(x) - u_1(x)\right] \tag{8}$$

با مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۸ نسبت به x، رابطه‌ی ۹ به‌دست می‌آید:

$$\frac{d^2u(x,y)}{dxdy} = \frac{1}{t_a}\left[\frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx}\right] \tag{9}$$

که در آن $u_1(x)$ و $u_2(x)$ به‌ترتیب تغییرمکان‌های طولی در پایین تیر بتنی و بالای ورق تقویت است و t_a بیان‌گر ضخامت لایه‌ی چسبنده است. با جای‌گذاری رابطه‌های ۷ و ۹ در رابطه‌ی ۳ می‌توان رابطه‌ی ۱۰ را نوشت:

$$\frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{G_a}{t_a}\left[\begin{array}{c} \frac{du_2(x)}{dx} - \frac{du_1(x)}{dx} - \frac{t_a}{(EI)_t}M_T(x) - \\ \frac{t_a}{(\alpha GA)_t}\frac{dV_T(x)}{dx} \end{array}\right] \tag{10}$$

کرنش‌ها در پایین تیر بتنی و بالای ورق تقویت با اعمال اثرات تغییرشکل‌های محوری، برشی، و خمشی به‌صورت روابط ۱۱ و ۱۲ تعیین می‌شوند:[1]

$$\frac{du_1(x)}{dx} = \varepsilon_1(x) = \frac{y_1}{E_1I_1}M_1(x) - \frac{1}{E_1A_1}N_1(x) + \frac{y_1}{\alpha G_1A_1}\left[q(x) + b_2\sigma(x)\right] \tag{11}$$

$$\frac{du_2(x)}{dx} = \varepsilon_2(x) = -\frac{y_2}{E_2I_2}M_2(x) + \frac{1}{E_2A_2}N_2(x) + \frac{y_2}{\alpha G_2A_2}b_2\sigma(x) \tag{12}$$

که در آن‌ها $\varepsilon_1(x)$ و $\varepsilon_2(x)$ به‌ترتیب کرنش‌های محوری در سطح پایین تیر بتنی و بالای ورق تقویت هستند. $N_j(x)$ و $M_j(X)$ به‌ترتیب نیروی محوری و لنگر خمشی در جزء jاُم هستند که در فاصله‌ی y_j وارد می‌شوند ($j = 1,2$). y_1 و y_2 به‌ترتیب بیان‌گر فاصله‌ی مرکز سطحِ تیر بتنی از پایین آن و فاصله‌ی مرکز سطحِ ورق تقویت از بالای آن هستند. روابط ۱۳ و ۱۴ بین y_1 و y_2 با ضخامت‌های d_1 و d_2 برقرار است:

$$y_1 = \frac{d_1}{2} \tag{13}$$

$$y_2 = \frac{d_2}{2} \tag{14}$$

از تعادل افقی جزء مرکب می‌توان رابطه‌ی ۱۵ نوشت:

$$\frac{dN_1(x)}{dx} = \frac{dN_2(x)}{dx} = b_2\tau(x) \tag{15}$$

که در آن رابطه‌ی ۱۶ برقرار است:

$$N_1(x) = N_2(x) = N(x) = b_2\int_0^x \tau(x)dx \tag{16}$$

با فرض انحناهای برابر در تیر RC و ورق تقویت، رابطه‌ی بین $M_1(x)$ و $M_2(x)$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ نوشته می‌شود:[1]

$$\frac{M_1(x)}{E_1I_1} = \frac{M_2(x)}{E_2I_2} \Rightarrow \begin{cases} M_1(x) = RM_2(x) \\ R = \frac{E_1I_1}{E_2I_2} \end{cases} \tag{17}$$

با محاسبه‌ی لنگر خمشی کل در جزء دیفرانسیلی نسبت به مرکز ورق تقویت می‌توان رابطه‌ی ۱۸ را نوشت:[1]

$$M_T(x) = M_1(x) + M_2(x) + N(x)\left(y_1 + y_2 + t_a\right) \tag{18}$$

که در آن لنگرهای خمشی در تیر بتنی و ورق تقویت به ترتیب از روابط ۱۹ و ۲۰ به‌دست می‌آیند:[1]

$$M_1(x) = \frac{R}{R+1}\left[M_T(x) - b_2\int_0^x \tau(x)\left(y_1 + y_2 + t_a\right)dx\right] \tag{19}$$

$$M_2(x) = \frac{1}{R+1}\left[M_T(x) - b_2\int_0^x \tau(x)\left(y_1 + y_2 + t_a\right)dx\right] \tag{20}$$

با تعیین مشتق اول رابطه‌های ۱۹ و ۲۰ می‌توان روابط ۲۱ و ۲۲ را نوشت:

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) = \frac{R}{R+1}\left[V_T(x) - b_2\tau(x)\left(y_1 + y_2 + t_a\right)\right] \tag{21}$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) = \frac{1}{R+1}\left[V_T(x) - b_2\tau(x)\left(y_1 + y_2 + t_a\right)\right] \tag{22}$$

با جای‌گذاری روابط ۱۱ و ۱۲ در رابطه‌ی ۱۰، رابطه‌ی ۲۳ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{d\tau(x)}{dx} = \frac{G_a}{t_a}[& -\frac{y_2}{E_2I_2}M_2(x) + \frac{1}{E_2A_2}N_2(x) + \frac{y_2}{\alpha G_2A_2}b_2\sigma(x) \\ & -\frac{y_1}{E_1I_1}M_1(x) + \frac{1}{E_1A_1}N_1(x) - \frac{y_1}{\alpha G_1A_1}[q + b_2\sigma(x)] \\ & -\frac{t_a}{(EI)_t}M_T(x) - \frac{t_a}{(\alpha GA)_t}\frac{dV_T(x)}{dx}] \end{aligned} \tag{23}$$

با یک‌بار مشتق‌گیری از رابطه‌ی ۲۳ و جایگزینی روابط ۱۵ الی ۲۲ در رابطه‌ی حاصل و پس از ساده‌کردن، رابطه‌ی ۲۴ را خواهیم داشت:

$$\frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - a_0\tau(x) + b_0\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x) \tag{۲۴}$$

که در آن، دو ثابت a_0 و b_0 و تابع $f(x)$ از روابط ۲۵ الی ۲۷ به دست می‌آیند:

$$a_0 = \frac{G_a b_2}{t_a}\left(\frac{(y_1+y_2)(y_1+y_2+t_a)}{E_1 l_1 + E_2 l_2} + \frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2}\right) \tag{۲۵}$$

$$b_0 = \frac{G_a b_2}{\alpha t_a}\left(\frac{y_1}{G_1A_1} - \frac{y_2}{G_2A_2}\right) \tag{۲۶}$$

$$f(x) = -\frac{G_a}{t_a}\left(\frac{y_1+y_2}{E_1I_1+E_2I_2} + \frac{t_a}{(EI)_t}\right)V_T(x) - \frac{G_a}{t_a}\frac{y_1}{\alpha G_1A_1}\frac{dq}{dx} - \frac{G_a}{(\alpha GA)_t}\frac{d^2V_T(x)}{dx^2} \tag{۲۷}$$

دو عبارت ظاهرشده با پانویس t در رابطه‌ی ۲۷ تا به حال در مقالات دیگر پژوهشگران وارد نشده است. رابطه‌ی ۲۴، معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تنش برشی در میان‌رویه‌ی تیر بتنی و ورق تقویت است.

۴. معادلات حاکم بر تنش قائم در میان‌رویه‌ی تیر اصلی و ورق تقویت

با توجه به جداشدگی در جهت قائم که بین تیر اصلی و ورق تقویت زیر اثر بار وارده به‌وجود می‌آید، می‌توان به معادلات دیفرانسیل حاکم بر تنش قائم در میان‌رویه دست یافت. این جدایی سبب به‌وجودآمدن تنش قائم میان‌رویه در لایه‌ی چسبنده می‌شود. تنش قائم $\sigma(x)$ در لایه‌ی چسبنده به‌صورت رابطه‌ی ۲۸ ارائه می‌شود:[1]

$$\sigma(x) = \frac{E_a}{t_a}\left[v_2(x) - v_1(x)\right] \tag{۲۸}$$

که در آن E_a ضریب کشسانی چسب و $v_1(x)$ و $v_2(x)$ به‌ترتیب تغییرمکان قائم به‌وجودآمده در پایین تیر بتنی و بالای ورق تقویت هستند. با نوشتن معادلات تعادل در تیر اصلی و ورق تقویت، و چشم‌پوشی از جملات مرتبه‌ی ۲ و بالاتر می‌توان به روابط ۲۹ الی ۳۴ دست پیدا کرد:[1]

در تیر اصلی:

$$\frac{d^2v_1(x)}{dx^2} = -\frac{1}{E_1I_1}M_1(x) - \frac{1}{\alpha G_1A_1}\left[q(x) + b_2\sigma(x)\right] \tag{۲۹}$$

$$\frac{dM_1(x)}{dx} = V_1(x) - b_2y_1\tau(x) \tag{۳۰}$$

$$\frac{dV_1(x)}{dx} = -b_2\sigma(x) - q(x) \tag{۳۱}$$

در ورق تقویت:

$$\frac{d^2v_2(x)}{dx^2} = -\frac{1}{E_2I_2}M_2(x) + \frac{1}{\alpha G_2A_2}b_2\sigma(x) \tag{۳۲}$$

$$\frac{dM_2(x)}{dx} = V_2(x) - b_2y_2\tau(x) \tag{۳۳}$$

$$\frac{dV_2(x)}{dx} = b_2\sigma(x) \tag{۳۴}$$

با دو بار مشتق‌گیری پی در پی از روابط ۲۹ و ۳۲، و جای‌گذاری مشتق‌های وابسته به نیروی برشی و لنگر خمشی برحسب تنش‌های برشی و قائم از روابط ۳۰ الی ۳۴، می‌توان معادلات ۳۵ و ۳۶ را ارائه کرد:

در تیر اصلی:

$$\frac{d^4v_1(x)}{dx^4} = \frac{1}{E_1I_1}b_2\sigma(x) + \frac{1}{E_1I_1}q(x) + \frac{b_2y_1}{E_1I_1}\frac{d\tau(x)}{dx} - \frac{1}{\alpha G_1A_1}\frac{d^2q(x)}{dx^2} - \frac{b_2}{\alpha G_1A_1}\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} \tag{۳۵}$$

در ورق تقویت:

$$\frac{d^4v_2(x)}{dx^4} = -\frac{1}{E_2I_2}b_2\sigma(x) + \frac{b_2y_2}{E_2I_2}\frac{d\tau(x)}{dx} + \frac{b_2}{\alpha G_2A_2}\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} \tag{۳۶}$$

با تعیین مشتق مرتبه‌ی چهارم رابطه‌ی ۲۸ و جای‌گزینی روابط ۳۵ و ۳۶ در آن و ساده‌سازی‌های لازم می‌توان رابطه‌ی ۳۷ را نوشت:

$$\frac{d^4\sigma(x)}{dx^4} - c_0\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} + d_0\sigma(x) + e_0\frac{d\tau(x)}{dx} = g(x) \tag{۳۷}$$

که در آن ثابت‌های c_0، d_0 و e_0 و تابع $g(x)$ از روابط ۳۸ الی ۴۱ به‌دست می‌آیند:

$$c_0 = \frac{E_a}{t_a}\frac{b_2}{\alpha}\left(\frac{1}{G_1A_1} + \frac{1}{G_2A_2}\right) \tag{۳۸}$$

$$d_0 = \frac{E_a}{t_a}b_2\left(\frac{1}{E_1I_1} + \frac{1}{E_2I_2}\right) \tag{۳۹}$$

$$e_0 = \frac{E_a}{t_a}b_2\left(\frac{y_1}{E_1I_1} - \frac{y_2}{E_2I_2}\right) \tag{۴۰}$$

$$g(x) = \frac{E_a}{t_a}\left[\frac{1}{\alpha G_1A_1}\frac{d^2q(x)}{dx^2} - \frac{1}{E_1I_1}q(x)\right] \tag{۴۱}$$

رابطه‌ی ۳۷ معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تنش قائم را در میان‌رویه‌ی تیر اصلی و ورق تقویت ارائه می‌کند.

۵. پاسخ‌های عمومی دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر حاکم بر تنش‌های میان‌رویه

با به‌کارگیری هم‌زمان معادلات دیفرانسیل حاکم بر تنش‌های برشی و قائم در میان‌رویه (رابطه‌های ۲۴ و ۳۷) می‌توان به دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر حاکم دسترسی پیدا کرد (رابطه‌ی ۴۲):

$$\begin{cases} \frac{d^2\tau(x)}{dx^2} - a_0\tau(x) + b_0\frac{d\sigma(x)}{dx} = f(x) \\ \frac{d^4\sigma(x)}{dx^4} - c_0\frac{d^2\sigma(x)}{dx^2} + d_0\sigma(x) + e_0\frac{d\tau(x)}{dx} = g(x) \end{cases} \tag{۴۲}$$

که در آن پارامترهای ثابت a_0، b_0، c_0، d_0 و e_0، و توابع $f(x)$ و $g(x)$ پیش از این تعریف شده‌اند. دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر (رابطه‌ی ۴۲) از نوع معادلات دیفرانسیل معمولِ غیرهمگن است. با تعریف نمادهای مطرح در روابط ۴۳ و ۴۴ می‌توان رابطه‌ی ۴۲ را به شکل ساده‌تری نوشت:

$$D = \frac{d}{dx}, \quad D^2 = \frac{d^2}{dx^2}, \quad D^4 = \frac{d^4}{dx^4}, \quad \tau = \tau(x), \quad \sigma = \sigma(x) \tag{۴۳}$$

بنابراین:

$$\begin{cases} D^2\tau - a_0\tau + b_0 D\sigma = f(x) \\ D^4\sigma - c_0 D^2\sigma + d_0\sigma + e_0 D\tau = g(x) \end{cases} \tag{44}$$

با حذف عامل τ از دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر در رابطه‌ی ۴۴، می‌توان به رابطه‌ی ۴۵ دست یافت:

$$(D^6 - (a_0 + c_0)D^4 + (a_0c_0 + d_0 - b_0e_0)D^2 - a_0d_0)\sigma = \underbrace{(D^2 - a_0)g(x) - e_0 Df(x)}_{F(x)} \tag{45}$$

معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی ۴۵ به‌صورت رابطه‌ی ۴۶ است:

$$\lambda^6 - (a_0 + c_0)\lambda^4 + (a_0c_0 + d_0 - b_0e_0)\lambda^2 - a_0d_0 = 0 \tag{46}$$

با تعریف $m = \lambda^2$ می‌توان معادله‌ی ۴۷ را نوشت:

$$m^3 - (a_0 + c_0)m^2 + (a_0c_0 + d_0 - b_0e_0)m - a_0d_0 = 0 \tag{47}$$

از حل معادله‌ی مشخصه‌ی ۴۷ می‌توان به مقادیر ویژه‌ی آن طبق رابطه‌ی ۴۸ دست یافت:

$$\begin{cases} m_1 = \left[\frac{a_0+c_0}{3} - \frac{\sqrt[3]{2}n_2}{3n_3} + \frac{n_3}{3\sqrt[3]{2}}\right] \\ m_2 = \left[\frac{a_0+c_0}{3} + \frac{(1+i\sqrt{3})n_2}{3\sqrt[3]{4}n_3} - \frac{(1-i\sqrt{3})n_3}{6\sqrt[3]{2}}\right] \\ m_3 = \left[\frac{a_0+c_0}{3} + \frac{(1-i\sqrt{3})n_2}{3\sqrt[3]{4}n_3} - \frac{(1+i\sqrt{3})n_3}{6\sqrt[3]{2}}\right] \end{cases} \tag{48}$$

که در آن $i = \sqrt{-1}$ و n_1، n_2 و n_3 از رابطه‌ی ۴۹ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} n_1 = 2a_0^3 - 3a_0^2c_0 - 3a_0c_0^2 + 2c_0^3 + 18a_0d_0 - 9c_0d_0 + \\ \quad 9a_0b_0e_0 + 9b_0c_0e_0 \\ n_2 = -a_0^2 + a_0c_0 - c_0^2 + 3d_0 - 3b_0e_0 \\ n_3 = \sqrt[3]{n_1 + \sqrt{n_1^2 + 4n_2^3}} \end{cases} \tag{49}$$

بنابراین، رابطه‌ی تنش قائم $\sigma(x)$ از رابطه‌ی ۵۰ به‌دست می‌آید:

$$\sigma(x) = C_1e^{-\sqrt{m_1}x} + C_2e^{\sqrt{m_1}x} + C_3e^{-\sqrt{m_2}x} + C_4e^{\sqrt{m_2}x} + C_5e^{-\sqrt{m_3}x} + C_6e^{\sqrt{m_3}x} - \frac{F(x)}{a_0d_0} \tag{50}$$

که در آن $F(x)$ به نحوه‌ی بارگذاری تیر بستگی دارد و از رابطه‌ی ۵۱ تعیین می‌شود:

$$F(x) = (D^2 - a_0)g(x) - e_0Df(x) \tag{51}$$

با روشی مشابه روش بالا، و این بار با حذف σ از دستگاه معادلات دیفرانسیل درگیر (رابطه‌ی ۴۴) می‌توان رابطه‌ی ۵۲ را ارائه کرد:

$$(D^6 - (a_0 + c_0)D^4 + (a_0c_0 + d_0 - b_0e_0)D^2 - a_0d_0)\tau = \underbrace{(D^4 - c_0D^2 + d_0)f(x) - b_0Dg(x)}_{G(x)} \tag{52}$$

معادله‌ی مشخصه‌ی رابطه‌ی ۵۲، دقیقاً همان رابطه‌ی ۴۶ است، بنابراین رابطه‌ی تنش برشی $\tau(x)$ را می‌توان از رابطه‌ی ۵۳ به‌دست آورد:

$$\tau(x) = K_1e^{-\sqrt{m_1}x} + K_2e^{\sqrt{m_1}x} + K_3e^{-\sqrt{m_2}x} + K_4e^{\sqrt{m_2}x} + K_5e^{-\sqrt{m_3}x} + K_6e^{\sqrt{m_3}x} - \frac{G(x)}{a_0} \tag{53}$$

که در آن تابع $G(x)$ به شرایط بارگذاری مسئله وابسته است و از رابطه‌ی ۵۴ به‌دست می‌آید:

$$G(x) = (D^4 - c_0D^2 + d_0)f(x) - b_0Dg(x) \tag{54}$$

با جای‌گذاری دو رابطه‌ی ۵۰ و ۵۳ در هر یک از معادلات دیفرانسیل درگیر (رابطه‌ی ۴۴)، دستگاهی شش معادله و شش مجهول به‌دست می‌آید. از حل دستگاه معادلات مزبور می‌توان به رابطه‌ی ۵۵ دست یافت:

$$\begin{cases} K_{2j-1} = \frac{b_0C_{2j-1}\sqrt{m_j}}{m_j - a_0} \\ K_{2j} = -\frac{b_0C_{2j}\sqrt{m_j}}{m_j - a_0} \end{cases} \qquad j = 1, 2, 3 \tag{55}$$

سرانجام رابطه‌ی $\tau(x)$ برحسب ثابت‌های C_1 الی C_6 به‌صورت رابطه‌ی ۵۶ نوشته می‌شود:

$$\begin{aligned} \tau(x) = {} & \frac{b_0C_1\sqrt{m_1}}{m_1 - a_0}e^{-\sqrt{m_1}x} - \frac{b_0C_2\sqrt{m_1}}{m_1 - a_0}e^{\sqrt{m_1}x} + \\ & \frac{b_0C_3\sqrt{m_2}}{m_2 - a_0}e^{-\sqrt{m_2}x} - \frac{b_0C_4\sqrt{m_2}}{m_2 - a_0}e^{\sqrt{m_2}x} + \\ & \frac{b_0C_5\sqrt{m_3}}{m_3 - a_0}e^{-\sqrt{m_3}x} - \frac{b_0C_6\sqrt{m_3}}{m_3 - a_0}e^{\sqrt{m_3}x} - \frac{G(x)}{a_0} \end{aligned} \tag{56}$$

روابط ۵۰ و ۵۶ پاسخ‌های معادله‌ی دیفرانسیل درگیر ۴۴ هستند.

۶. شرایط مرزی

۱.۶. تعیین شرایط مرزی کلی

با صفر قراردادن نیروی محوری، نیروی برشی، و لنگر خمشی در ابتدای ورق تقویت ($x = 0$) می‌توان به شرایط مرزی مخلوط در رابطه‌ی ۵۷ که مستقل از نوع بارگذاری تیر هستند، دسترسی پیدا کرد:

$$\begin{cases} b_0\ \sigma(x)\big|_{x=0} + \frac{d\tau(x)}{dx}\Big|_{x=0} = ff + gg \\ -c_0\ \sigma(x)\big|_{x=0} + \frac{d^2\sigma(x)}{dx^2}\Big|_{x=0} = hh + mm \\ e_0\ \tau(x)\big|_{x=0} - c_0\ \frac{d\sigma(x)}{dx}\Big|_{x=0} + \frac{d^3\sigma(x)}{dx^3}\Big|_{x=0} = nn + rr \end{cases} \tag{57}$$

که در آن ff، gg، hh، mm، nn و rr از رابطه‌ی ۵۸ به‌دست می‌آیند:

$$\begin{cases} ff = -\frac{G_a}{t_a}\left(\frac{y_1}{E_1I_1} + \frac{t_a}{(EI)_t}\right) M_T(x)\big|_{x=0} \\ gg = -\frac{G_a}{\alpha t_a}\left(\frac{y_1}{G_1A_1} - \frac{t_a}{(GA)_t}\right) q(x)\big|_{x=0} \\ hh = \frac{E_a}{t_a}\left(\frac{1}{E_1I_1}\right) M_T(x)\big|_{x=0} \\ mm = \frac{E_a}{\alpha t_a}\left(\frac{1}{G_1A_1}\right) q(x)\big|_{x=0} \\ nn = \frac{E_a}{t_a}\left(\frac{1}{E_1I_1}\right) V_T(x)\big|_{x=0} \\ rr = \frac{E_a}{\alpha t_a}\left(\frac{1}{G_1A_1}\right) \frac{dq(x)}{dx}\Big|_{x=0} \end{cases} \tag{58}$$

سه شرط مرزی به‌دست‌آمده در رابطه‌ی ۵۷ کلی است و در نقطه‌ی شروع ورق تقویت مستقل از نوع بارگذاری وارد بر تیر است.

۲.۶. تعیین شرایط مرزی خاص

هر چند روابط به‌دست‌آمده در این نوشتار، برای تعیین تنش‌های برشی، و قائم در میان‌رویه‌ی تیر اصلی با ورق تقویت کلی است و برای هر نوع بارگذاری کاربردی است، اما در ادامه به‌بررسی حالت بارگسترده‌ی یکنواخت (UDL)[3] پرداخته می‌شود. تعیین پاسخ‌های تحلیلی دو حالت دیگر بارگذاری (بارهای متمرکز منفرد و دوگانه) تحت بررسی است. به هر حال، شرایط مرزی مربوط به تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در هر حالتِ بارگذاری را می‌توان با مشخص‌بودن نیروهای برشی و یا لنگرهای خمشی در وسط دهانه و یا در محل اثر بارهای متمرکز به‌دست آورد. در حالت بارگسترده‌ی یکنواخت لازم است که تنش برشی در وسط دهانه‌ی تیر (یا وسط ورق تقویت) برابر صفر شود (رابطه‌ی ۵۹):

$$\tau(x)|_{x=\frac{L_p}{2}} = 0 \qquad (59)$$

۳.۶. تعیین ثابت‌های C_1 الی C_6 در حالت بارگسترده‌ی یکنواخت

برای مقادیر بزرگ x فرض بر آن است که تنش قائم به صفر می‌رسد، بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که ثابت‌های $C_4 = C_6 = 0$ هستند. از این‌رو با تشکیل دستگاه چهار معادله و چهار مجهول به کمک روابط ۵۷ و ۵۹، ثابت‌های C_1، C_2، C_3 و C_5 به‌دست می‌آیند. ثابت C_2 برابر صفر است. همچنین ثابت‌های C_1، C_3 و C_5 توابعی از پارامترهای ثابتِ E_1، E_2، E_a، G_1، G_2، G_a، b_1، b_2، d_1، d_2، t_a، q، L و L_p هستند که با اختیارکردن تابع فرضی H_j، می‌توان آن‌ها را به‌صورت رابطه‌ی ۶۰ نوشت:

$$C_j = H_j(E_1, E_2, E_a, G_1, G_2, G_a, b_1, b_2, d_1, d_2, t_a, q, L, L_p); \quad j = 1, 3, 5 \qquad (60)$$

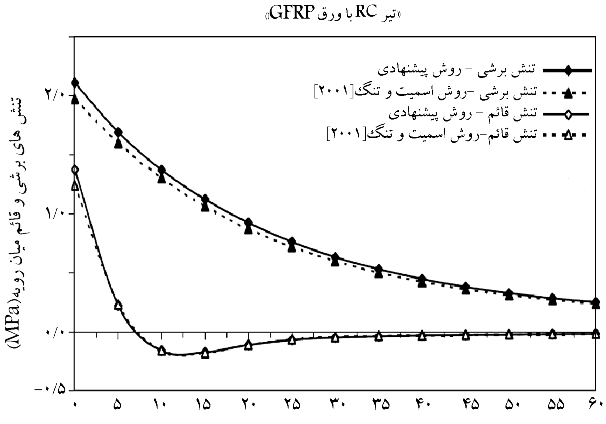
روابط تحلیلی مربوط به ثابت‌های C_1، C_3 و C_5 در پیوست آمده است. هر چند ثابت‌های مزبور با عبارت‌های نسبتاً طولانی ارائه شده‌اند، اما با توجه به دسترسی همگان به رایانه، یافتن ضرایب ثابت و به دنبال آن تعیین دقیق تنش‌های برشی و قائم در سرتاسر میان‌رویه‌ی تیر اصلی و ورق تقویت امری ممکن و معقول است.

۷. مثال‌های عددی

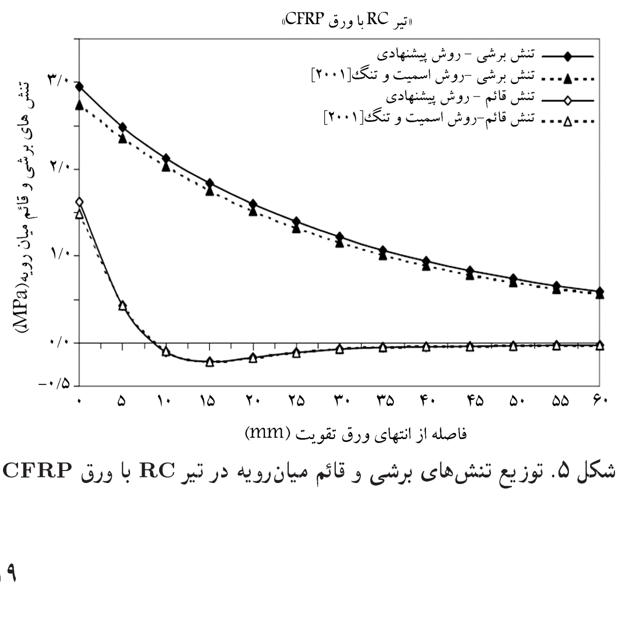
در این بخش به حل دو مثال پرداخته می‌شود. مثال نخست، تیر بتن مسلح دو سر ساده‌ی تقویت‌شده با ورق‌های GFRP [4]، CFRP [5] و فولادی است که تحت اثر بارگسترده‌ی یکنواخت به‌شدت ثابت $q(x) = q = 50\,\frac{N}{mm}$ در سرتاسر طول خود قرار دارد. طول دهانه‌ی تیر RC، $L = 3000\,mm$ و فاصله‌ی هر یک از تکیه‌گاه‌های آن از دو انتهای ورق تقویت $L_{fs} = 300\,mm$ است. دومین مثال تیر آلومینیمی (AL)[6] توخالی با ضخامت جداره‌ی ۲ میلی‌متر و تقویت‌شده با ورق CFRP است. تیر آلومینیمی مزبور زیر اثر بارگسترده‌ی یکنواخت ثابت به شدت $q(x) = q = 2\,\frac{N}{mm}$ قرارگرفته است. طول دهانه‌ی آن، $L = 500\,mm$ و فاصله‌ی ابتدا و انتهای ورق CFRP از تکیه‌گاه‌های مجاور $L_{fs} = 50\,mm$ است. دیگر ویژگی‌های هندسی و مکانیکی مصالح تیرها، ورق‌های تقویتی GFRP، CFRP و فولادی، و لایه‌ی چسبنده در دو مثال ارائه‌شده در جدول ۱، درج شده است. پیش از این، دو مثال مزبور با روش‌های تحلیلی متفاوت حل شده‌اند.[1,2,4-6]

۱.۷. مثال ۱

تیر بتن مسلح تقویت‌شده با ورق‌های GFRP، CFRP، و فولادی تحت اثر بار گسترده‌ی یکنواخت (UDL) قرار دارد. در شکل‌های ۴ الی ۶ تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در نزدیکی انتهای ورق (در طول $0 \leq x \leq 0{,}025L_p$) به‌ترتیب برای ورق GFRP، ورق CFRP، و ورق فولادی رسم شده است. نتایج به دست آمده از روش تحلیلی ارائه‌شده در این نوشتار با حل تحلیلی اسمیت و تنگ[1] همگرایی خوبی دارند. تفاوت عمده‌ی پاسخ‌ها در بخش انتهای ورق‌هاست که ناشی از اثرات تغییرشکل‌های برشی است. این اثرات در روش تحلیلی ارائه‌شده وارد شده‌اند، اما در پاسخ‌های تحلیلی اسمیت و تنگ[1] اعمال نشده است. با دقت در نمودارها مشاهده می‌شود که در فاصله‌ی کوتاهی از انتهای ورق‌های تقویت، تنش قائم میان‌رویه تغییر علامت می‌دهد. این تغییر علامت در تنش قائم، ناشی از تغییرشکل‌های خمشی اضافی به‌وجودآمده در ورق تقویت به‌سبب تنش‌های برشی در میان‌رویه است. تنش‌های برشی میان‌رویه بیش از تنش‌های قائم از تغییرشکل‌های برشی تأثیر می‌پذیرند. بنابراین، اثر تغییرشکل‌های برشی نقش مهمی در افزایش تنش‌های برشی



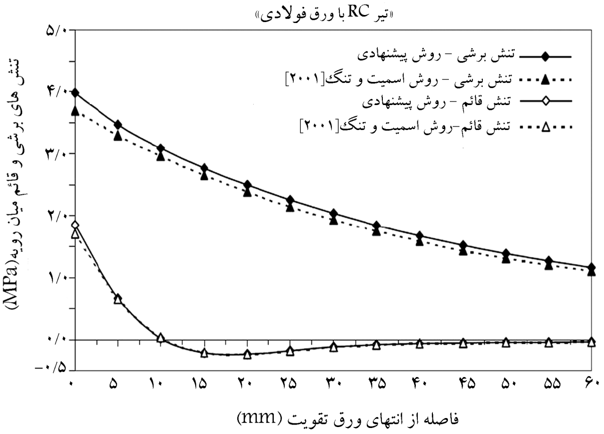
شکل ۴. توزیع تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق GFRP.



شکل ۵. توزیع تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق CFRP.

جدول ۱. ویژگی‌های هندسی و مکانیکی مصالح در تیرها، ورق‌های تقویتی و لایه‌های چسبنده.

جزء سازنده	عرض (mm)	عمق (mm)	ضریب کشسانی (MPa)	نسبت پواسون
تیر RC	$b_1 =$ ۲۰۰	$d_1 =$ ۳۰۰	$E_1 =$ ۳۰,۰۰۰	$\nu_1 =$ ۰٫۲۰
تیر AL توخالی	$b_1 =$ ۲۰	$d_1 =$ ۳۰	$E_1 =$ ۶۵,۳۰۰	$\nu_1 =$ ۰٫۳۳
لایه‌ی چسبنده (تیر RC)	$b_a =$ ۲۰۰	$t_a =$ ۲	$E_a =$ ۲۰۰۰	$\nu_a =$ ۰٫۳۵
لایه‌ی چسبنده (تیر AL)	$b_a =$ ۲۰	$t_a =$ ۲	$E_a =$ ۲۰۰۰	$\nu_a =$ ۰٫۳۵
ورق GFRP (چسبنده به تیر RC)	$b_2 =$ ۲۰۰	$t_2 =$ ۴	$E_2 =$ ۵۰,۰۰۰	$\nu_2 =$ ۰٫۳۰
ورق CFRP (چسبنده به تیر RC)	$b_2 =$ ۲۰۰	$t_2 =$ ۴	$E_2 =$ ۱۰۰,۰۰۰	$\nu_2 =$ ۰٫۳۰
ورق فولادی (چسبنده به تیر RC)	$b_2 =$ ۲۰۰	$t_2 =$ ۴	$E_2 =$ ۲۰۰,۰۰۰	$\nu_2 =$ ۰٫۳۰
ورق CFRP (چسبنده به تیر AL)	$b_2 =$ ۲۰	$t_2 =$ ۲	$E_2 =$ ۱۰۰,۰۰۰	$\nu_2 =$ ۰٫۳۰



شکل ۶. توزیع تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق فولادی.

دارند و در شناسایی و وقوع پدیده‌ی جداشدگی و بار شکست نظیر آن باید درنظر گرفته شوند.

هر چند پاسخ‌های دو روش به هم نزدیک است، اما روش تحلیلی ارائه‌شده به‌سبب واردکردن اثرات تغییرشکل‌های برشی در بدنه‌ی روابط حاکم بر تنش‌های برشی و قائم دارای دقت زیادی است. در جدول ۲، مقادیر عددی تنش برشی بیشینه ($\tau_{\max}$) و تنش قائم بیشینه ($\sigma_{\max}$) با روش‌های متفاوت درج شده است. تنش‌های مزبور در انتهای ورق تقویت به‌وجود می‌آیند. افزون بر واردکردن اثر تغییرشکل‌های برشی به شکل سنتی در روابط ارائه‌شده، چنانچه اثرات کاهش لنگر لختی ناشی از تأثیر این تغییرشکل‌ها در روابط مربوط وارد شوند، تفاوت روش‌های پیشین با روش ارائه‌شده بیشتر نمایان می‌شود (سطر آخر جدول ۲). اثر تنش برشی و کاهش صلبیت برشی در ورق‌های تقویتی با صلبیت بیشتر (مانند ورق فولادی) تأثیر بیشتری برنتایج تنش‌های میان‌رویه و به‌ویژه بر تنش برشی خواهد داشت.

جدول ۲. مقایسه‌ی تنش‌های بیشینه‌ی برشی و قائم میان‌رویه در مثال‌های ۱ و۲ (MPa).

روش تئوری	تیر RC با ورق GFRP		تیر RC با ورق CFRP		تیر RC با ورق فولادی		تیر AL با ورق CFRP	
	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\max}$	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\max}$	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\max}$	$\tau_{\max}$	$\sigma_{\max}$
روبرتز و حاجی‌کاظمی* [۵]	۲٫۰۰۱	۱٫۴۲۵	۲٫۷۷۶	۱٫۶۶۸	۳٫۷۴۵	۱٫۹۰۲	۲٫۰۷۹	۱٫۱۵۳
روبرتز و حاجی‌کاظمی** [۵]	۱٫۸۱۳	۱٫۲۵۶	۲٫۵۹۱	۱٫۵۰۰	۳٫۵۶۷	۱٫۷۳۳	۱٫۹۶۲	۱٫۰۶۰
روبرتز[۴]	۱٫۹۴۵	۱٫۳۸۶	۲٫۶۰۴	۱٫۵۶۷	۳٫۳۰۲	۱٫۶۸۳	۱٫۵۵۲	۰٫۹۱۰
مالک و همکاران[۶]	۱٫۹۴۳	۱٫۳۸۴	۲٫۵۹۷	۱٫۵۶۳	۳٫۲۸۷	۱٫۶۷۵	۱٫۴۹۹	۰٫۸۷۱
اسمیت و تنگ[۱]	۱٫۹۷۵	۱٫۲۴۴	۲٫۷۴۰	۱٫۴۸۴	۳٫۶۹۶	۱٫۷۱۳	۱٫۷۹۶	۰٫۹۳۰
ینگ و وو[۲]	۱٫۹۵۵	۱٫۲۲۷	۲٫۶۸۴	۱٫۴۷۲	۳٫۵۹۲	۱٫۶۹۵	۱٫۷۴۸	۰٫۹۱۷
روش حاضر+	۲٫۱۱۲	۱٫۳۷۶	۲٫۹۴۶	۱٫۶۲۱	۳٫۹۸۲	۱٫۸۵۳	۲٫۱۰۳	۱٫۰۸۲
روش حاضر++	۲٫۱۶۸	۱٫۴۱۳	۳٫۰۲۱	۱٫۶۶۲	۴٫۰۷۸	۱٫۸۹۸	۲٫۱۳۱	۱٫۰۹۷

* تنش برشی: مرحله‌ی ۱ وتنش قائم: مرحله‌ی ۲. ** تنش برشی: مرحله‌ی ۱+۲ و تنش قائم: مرحله‌ی ۱+۲.

+ بدون اثر کاهش لنگر لختی. ++ با اثر کاهش لنگر لختی.

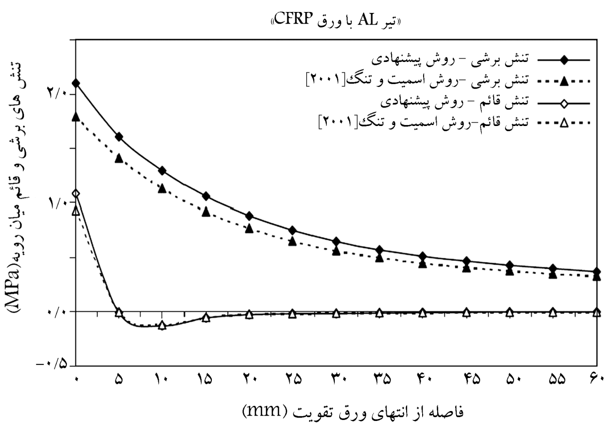
جدول ۳. مقایسه‌ی تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر آلومینیمی توخالی با ورق CFRP.

x	(mm)	۰٫۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰	۵۰	۶۰
$\sigma_{Present}$	(MPa)	۱٫۰۸۲۰۷	-۰٫۱۳۰۱۳	-۰٫۰۲۸۸۹	-۰٫۰۱۷۲۰	-۰٫۰۱۰۵۲	-۰٫۰۰۶۷۴	-۰٫۰۰۴۷۵
$\sigma^{[1]}$	(MPa)	۰٫۹۲۹۵۳	-۰٫۱۲۱۷۹	-۰٫۰۲۳۷۲	-۰٫۰۱۴۸۵	-۰٫۰۰۹۰۶	-۰٫۰۰۵۸۱	-۰٫۰۰۴۱۱
$\tau_{Present}$	(MPa)	۲٫۱۰۲۸۹	۱٫۲۹۲۷۷	۰٫۸۸۲۱۳	۰٫۶۴۷۲۳	۰٫۵۱۰۵۴	۰٫۴۲۶۲۵	۰٫۳۷۰۰۵
$\tau^{[1]}$	(MPa)	۱٫۷۹۵۵۶	۱٫۱۳۱۸۴	۰٫۷۶۸۸۳	۰٫۵۶۵۸۰	۰٫۴۴۷۹۰	۰٫۳۷۵۲۹	۰٫۳۲۶۷۸
$\times 100$	$\left\lvert\frac{\sigma_{Present}-\sigma^{[1]}}{\sigma^{[1]}}\right\rvert$	۱۶	۷	۲۲	۱۶	۱۶	۱۶	۱۶
$\times 100$	$\left\lvert\frac{\tau_{Present}-\tau^{[1]}}{\tau^{[1]}}\right\rvert$	۱۷	۱۴	۱۵	۱۴	۱۴	۱۴	۱۳

۲.۷. مثال ۲

در شکل ۷، نمودار تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در یک تیر دو سر ساده‌ی آلومینیمی توخالی با ضخامت جدار ۲ میلی‌متر که با ورق CFRP تقویت شده است و تحت اثر بارگسترده‌ی یکنواخت قرار دارد، با استفاده از روش تحلیلی اسمیت و تنگ[1] و روش تحلیلی ارائه‌شده رسم شده است. تفاوت بین حل اسمیت و تنگ[1] با حل ارائه‌شده در این مثال بیش از مثال قبل است. زیرا افزون بر اثر تغییرشکل‌های برشی در روش ارائه‌شده، و چشم‌پوشی از آن در روش اسمیت و تنگ،[1] در این مثال نسبت دهانه به عمقِ تیر کاهش یافته است. به ویژه این تفاوت در تنش برشی بیش از تنش قائم است. نتایج تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه با روش ارائه‌شده و روش اسمیت و تنگ،[1] در فواصل ۱۰ میلی‌متری تا طول ۶۰ میلی‌متر از ابتدای ورق CFRP، در جدول ۳ ارائه شده است. همچنین درصد تفاوت تنش‌های مزبور در این جدول آمده است. نتایج نشان می‌دهند که قدرمطلق بیشینه و کمینه‌ی تفاوت تنش‌های برشی در طول موردمطالعه به‌ترتیب حدود ۱۷٪ و ۱۳٪ است. از سوی دیگر این درصدها در تنش‌های قائم به‌ترتیب حدود ۲۲٪ و ۷٪ هستند. درصدهای مزبور بیانگر آن هستند که تفاوت‌های چشمگیری بین دو روش به‌ویژه برای تنش‌های برشی بیشینه وجود دارد.

مقادیر بیشینه‌ی تنش‌های برشی و قائم در تیر آلومینیمی، در دو ستون آخرِ جدول ۲ برای حل‌های مختلف ارائه شده‌اند. بیشترین مقادیر تنش برشی به‌دست‌آمده



شکل ۷. توزیع تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر آلومینیمی با ورق CFRP.

در جدول ۲ مربوط به روش ارائه‌شده است. این مقدار حدود ۱٫۴۲ برابرِ کمترین مقدار به‌دست‌آمده از روش سایر محققان است.[6] بیشترین و کمترین مقادیر تنش قائم نیز به‌ترتیب مربوط به حل روبرتز و حاجی‌کاظمی[5] و حل مالک و همکاران[6] است که نسبت این دو برابر ۱٫۳۲ است. تفاوت نتایج به‌دست‌آمده در این مثال، از دو روشِ حل ارائه‌شده با اثر کاهش لنگر لختی (سطر آخر جدول) و حل ارائه‌شده در مقاله‌ی روبرتز و حاجی کاظمی (مرحله‌های ۱+۲)،[5] در هر دو نوع تنش‌های قائم و برشی به‌ترتیب حدود ۲٫۵٪ و ۵٪ است.

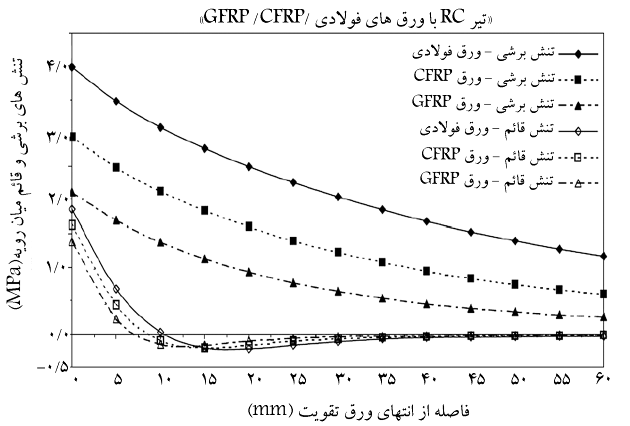
آشکار است که در یک تیر دو سر ساده با اثر تغییرشکل‌های برشی (تیر تیموشنکو)، تغییرمکان‌ها نسبت به تیر معمولی (اولر -برنولی) افزایش می‌یابند. بنابراین تمایل به لغزش بیشتری در حد فاصل ورق تقویت و تیر اصلی به‌وجود می‌آید. از آنجا که مقادیر لنگر لختی و سطح مقطع برشی در اثر تغییرشکل‌های برشی، کاهش می‌یابند، از این‌رو تنش‌ها در میان‌رویه افزایش خواهند یافت. نتایج روش اجزای محدود[22] درستی این مطلب را تأیید می‌کند. در مقالات[3,2] به‌سبب اعمال نادرست اثرات تغییرشکل‌های برشی و درنظرگرفتن توابع فرضی برای رفتار مصالح میان‌رویه، پاسخ تنش‌های برشی و قائم نسبت به دیگر روش‌های معمول کمتر شده است.

۸. مطالعه‌ی پارامتری

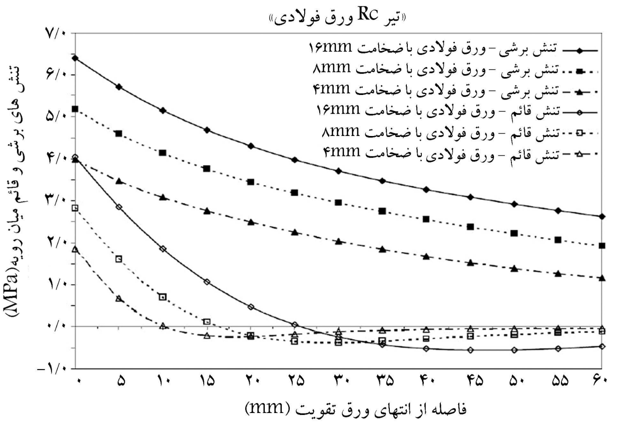
درک بهتر رفتار تیرهای ترمیم‌شده با ورق‌های تقویتی کمک شایانی به مهندسین طراح در بهینه‌سازی پارامترهای طراحی می‌کند. در این بخش به عمده‌ترین پارامترهای مؤثر بر پاسخ تنش‌های برشی و قائم در میان‌رویه پرداخته شده است.

۱.۸. سختی ورق تقویت

در شکل ۸، اثر سختی‌های گوناگون ورق بر روی تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، در تیرهای RC تقویت‌شده با ورق‌های GFRP، CFRP و فولادی نشان داده شده است. نتایج بیانگر آن است که با کاهش سختی از ورق‌های فولادی به CFRP و سپس GFRP، همان‌گونه که انتظار می‌رود، تنش‌های میان‌رویه متناسب با میزان سختی، کاهش می‌یابند. این بدان سبب است که با کاهش سختی، نیروی کششی انتقالی به ورق تقویت کاهش می‌یابد. بنابراین، سختی ورق‌های تقویت در توزیع تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، به‌ویژه در انتهای آن نقش کلیدی دارد.



شکل ۸. اثر سختی ورق تقویت بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق‌های GFRP، CFRP و فولادی.



شکل ۹. اثر ضخامت ورق تقویت بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق فولادی.

۲.۸. ضخامت و عرضِ ورق تقویت

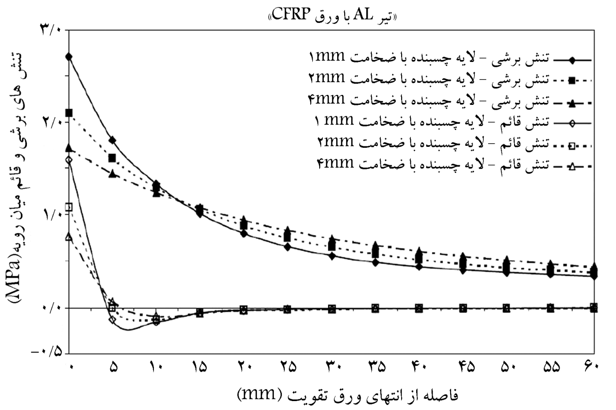
شکل ۹ اثر ضخامت ورق تقویت را بر روی تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، در تیر RC تقویت‌شده با ورق فولادی نشان می‌دهد. در اینجا از سه مقدار ۴، ۸ و ۱۶ میلی‌متر برای ضخامت ورق فولادی استفاده شده است. نتایج نمودارها بیانگر آن است که ضخامت ورق تقویت، نقش تعیین‌کننده‌یی در تعیین شدت تنش‌ها و تمرکز آن‌ها دارد. تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه متناسب با افزایش ضخامت ورق تقویت افزایش می‌یابند. در مسائل عملی معمولاً ضخامت ورق‌های GFRP و CFRP کوچک‌تر از ضخامت ورق فولادی است. بنابراین، ترمیم و تقویت سازه‌ها با ورق‌های GFRP و CFRP درمقایسه با ورق‌های فولادی به‌سبب کاهش تراز تنش‌ها و همچنین تمرکز کمتر تنش‌های میان‌رویه، مزیتی نسبی به حساب می‌آید. همچنین نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهند که تغییرات عرض ورق تقویت در دامنه‌ی کاربردی آن، تأثیر چشمگیری بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه ندارد.

۳.۸. ضخامت لایه‌ی چسبنده

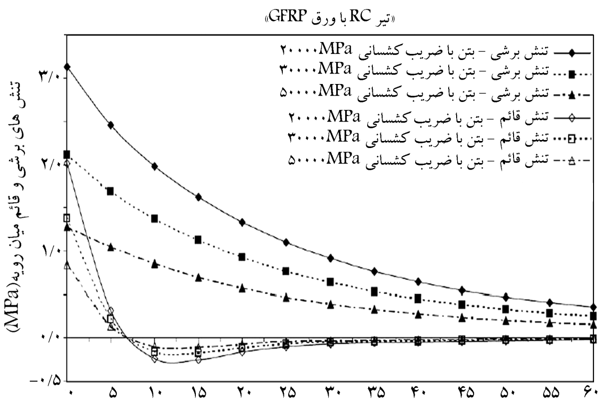
در شکل ۱۰ اثر تغییر ضخامت لایه‌ی چسبنده بر روی تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر آلومینیمی تقویت‌شده با ورق CFRP با ضخامت‌های ۱، ۲ و ۴ میلی‌متر بررسی شده است. نتایج نشان می‌دهند که تغییر ضخامت لایه‌ی چسبنده به جز در انتهای ورق تقویت، تأثیر چشمگیری بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه ندارد.

۴.۸. ضرایب کشسانی تیر RC و ورق تقویت

در شکل ۱۱ نمودار تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه با سه ضریب کشسانی متفاوت ۲۰، ۳۰ و ۵۰ گیگاپاسکال برای تیر RC با ورق GFRP، رسم شده است. نمودارها بیانگر این نکته هستند که با افزایش ضریب کشسانی تیر RC از مقدار تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه کاسته می‌شود. زیرا با افزایش ضریب کشسانی تیر RC، تیر اصلی بخش عمده‌ی تنش‌ها را جذب می‌کند و مقدار کمتری از آن‌ها به لایه‌ی چسبنده و در پی آن به ورق تقویت انتقال می‌یابند. گرچه اثر ضریب کشسانی بتن بر تنش‌های برشی میان‌رویه مشهود است، اما می‌توان از اثر آن بر تنش قائم به جز در انتهای ورق تقویت چشم‌پوشی کرد. بررسی‌ها در باره‌ی تغییرات ضریب کشسانی ورق تقویت نشان می‌دهند که با افزایش ضریب کشسانی ورق GFRP

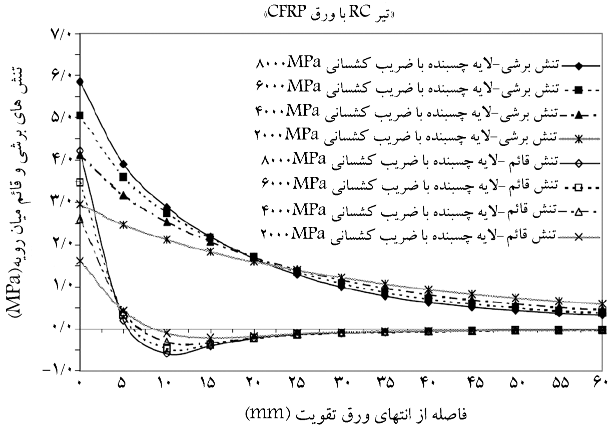


شکل ۱۰. اثر ضخامت لایه‌ی چسبنده بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر آلومینیمی با ورق CFRP.



شکل ۱۱. اثر ضریب کشسانی بتن بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق GFRP.

مقادیر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه افزایش می‌یابند. اثر این ضریب بر تنش‌های قائم در سرتاسر طول ورق تقویت به جز در انتهای آن، که آن هم اثرات اندکی دارد، کاملاً قابل چشم‌پوشی است. همچنین نتایج بررسی‌ها نشان می‌دهند که تنش‌های برشی به‌شدت متأثر از ضریب کشسانی ورق تقویت است و باید در مباحث طراحی به‌صورت ویژه به آن توجه کرد.



شکل ۱۲. اثر ضریب کشسانی لایه‌ی چسبنده بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر RC با ورق CFRP.

۵.۸. ضریب کشسانی لایه‌ی چسبنده

لایه‌ی چسبنده از مصالحی نسبتاً نرم و ایزوتروپ ساخته می‌شود و سختی نسبتاً کوچکی دارد. در اینجا تحلیل تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه با به‌کارگیری ضرایب کشسانی ۲، ۴، ۶ و ۸ گیگاپاسکال برای لایه‌ی چسبنده و ثابت‌پنداشتن نسبت پواسون آن، در تیر RC با ورق CFRP بررسی شده است. نتایج عددی در شکل ۱۲ نشان می‌دهند که تغییرات ضریب کشسانی چسب به جز در نقاط نزدیک انتهای ورق تقویت، اثر چندانی بر تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه ندارد. در نقاط نزدیک انتهای ورق تقویت، تنش‌های میان‌رویه متناسب با افزایش ضریب کشسانی لایه‌ی چسبنده، افزایش می‌یابند.

۹. نتیجه‌گیری

عملکرد مکانیکی میان‌رویه‌ی بین بتن و ورق تقویت، به‌ویژه توزیع تنش‌های برشی و قائم در سه جزءِ بتن، لایه‌ی چسبنده و ورق تقویت در انتهای اتصال آن‌ها به یکدیگر به عوامل متعددی وابسته است. نکات حائز اهمیت در حد مطالعه‌ی انجام‌گرفته به این شرح است:

۱. در این پژوهش اثر تغییرشکل‌های برشی در تعیین تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه در تیر تقویت‌شده‌ی تیموشنکو با ورق‌های GFRP، CFRP و فولادی بررسی شده است. روش‌های موجود، تاکنون اثرات تغییرشکل‌های برشی را به‌طورکامل در معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم وارد نکرده‌اند. گرچه در برخی از روش‌های موجود، این اثرات به شکل ناقص در معادلات دیفرانسیل حاکم وارد شده است، اما در یافتن پاسخ تنش‌های میان‌رویه، یا از اثرات تغییرشکل‌های برشی چشم‌پوشی‌شده و یا به حل تقریبی معادلات دیفرانسیل اکتفا شده است. درنهایت این روش‌ها به نتایج تقریبی منجر شده‌اند. به هر حال واردکردن اثرات تغییرشکل‌های برشی، معادلات دیفرانسیل حاکم بر سیستم را به‌صورت پیچیده و درگیر تبدیل می‌کند. از این‌رو پاسخ‌های به‌دست‌آمده برای تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه پیچیده خواهند بود. با وجود این مشکلات، پاسخ‌های تحلیلی دقیق برای تنش‌های میان‌رویه در تیرهای RC تقویت‌شده با ورق‌های GFRP، CFRP و فولادی ارائه شده است. در این نوشتار، روش ارائه‌شده، و روابط تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه، کلی است و برای هر نوع تیر تقویت‌شده‌ی تیموشنکو با ورق‌های GFRP، CFRP، فولادی و... کاربرد دارند.

۲. اختلاف نتایج روش تحلیلی ارائه‌شده در این نوشتار با روش‌های پیشین را می‌توان به عامل‌هایی از قبیل پارامترهای مربوط به: الف) تغییرشکل‌های برشی در هر سه المان (تیر بتنی، ورق تقویت، و لایه‌ی چسبنده)، ب) اثرات انحنای برشی تیر بتنی، ج) اعمال صلبیت خمشی مؤثر کل مقطع مرکب نسبت داد. اختلاف تنش‌های برشی به‌دست‌آمده درمقایسه‌با نتایج دیگر پژوهشگران در نمودارها ملموس‌تر از تنش‌های قائم میان‌رویه است. دلیل آن را می‌توان در تأثیرپذیری بیشتر تنش‌های برشی میان‌رویه از تغییرشکل‌های برشی نسبت به تنش‌های قائم دانست.

۳. معمولاً پدیده‌ی جداشدگی، در نقاط انتهای ورق تقویت به‌وجود می‌آید. در این نقاط تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه‌ی بین بتن و لایه‌ی چسبنده به مقادیر بیشینه‌ی خود می‌رسند. در این میان، تنش‌های برشی به‌صورت غیرخطی و به‌کندی با افزایش فاصله از نقطه‌ی انتهای ورق تقویت تا وسط آن و به‌تدریج از مقدار بیشینه به عدد صفر منتهی می‌شوند. همچنین تنش‌های قائم مثبت در میان‌رویه‌ی بتن و لایه‌ی چسبنده به‌ویژه در نزدیکی انتهای ورق تقویت که عملکرد کششی دارند، به‌صورت نمائی و با فاصله‌ی اندکی از انتهای آن کاهش می‌یابند. بنابراین، تنش‌های مزبور روند پدیده‌ی جداشدگی و شکست ناگهانی سازه را سرعت می‌بخشند. به همین دلیل است که تنش‌های قائم عامل اصلی تغییر ناگهانی سختی است و متعاقب آن در انتهای ورق تقویت، پدیده‌ی تمرکز ترک و گسترش آن رخ می‌دهد.

۴. مطالعه‌ی پارامتری تنش‌های برشی و قائم در میان‌رویه‌ی لایه‌ی چسبنده بیانگر آن است که این تنش‌ها در انتهای ورق تقویت متناسب با افزایش بارها و ضریب کشسانی لایه‌ی چسبنده افزایش می‌یابند. از سوی دیگر، با افزایش ضخامت لایه‌ی چسبنده در حد فاصل ورق تقویت و بتن از میزان شدت این تنش‌ها در میان‌رویه کاسته می‌شود.

۵. شدت تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه متناسب با میزان کاهش سختی از ورق‌های فولادی به CFRP و سپس GFRP، همان‌گونه که انتظار می‌رود، کاهش می‌یابند.

۶. تغییرات ضخامت ورق تقویت بر میزان تمرکز و تعیین شدت تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه نقش کلیدی دارد. میزان افزایش این تنش‌ها با افزایش ضخامت ورق تقویت متناسب است. از سوی دیگر، اثر تغییرات عرض ورق‌های تقویت در دامنه‌ی کاربرد عملی آن‌ها بر تنش‌های میان‌رویه بسیار ناچیز است.

۷. تنش‌های برشی و قائم میان‌رویه به‌شدت از ضرایب کشسانی تیر بتنی و ورق تقویت تأثیر می‌پذیرند (بر عکس یکدیگر). با افزایش ضریب کشسانی بتن، تنش‌های برشی میان‌رویه کاهش می‌یابند، در حالی‌که با افزایش ضریب کشسانی ورق تقویت به مقدار این تنش‌ها افزوده می‌شود. افزایش ضریب کشسانی تیر بتنی اثر کاهشی و افزایش ضریب کشسانی ورق تقویت اثر افزایشی بر تنش‌های قائم میان‌رویه دارند. به هر حال از اثر تغییرات این ضرایب بر تنش‌های قائم میان‌رویه به جز در انتهای ورق تقویت می‌توان چشم‌پوشی کرد.

پانوشت

1. reinforced concrete(RC)
2. fibre reinforced polymer(FRP)
3. uniform distributed load(UDL)
4. glass fibre reinforced polymer(GFRP)
5. carbon fibre reinforced polymer(CFRP)
6. aluminium(AL)

منابع (References)

1. Smith, S.T. and Teng, J.G. "Interfacial stresses in plated beams", *Engineering Structures,* **23**(7), pp. 857-871 (2001).
2. Yang, J. and Wu, Y.F. "Interfacial stresses of FRP strengthened concrete beams: Effect of shear deformation", *Composite Structures,* **80**(3), pp. 343-351 (2007).
3. Tounsi, A.; Hassaine, D.T.; Benyoucef, S. and Adda, B.E.A. "Interfacial stresses in FRP-plated RC beams: Effect of adherend shear deformations", *International Journal of Adhesion & Adhesives,* **29**, pp. 343-351 (2009).
4. Roberts, T.M. "Approximate analysis of shear and normal stress concentrations in the adhesive layer of plated RC beams", *Structural Engineering,* **67**(12), pp. 229-233 (1989).
5. Roberts, T.M. and Haji-Kazemi, H. "Theoretical study of the behavior of reinforced concrete beams strengthened by externally bonded steel plates", *Proc. Instn. Civil Engineers, Paper 9344, Structural Engineering Group, Part. 2,* **87**, pp. 39-55 (1989).
6. Malek, A.M.; Saadatmanesh, H. and Ehsani, M.R. "Prediction of failure load of R/C beams strengthened with FRP plate due to stress concentration at the plate end", *ACI Structural Journal,* **95**(2), pp. 142-152 (1998).
7. Vilnay, O. "The analysis of reinforced concrete beams strengthened by epoxy bonded steel plates", *International Journal of Cement Composite and Lightweight Concrete,* **10**(2), pp. 73-78 (1988).
8. Chajes, M.J.; Thomson, T.A.; Januszka, T.F. and Finch, W.W. "Flexural strengthening of concrete beams using externally bonded composite materials", *Construction and Building Materials,* **8**(3), pp. 191-201 (1994).
9. Taljsten, B. "Strengthening of beams by plate bonding", *Journal of Materials in Civil Engineering,* **9**(4), pp. 206-212 (1997).
10. Etman, E.E. and Beeby, A.W. "Experimental programme and analytical study of bond stress distributions on a composite plate bonded to a reinforced concrete beam", *Cement and Concrete Composites,* **22**(4), pp. 281-291 (2000).
11. Rabinovitch, O. and Frostig, Y. "Closed-form high-order analysis of RC beams strengthened with FRP strips", *Journal of Composites for Construction,* **4**(2), pp. 65-74 (2000).
12. Rabinovitch, O. and Frostig, Y. "Delamination failure of RC beams strengthened with FRP strip -a closed-form high-order and fracture mechanics approach", *Journal of Engineering Mechanics,* **127**(8), pp. 852-861 (2001).
13. Maalej, M. and Bian, Y. "Interfacial shear stress concentration in FRP strengthened beams", *Composite Structures,* **54**, pp. 417-426 (2001).
14. Ye, J.Q. "Interfacial shear stress transfer of RC beams strengthened by bonded composite plates", *Cement and Concrete Composites,* **23**(4-5), pp. 411-417 (2001).
15. Shen, H.S.; Teng, J.G. and Yang, J. "Interfacial stresses in beams and slabs bonded with thin plate", *Journal of Engineering Mechanics,* **127**(4), pp. 399-406 (2001).
16. Teng, J.G.; Zhang, J.W. and Smith, S.T. "Interfacial stresses in reinforced concrete beams bonded with a soffit plate: A finite element study", *Construction and Building Materials,* **16**(1), pp. 1-14 (2002).
17. Yang, Q.S.; Peng, X.R. and Kwan, A.K.H. "Finite element analysis of interfacial stresses in FRP-RC hybrid beams", *Mechanics Research Communications,* **31**(3), pp. 331-340 (2004).
18. Maalej, M. and Leong, K.S. "Effect of beam size and FRP thickness on interfacial shear stress concentration and failure mode of FRP strengthened beams", *Composite Science and Technology,* **65**(7-8), pp. 1148-1158 (2005).
19. Wu, Z.S.; Yuan, H.; Kojima, Y. and Ahmed, E. "Experimental and analytical studies on peeling and spalling resistance of unidirectional FRP sheets bonded to concrete", *Composite Science and Technology,* **65**(7-8), pp. 1088-1097 (2005).
20. Tounsi, A. "Improved theoretical solution for interfacial stresses in concrete beams strengthened with FRP plate", *International Journal of Solids and Structures,* **43**(14-15), pp. 4154-4174 (2006).
21. Yuan, H.; Chen, J.F.; Teng, J.G. and Lu, X.Z. "Interfacial stress analysis of a thin plate bonded to a rigid substrate and subjected to inclined loading", *International Journal of Solids and Structures,* **44**, pp. 5247-5271 (2007).
22. Li, L.J.; Guo, Y.C.; Huang, P.Y.; Liu, F.; Deng, J. and Zhu, J. "Interfacial stress analysis of RC beams strengthened with hybrid CFS and GFS", *Construction and Building Materials, doi:10.106/ j.conbuildmat.2008 .10.006* (2008).
23. Gere, J.M. and Timoshenko, S.P. "Mechanics of materials", *Brooks/Cole Engineering Division, Monterey, California, Printed in the United States of America* (1984).
24. Stafford Smith, B. and Coull, A. (Translated into Persian by Haji-Kazemi, H.) "Tall building structures: Analysis and Design", *Ferdowsi University of Mashhad Press,* Mashhad, Iran (1996).

پیوست

ثابت‌های C_1، C_3 و C_5 را می‌توان به کمک روابط زیر به دست آورد:

$$\begin{cases} q = Uniform\, Distributed\, Load\, (UDL). \\ f_{11} = -\frac{G_a}{2t_a}\left(\frac{y_1+y_2}{E_1I_1+E_2I_2}+\frac{t_a}{(EI)_t}\right) q L_p \\ f_{12} = -\frac{G_a}{t_a}\left(\frac{y_1+y_2}{E_1I_1+E_2I_2}+\frac{t_a}{(EI)_t}\right) q \\ g_{11} = -\frac{E_a}{t_a}\frac{1}{E_1I_1} q \\ Cte = -a_0 g_{11} + e_0 f_{12} \end{cases} \tag{A-0}$$

$$\begin{cases} R_1 = (ff+gg)(m_2+m_3) \\ R_2 = (ff+gg)(m_1+m_3) \\ R_3 = (ff+gg)(m_1+m_2) \end{cases} \tag{A-1}$$

$$\begin{cases} R_4 = (ff+gg)m_2m_3 \\ R_5 = (ff+gg)m_1m_3 \\ R_6 = (ff+gg)m_1m_2 \end{cases} \tag{A-2}$$

$$\begin{cases} R_7 = (ff+gg)c_0^2 + (-R_1 + b_0(hh+mm))c_0 \\ R_8 = (ff+gg)c_0^2 + (-R_2 + b_0(hh+mm))c_0 \\ R_9 = (ff+gg)c_0^2 + (-R_3 + b_0(hh+mm))c_0 \end{cases} \tag{A-3}$$

$$\begin{cases} R_{10} = hh(m_2 + \sqrt{m_3m_2} + m_3) + m_2\, mm \\ R_{11} = hh(m_1 + \sqrt{m_3m_1} + m_3) + m_1\, mm \\ R_{12} = hh(m_1 + \sqrt{m_2m_1} + m_2) + m_1\, mm \end{cases} \tag{A-4}$$

$$\begin{cases} R_{13} = (\sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})(\sqrt{m_3}\, mm + nn + rr) \\ R_{14} = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3})(\sqrt{m_3}\, mm + nn + rr) \\ R_{15} = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})(\sqrt{m_2}\, mm + nn + rr) \end{cases} \tag{A-5}$$

$$\begin{cases} W_1 = d_0(R_4 + R_7 - b_0(R_{10} + R_{13}))a_0^3 \\ W_2 = d_0(R_5 + R_8 - b_0(R_{11} + R_{14}))a_0^3 \\ W_3 = d_0(R_6 + R_9 - b_0(R_{12} + R_{15}))a_0^3 \end{cases} \tag{A-6}$$

$$\begin{cases} R_{16} = R_{13}(m_2 + m_3) \\ R_{17} = R_{14}(m_1 + m_3) \\ R_{18} = R_{15}(m_1 + m_2) \end{cases} \tag{A-7}$$

$$\begin{cases} R_{19} = e_0(\sqrt{m_2m_3}(ff+gg) + f_{11}(\sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})) \\ R_{20} = e_0(\sqrt{m_1m_3}(ff+gg) + f_{11}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3})) \\ R_{21} = e_0(\sqrt{m_1m_2}(ff+gg) + f_{11}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})) \end{cases} \tag{A-8}$$

$$\begin{cases} R_{22} = hh(m_2^2 + \sqrt{m_3}\, m_2^{(3/2)} + m_3m_2 + m_3^{(3/2)}\sqrt{m_2} + m_3^2) \\ R_{23} = hh(m_1^2 + \sqrt{m_3}\, m_1^{(3/2)} + m_3m_1 + m_3^{(3/2)}\sqrt{m_1} + m_3^2) \\ R_{24} = hh(m_1^2 + \sqrt{m_2}\, m_1^{(3/2)} + m_2m_1 + m_2^{(3/2)}\sqrt{m_1} + m_2^2) \end{cases} \tag{A-9}$$

$$\begin{cases} R_{25} = d_0(c_0^2 + m_2m_3)(f_{12} + R_1) \\ R_{26} = d_0(c_0^2 + m_1m_3)(f_{12} + R_2) \\ R_{27} = d_0(c_0^2 + m_1m_2)(f_{12} + R_3) \end{cases} \tag{A-10}$$

$$\begin{cases} R_{28} = d_0(m_2 + m_3)(f_{12} + R_1) \\ R_{29} = d_0(m_1 + m_3)(f_{12} + R_2) \\ R_{30} = d_0(m_1 + m_2)(f_{12} + R_3) \end{cases} \tag{A-11}$$

$$\begin{cases} R_{31} = e_0(ff+gg) + R_{10} \\ R_{32} = e_0(ff+gg) + R_{11} \\ R_{33} = e_0(ff+gg) + R_{12} \end{cases} \tag{A-12}$$

$$\begin{cases} R_{34} = (-Cte\, m_2m_3 - d_0(mm\, m_2 2 + R_{16} - R_{19} + R_{22}))b_0 \\ R_{35} = (-Cte\, m_1m_3 - d_0(mm\, m_1^2 + R_{17} - R_{20} + R_{23}))b_0 \\ R_{36} = (-Cte\, m_1m_2 - d_0(mm\, m_1^2 + R_{18} - R_{21} + R_{24}))b_0 \end{cases} \tag{A-13}$$

$$\begin{cases} R_{37} = c_0(b_0(d_0(R_{13} + R_{31}) - Cte\sqrt{m_2m_3}) - R_{28}) \\ R_{38} = c_0(b_0(d_0(R_{14} + R_{32}) - Cte\sqrt{m_1m_3}) - R_{29}) \\ R_{39} = c_0(b_0(d_0(R_{15} + R_{33}) - Cte\sqrt{m_1m_2}) - R_{30}) \end{cases} \tag{A-14}$$

$$\begin{cases} W_4 = (d_0e_0(hh+mm)b_0^2 + R_{25} + R_{34} + R_{37})a_0^2 \\ W_5 = (d_0e_0(hh+mm)b_0^2 + R_{26} + R_{35} + R_{38})a_0^2 \\ W_6 = (d_0e_0(hh+mm)b_0^2 + R_{27} + R_{36} + R_{39})a_0^2 \end{cases} \tag{A-15}$$

$$\begin{cases} R_{40} = d_0(e_0f_{12} - R_{19}) \\ R_{41} = d_0(e_0f_{12} - R_{20}) \\ R_{42} = d_0(e_0f_{12} - R_{21}) \end{cases} \tag{A-16}$$

$$\begin{cases} R_{43} = Cte\sqrt{m_2m_3}(m_2 - \sqrt{m_3m_2} + m_3) \\ R_{44} = Cte\sqrt{m_1m_3}(m_1 - \sqrt{m_3m_1} + m_3) \\ R_{45} = Cte\sqrt{m_1m_2}(m_1 - \sqrt{m_2m_1} + m_2) \end{cases} \tag{A-17}$$

$$\begin{cases} R_{46} = d_0e_0(f_{11}(\sqrt{m_2} + \sqrt{m_3})(m_2 + m_3) + \sqrt{m_2m_3} \\ \quad (f_{12} + (ff+gg)(m_2 + \sqrt{m_3m_2} + m_3))) \\ R_{47} = d_0e_0(f_{11}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_3})(m_1 + m_3) + \sqrt{m_1m_3} \\ \quad (f_{12} + (ff+gg)(m_1 + \sqrt{m_3m_1} + m_3))) \\ R_{48} = d_0e_0(f_{11}(\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})(m_1 + m_2) + \sqrt{m_1m_2} \\ \quad (f_{12} + (ff+gg)(m_1 + \sqrt{m_2m_1} + m_2))) \end{cases} \tag{A-18}$$

$$
\begin{cases}
R_{49} = d_0(c_0 - m_2)(c_0 - m_3)(R_4 + f_{12}(m_2 + m_3))\\
R_{50} = d_0(c_0 - m_1)(c_0 - m_3)(R_5 + f_{12}(m_1 + m_3))\\
R_{51} = d_0(c_0 - m_1)(c_0 - m_2)(R_6 + f_{12}(m_1 + m_2))
\end{cases}
$$

(A-۱۹)

$$
\begin{cases}
R_{52} = (Cte\sqrt{m_2 m_3}c_0^2 + (R_{40} - R_{43})c_0 -\\
\quad Cte\, m_2 m_3(m_2 + m_3) + R_{46})b_0\\
R_{53} = (Cte\sqrt{m_1 m_3}c_0^2 + (R_{41} - R_{44})c_0 -\\
\quad Cte\, m_1 m_3(m_1 + m_3) + R_{47})b_0\\
R_{54} = (Cte\sqrt{m_1 m_2}c_0^2 + (R_{42} - R_{45})c_0 -\\
\quad Cte\, m_1 m_2(m_1 + m_2) + R_{48})b_0
\end{cases}
$$

(A-۲۰)

$$
\begin{cases}
W_7 = (-Cte\, e_0\sqrt{m_2 m_3}b_0^2 + R_{52} + R_{49})a_0\\
W_8 = (-Cte\, e_0\sqrt{m_1 m_3}b_0^2 + R_{53} + R_{50})a_0\\
W_9 = (-Cte\, e_0\sqrt{m_1 m_2}b_0^2 + R_{54} + R_{51})a_0
\end{cases}
$$

(A-۲۱)

$$
\begin{cases}
W_{10} = (b_0 Cte - d_0 f_{12})\sqrt{m_2 m_3}((c_0 - m_2)\sqrt{m_2 m_3}(c_0 - m_3)+\\
\quad b_0 e_0(-c_0 + m_2 + m_3 + \sqrt{m_2 m_3}))\\
W_{11} = (b_0 Cte - d_0 f_{12})\sqrt{m_1 m_3}((c_0 - m_1)\sqrt{m_1 m_3}(c_0 - m_3)+\\
\quad b_0 e_0(-c_0 + m_1 + m_3 + \sqrt{m_1 m_3}))\\
W_{12} = (b_0 Cte - d_0 f_{12})\sqrt{m_1 m_2}((c_0 - m_1)\sqrt{m_1 m_2}(c_0 - m_2)+\\
\quad b_0 e_0(-c_0 + m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2}))
\end{cases}
$$

(A-۲۲)

$$
\begin{cases}
Z_1 = (a_0 - m_1)(W_1 - W_4 + W_7 + W_{10})\\
Z_3 = -(a_0 - m_2)(W_2 - W_5 + W_8 + W_{11})\\
Z_5 = (a_0 - m_3)(W_3 - W_6 + W_9 + W_{12})
\end{cases}
$$

(A-۲۳)

$$
\begin{cases}
S_1 = a_0^2 b_0 d_0(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_3})\\
S_2 = a_0^2 b_0 d_0(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_2})(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_3})\\
S_3 = a_0^2 b_0 d_0(\sqrt{m_1} - \sqrt{m_3})(\sqrt{m_2} - \sqrt{m_3})
\end{cases}
$$

(A-۲۴)

$$
\begin{cases}
S_4 = c_0 + \sqrt{m_1}(\sqrt{m_2} + \sqrt{m_3}) + \sqrt{m_2 m_3}\\
S_5 = (S_4(c_0 - m_1 - m_2 - m_3) - b_0 e_0)a_0\\
S_6 = (\sqrt{m_1} + \sqrt{m_2})(-c_0 + m_1 + m_2)m_3^{(3/2)}+\\
\quad \sqrt{m_1 m_2}(-c_0 + m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2})m_3\\
S_7 = b_0 e_0(-c_0 + m_1 + m_2 + \sqrt{m_1 m_2} + \sqrt{m_3}) + m_3+\\
\quad \sqrt{m_2 m_3})\\
S_8 = (c_0 - m_1)(c_0 - m_2)(\sqrt{m_1}(\sqrt{m_2} + \sqrt{m_3}) + \sqrt{m_2 m_3})
\end{cases}
$$

(A-۲۵)

$$
\begin{cases}
M_1 = S_1(S_4 a_0^2 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8)\\
M_3 = S_2(S_4 a_0^2 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8)\\
M_5 = S_3(S_4 a_0^2 + S_5 + S_6 + S_7 + S_8)
\end{cases}
$$

(A-۲۶)

$$
\begin{cases}
C_1 = \frac{Z_1}{M_1}\\
C_3 = \frac{Z_3}{M_3}\\
C_5 = \frac{Z_5}{M_5}
\end{cases}
$$

(A-۲۷)

EXACT ANALYTICAL SOLUTION OF INTERFACIAL STRESSES IN STRENGTHENED RC BEAMS USING SOFFIT PLATES

M. Edalati*
edalati.mahmoud@mail.ilam.ac.ir
Faculty of Engineering
Ilam University
F. Irani
irani@um.ac.ir
Dept. of Civil Engineering
Ferdowsi University of Mashhad

Sharif Civil Engineering Journal
Volume 28, Issue 2, Page 13-26, Original Article

Abstract

This paper introduces an exact method to calculate interfacial shear and normal stresses in strengthened reinforced concrete (RC) beams by fiber reinforced polymer (FRP) sheets or steel plates (e.g. a soffit plate). As the combination of maximum interfacial shear and normal stresses is localized at the end of the soffit plate, the debonding phenomena initiates at that position and may produce a sudden failure of the structure. The effects of shear deformations are perfectly considered in the RC beam, adhesive layer and soffit plate. Thus, the composite RC beam is assumed as a Timoshenko beam. Application of shear deformations in the Timoshenko beam ends in a pair of simultaneous fourth-order and second-order ordinary differential equations. These equations in engineering literature are called coupled differential equations. These coupled equations are solved in an analytical form, without omitting any part of them. In a strengthened Timoshenko RC beam, the shear curvature should be added to the bending curvature. The Timoshenko beam assumption makes it possible to use this solution for both ordinary beams and short-span beams (while considering the shear deformations). In order to reduce the shear rigidity, especially in short-span beams, the equivalent flexural rigidity should be used instead of the actual flexural rigidity. Disregarding this reduction coefficient leads to incorrect results in short-span beams with a span-to-depth ratio less than five, and to an inaccurate solution in ordinary beams. In beams with a sandwich-like construction, the increase in deflection due to the shear deformation effect may be as great as 50 percent. An increase in the deformation before debonding causes a significant rise in the interfacial shear and the normal stresses, particularly between sandwich layers. The present paper helps to realize the effects of interfacial stresses on the behavior of strengthening RC structures by FRP sheets or steel plates. Finally, the concordance of the obtained and existing results proves that the accuracy of the proposed approach towards predicting interfacial shear and normal stresses is quite acceptable.

Key Words: interfacial shear and normal stresses, soffit plates (FRP sheet or steel plate), RC beam, coupled differential equations.

* corresponding author

Received 16 February 2010; received in revised form 09 March 2011; accepted 11 April 2011