

بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ی ترک‌دار

صمد دهقانی اسکویی (کارشناس ارشد)
همایون اسمعیل پوراستکانچی (دانشیار)
ابوالحسن وفائی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

سازه‌های پوسته‌ی در مهندسی عمران و مهندسی مکانیک کاربردهای متنوعی دارند. پوسته‌ها مثل دیگر سازه‌ها دچار آسیب‌دیدگی و تغییراتی از قبیل ایجاد و گسترش ترک می‌شوند. هدف این تحقیق بررسی اثر وجود ترک نفوذی غیرقابل گسترش و پارامترهای مختلف مربوط به آن بر روی فرکانس‌های ارتعاشی و شکل مودهای پوسته‌های استوانه‌ی مختلف است. به همین منظور تعداد ۴۰۰ مدل پوسته‌ی استوانه‌ی ترک‌دار ایجاد و کل پروژه به دو قسمت پانل‌های استوانه‌ی و استوانه‌های کامل تقسیم شد؛ و سپس اثر پارامترهای مختلف، نظیر طول ترک، زاویه‌ی ترک، ضخامت پوسته، ضریب پواسون، ارتفاع پوسته و زاویه‌ی انحنای پانل بر روی فرکانس‌های ارتعاشی و شکل مودهای پوسته‌ی استوانه‌ی مورد بررسی قرار گرفت.

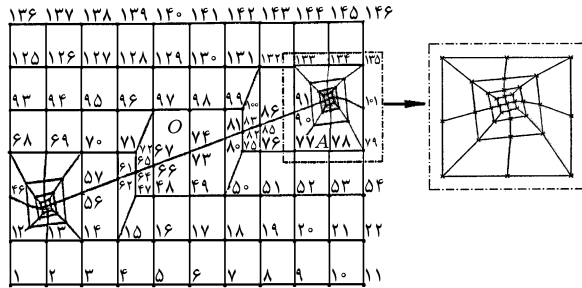
۱. مقدمه

محدوده‌ی ترک اصلاح شده باشد. [۵] نقص این روش این است که مدول کاهش یافته، با ابعاد ترک ارتباط مستقیم ندارد. روش دوم، استخراج یک ماتریس سختی برای عضو ترک‌دار با استفاده از روابط مربوط به نظریه‌ی شکست، و به کار بردن عضو مذکور در مش بندی کل سازه است. [۴] روش دیگری که در این تحقیق مورد استفاده قرار گرفته، جدا کردن گره‌های عضو در دو طرف ترک از همدیگر است. [۶، ۹] در این روش با استفاده از یک مش فشرده در اطراف نوک ترک که به علت خاصیت منحصربه‌فرد میدان تنش و تغییر شکل‌های به وجود آمده در این نقطه ایجاد شده، مدل قابل قبولی از شرایط واقعی موجود ایجاد می‌شود. در این نوشتار سعی بر بررسی تأثیر وجود ترک و پارامترهای مختلف آن بر روی فرکانس‌های ارتعاشی و شکل مودهای پوسته‌های استوانه‌ی مختلف است. در این بررسی از روش اجزاء محدود استفاده شده، و برای مدل کردن ترک نیز الگوریتم خاصی که توسط برنامه‌ی CRUX [۸] ارائه می‌شود انتخاب شده است.

۲. نظریه‌ی مسئله

۲.۱. شکل بندی ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ی کامل
ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ی نازک با استفاده از نظریه‌های مختلف قابل بررسی است. به دلیل سادگی نسبی، معادلات دینامیکی پیشنهاد شده توسط دائل برای تجزیه و تحلیل پوسته‌های استوانه‌ی را انتخاب می‌کنیم. این معادلات به روش‌های مختلفی قابل حل هستند که روش اجزای محدود یکی از این روش‌هاست.

سازه‌های پوسته‌ی کاربردهای مختلفی دارند و همچون دیگر سازه‌ها، در طول عمر مفید خود دچار آسیب‌ها و تغییرات گوناگون، نظیر تشکیل و گسترش ترک، خوردگی، حملات شیمیایی و فرسودگی، می‌شوند. ترک‌های ایجاد شده در اعضای سازه‌ی باعث ایجاد تغییرات جدی در عملکرد صحیح اعضا می‌شوند. مطالعه پیرامون ظرفیت باربری و ارتعاش آزاد صفحات و پوسته‌های ترک‌دار یکی از موضوعات مورد علاقه‌ی محققین بوده است و در سال‌های اخیر کماتش و ارتعاش صفحات ترک‌دار به‌طور گسترده‌ی مورد بررسی قرار گرفته است. [۸-۹] در عین حال بررسی‌های پارامتریک انجام شده در زمینه‌ی پوسته‌های دارای ترک درشت با نفوذ کامل بسیار محدود است. [۹-۱۲] هدف از این تحقیق بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ی ترک‌دار با ترک نفوذی غیرقابل گسترش است. به منظور بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌های استوانه‌ی ترک‌دار، ایجاد یک مدل ریاضی مناسب از ساختمان آسیب دیده مورد نیاز است. عمده‌ی تحقیقات انجام شده در رابطه با تجزیه و تحلیل استاتیکی و دینامیکی صفحات و پوسته‌های ترک‌دار در دو گروه کلی تقسیم بندی می‌شوند: یک دسته تحقیقاتی که به روش تحلیلی انجام شده و دسته‌ی دوم تحقیقاتی که در آنها ایجاد و تحلیل مدل به روش اجزاء محدود انجام می‌شود. با توجه به پیچیدگی مسئله‌ی ارتعاش پوسته‌های ترک‌دار، تحلیل‌های انجام شده در این مورد بسیار محدود است. در این نوشتار برای بررسی مسئله از روش اجزاء محدود استفاده می‌شود. ساده‌ترین روش موجود در این رابطه استفاده از اجزاء کلاسیک صفحه است که در آن ماتریس سختی با کاهش مدول الاستیسیته در



شکل ۱. نحوه‌ی مدل‌سازی ترک در برنامه crux.

مطابق شکل کلی کار که در شکل ۱ آمده است، ابتدا شبکه‌یی با تعداد سطر و ستون مشخص ایجاد می‌شود. تغییرات شبکه از وسط ترک شروع شده و به سمت A پیش می‌رود. در هر گام از طول ترک، یک المان افزایش می‌یابد. در این حالت، هرگاه طول ضلع سمت راست المان مورد نظر از ۱/۵ برابر عرض آن بیشتر شود، المان به سه المان تجزیه می‌شود. و این تغییرات عیناً در مرز بالایی شبکه نیز اعمال می‌شود. در حالتی که ضلع سمت راست المان مورد نظر از ۱/۵ برابر عرض آن بیشتر نباشد، تناسب اضلاع قابل قبول بوده و تنها با افزایش گره‌های مرزی ترک گسترش می‌یابد.

مسئله‌ی بعدی ریزکردن اجزاء در نوک ترک است (میزان ریز شدن اجزاء قابل تعیین است). در این مورد می‌توان از تصاعد هندسی استفاده کرد. همچنین زاویه‌ی ضلع واقع در راستای ترک اجزاء نوک ترک را می‌توان با تصاعد حسابی تغییر داد.

۲.۳. بررسی صحت عملکرد مدل

برای کسب اطمینان از نتایج حاصل از مدل مورد استفاده باید صحت عملکرد مدل مورد بررسی قرار گیرد. پیش‌تر صحت عملکرد مدل به کار گرفته شده در مسائل مربوطه به کماتش پوسته‌ها بررسی شده است.^[۱] در این تحقیق کارایی مدل برای مسائل ارتعاش آزاد پوسته‌های ترک‌دار، با دو مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد.

مثال ۱: پوسته‌ی استوانه‌یی کامل بدون ترک با شعاع ۷٫۶۲ سانتی‌متر (۳ اینچ)، ارتفاع ۳۰/۴۸ سانتی‌متر (۱۲ اینچ)، ضخامت ۲۵۴/۰ سانتی‌متر (۱ اینچ)، از جنس فولاد و با شرایط تکیه‌گاهی گیردار را در نظر می‌گیریم. نتایج حاصل از حل نظری، نتایج حاصل تحلیل مدل ایجاد شده توسط نرم‌افزار Crux با اجزاء چهارگره‌یی، و نیز نتایج حاصل از تحلیل مدل ایجاد شده توسط نرم‌افزار Crux با اجزاء هشت‌گره‌یی در شکل ۲ آمده است که نشان‌گر انطباق بسیار خوب نتایج عددی و نظری است.

مثال ۲: صفحه‌ی فولادی با ابعاد $1^m \times 1^m$ و چگالی $\rho = 7850 \text{ kg/m}^3$ ، مدول یانگ $E = 2.04 \times 10^8 \text{ N/m}^2$ ، ضریب پواسون $\nu = 0.3$ را در نظر می‌گیریم؛ شرایط تکیه‌گاهی این

۲.۲. بررسی ارتعاش آزاد پوسته‌ها از دیدگاه اجزاء محدود

در روش اجزاء محدود محیط پیوسته به عضوایی تقسیم می‌شود و بردار جابه‌جایی در هر نقطه از عضو به وسیله‌ی ماتریس f به جابه‌جایی نقاطی از عضو، به نام گره، مربوط می‌شوند.

$$u = fq \quad (1)$$

که در آن q جابه‌جایی کلیه‌ی گره‌های عضو، و u بردار جابه‌جایی نقاط مختلف عضو است. حال اگر عضو را به هم متصل کنیم و محیط پیوسته را تشکیل دهیم، با به کار بردن اصل کار مجازی برای این محیط به معادله‌ی ۲ می‌رسیم.

$$M_N \ddot{D}_N + S_N D_N = A_N + A_{Nb} \quad (2)$$

که در آن \ddot{D}_N بردار شتاب کلیه‌ی گره‌های سازه، D_N جابه‌جایی کلیه‌ی گره‌های سازه، S_N ماتریس سختی سازه، M_N ماتریس جرم سازه، A_{Nb} کل نیروهای گره‌یی معادل با نیروهای حجمی وارد بر کل سازه و A_N نیروهای گره‌یی وارد بر کل سازه است. با برابر صفر قرار دادن A_N و A_{Nb} ، معادله‌ی حرکت ارتعاش آزاد به دست می‌آید. با حذف حرکت‌های صلب به معادله‌ی ۳ می‌رسیم.

$$M_{FF} \ddot{D}_F + S_{FF} D_F = 0 \quad (3)$$

که در آن F نشان‌دهنده‌ی درجه‌ی آزادی‌های آزاد است. حل معادله‌ی همگن ۳ به حل مسئله‌ی مقدار ویژه‌ی مطرح شده در معادله‌ی ۴ می‌انجامد.

$$(S - \omega_i^2 M) \Phi_i = 0 \quad (4)$$

که در آن Φ_i شکل مود i ام و ω_i فرکانس مود i ام است. در این تحقیق معادله‌ی ۴ با استفاده از روش Subspace و توسط برنامه‌ی SAP۹۰ تحلیل شده است.

۳. مدل مورد استفاده

۳.۱. روش شبکه‌بندی پوسته‌ی ترک‌دار

شبکه‌های اجزاء محدود دارای ترک نفوذی کامل با زاویه و طول داده شده نسبت به محور شبکه، توسط برنامه‌ی Crux تولید و روی سطح دلخواه (صفحه‌ی مسطح یا سطح استوانه‌یی) تصویر می‌شود. در شبکه‌بندی با توجه به مزایای اجزاء چهارگره‌یی نسبت به اجزاء مثلثی از اجزاء چهارضلعی استفاده شده است. در استفاده از اجزاء چهارضلعی سعی شده است ضمن حفظ تناسب طول اضلاع و اجتناب از زوایای تند، گره‌های گوشه‌یی اجزاء به گره وسط اجزاء کناری متصل نباشد.

جدول ۱. مشخصات مدل‌های مورد بررسی برای مشاهده اثر ضخامت، طول ترک و زاویه‌ی ترک در پانل‌های استوانه‌یی.

پارامتر	حالت	مقدار
ارتفاع (h)	ثابت	۲m
عرض (b)	ثابت	۲m
ضخامت (t)	متغیر	۲۰، ۵، ۲mm
انحنای (θ)	ثابت	۳۰
ضریب پواسون	ثابت	۰٫۳
طول ترک (a)	متغیر	۰٫۰۲، ۰٫۰۶، ۰٫۱۶، ۰٫۱۸m
زاویه ترک با محور استوانه (α)	متغیر	۰، ۲۰، ۴۵، ۷۰، ۹۰
مش بندی	ثابت	۲۰ × ۲۰

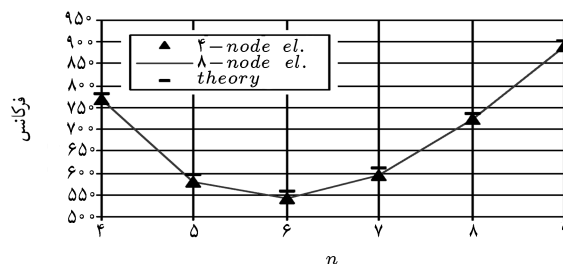
مشخصات آن با مشخصات نمونه‌ی ترک‌دار یکی است) به دست می‌آید. این کاهش در حالت $\alpha = 0^\circ$ کم‌ترین مقدار و در حالت $\alpha = 90^\circ$ بیشترین مقدار است (شکل‌های ۴ و ۵). در زاویه‌های ترک بزرگ‌تر منحنی تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب تغییرات طول ترک، تغییرات بیشتری دارد. در حالت $\alpha = 0^\circ$ وجود ترک تأثیر اساسی در شکل مودها ندارد و در طول ترک‌های بزرگ (مثلاً $\frac{a}{b} \geq 0.75$) ممکن است در بعضی از شکل مودهای سه مود اول جدایی لبه‌ها اتفاق بیفتد (شکل ۶). تأثیر کم وجود ترک بر شکل مودها و فرکانس‌های ارتعاشی را در حالت $\alpha = 0^\circ$ می‌توان با توجه به سختی غشایی لبه‌های ترک توجیه کرد. در حالتی که $\alpha = 90^\circ$ ، حتی در طول ترک‌هایی چون $\frac{a}{b} = 0.3$ ، وجود ترک اثر قابل ملاحظه‌یی در شکل مودها دارد و برای طول ترک‌های بزرگ‌تر مثل $\frac{a}{b} \geq 0.3$ ارتعاش پوسته در سه مود اول اغلب به صورت موضعی در ترک اتفاق می‌افتد (شکل ۷).

۲.۱.۴. اثر زاویه‌ی ترک

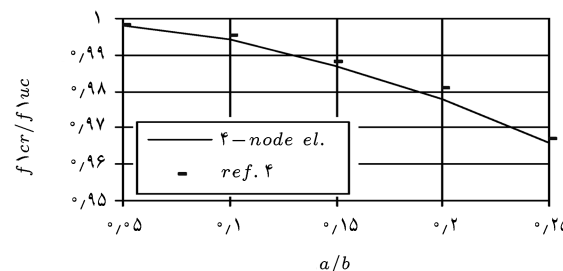
به‌منظور نشان دادن اثر ترکیبی طول ترک، زاویه‌ی ترک و ضخامت پوسته از مدل‌های جدول ۱ استفاده شد. بررسی به عمل آمده نشان می‌دهد که با افزایش زاویه‌ی ترک از صفر به 90° فرکانس‌های ارتعاشی و فرکانس‌های نرمال کاهش می‌یابند (شکل ۸). هرچه طول ترک بیشتر باشد این کاهش واضح تر است. به‌ازای طول ترک‌هایی چون $\frac{a}{b} \leq \sqrt{1}$ با افزایش زاویه‌ی ترک، در شکل مودها تغییر جدی رخ نمی‌دهد و شکل مودهای ارتعاشی به‌صورت کلی هستند. ولی در طول ترک‌هایی چون $\frac{a}{b} \geq \sqrt{3}$ با افزایش زاویه ترک وجود ترک اثرش را بیشتر نشان می‌دهد.

۳.۱.۴. اثر ضخامت

به‌منظور نشان دادن اثر ترکیبی طول، ضخامت و زاویه‌ی ترک از مدل‌های جدول ۱ استفاده شد. این مدل‌ها همان مدل‌هایی هستند که در بررسی اثر طول ترک از آنها استفاده شد. بررسی‌های به‌عمل آمده نشان می‌دهد که با کاهش ضخامت پوسته، فرکانس نرمال اول کاهش



شکل ۲. تغییرات فرکانس‌های ارتعاشی برحسب تغییرات تعداد موج‌های محیطی استوانه‌ی کامل.



شکل ۳. تغییرات $\frac{f_{cr}}{f_{uc}}$ برحسب تغییرات طول ترک در صفحه‌ی ترک‌دار.

صفحه به‌صورت ساده است. روی این صفحه ترک‌های افقی با طول‌های مختلف را در نظر می‌گیریم. نتایج حاصل از تحلیل مدل تولید شده با اجزاء چهارگره‌ی ایزوپارامتریک در نمودارهای شکل ۳ آمده است که در آن طول ترک a طول ترک $b=1m$ است. در این شکل نیز انطباق نتایج نشان‌گر رفتار مناسب مدل است.

۳.۲. مشخصات عمومی مدل‌های مورد بررسی

در مدل‌های مورد مطالعه در این تحقیق، مواد به کار رفته از جنس آلومینیوم با چگالی 2800 کیلوگرم بر متر مکعب و مدول الاستیسیته 70000 مگاپاسکال هستند. ترک به کار رفته در تمامی نمونه‌ها یک ترک نفوذی کامل غیرقابل گسترش است، و تمامی شرایط تکیه‌گاهی مدل‌ها گیردار هستند.

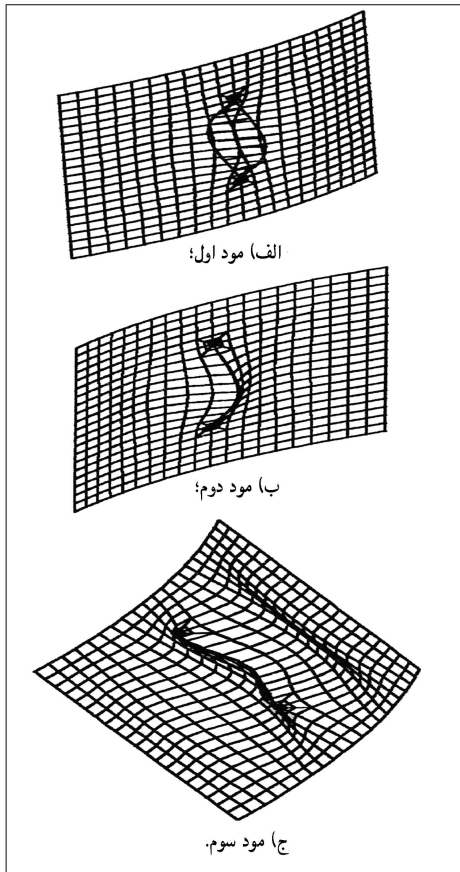
۴. بررسی نتایج

۱.۴. پانل‌های استوانه‌یی

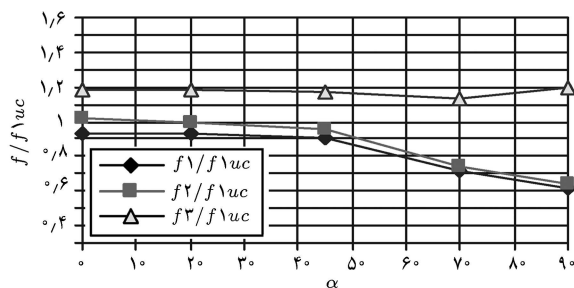
۱.۱.۴. اثر طول ترک

به‌منظور نشان دادن اثر ترکیبی طول ترک با ضخامت پوسته و زاویه‌ی ترک، تعداد ۷۵ مدل ایجاد شده است، که مشخصات آن‌ها در جدول ۱ آمده است.

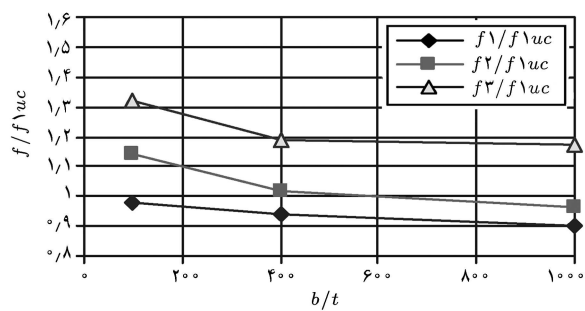
بررسی‌های به‌عمل آمده حاکی از آن است که با افزایش طول ترک فرکانس‌های ارتعاشی و فرکانس‌های نرمال کاهش می‌یابند. فرکانس‌های نرمال اول، دوم و سوم نمونه‌ی ترک‌دار از تقسیم فرکانس‌های اول، دوم و سوم نمونه‌ی ترک‌دار به فرکانس اول نمونه‌ی بدون ترک (که سایر



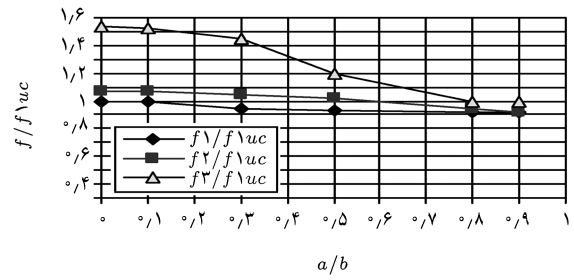
شکل ۷. شکل مودهای پانل استوانه‌یی ترک‌دار ($\alpha = 90^\circ$ و $\frac{b}{t} = 1000$ و $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$).



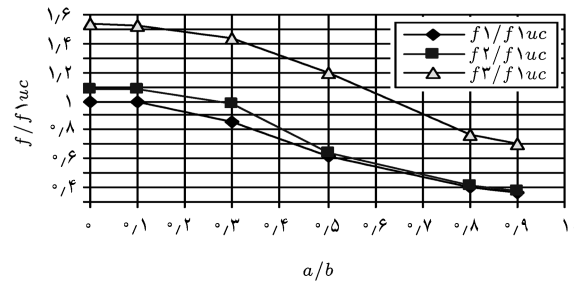
شکل ۸. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب زاویه‌ی ترک در پانل استوانه‌یی ($\frac{a}{b} = \sqrt{5}$ و $\frac{b}{t} = 400$).



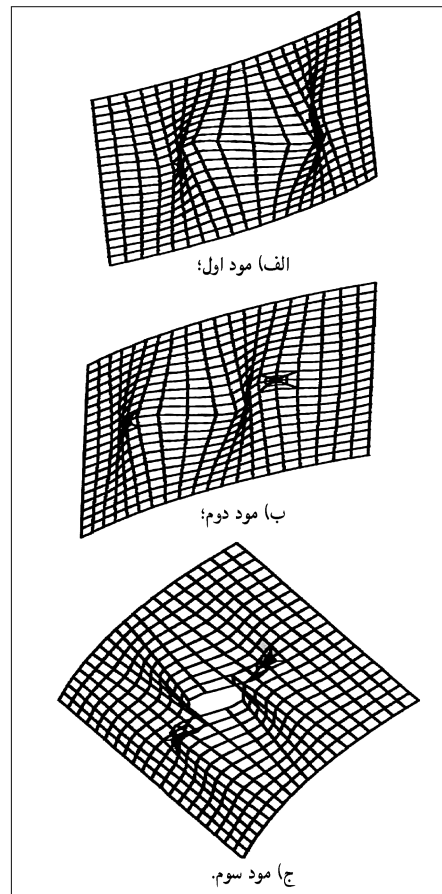
شکل ۹. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب ضخامت پانل استوانه‌یی ($\alpha = 0^\circ$ و $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$).



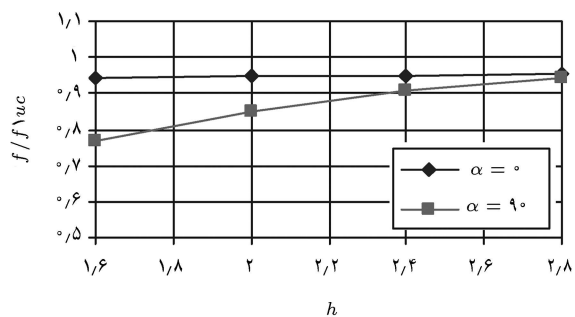
شکل ۴. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب تغییرات طول ترک در پانل استوانه‌یی ($\frac{b}{t} = 400$ و $\alpha = 0^\circ$).



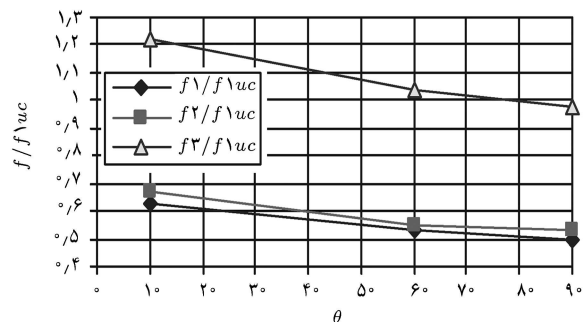
شکل ۵. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب تغییرات طول ترک در پانل استوانه‌یی ($\frac{b}{t} = 400$ و $\alpha = 90^\circ$).



شکل ۶. شکل مودهای پانل استوانه‌یی ترک‌دار ($\alpha = 0^\circ$ و $\frac{b}{t} = 1000$ و $\frac{a}{b} = \sqrt{5}$).



شکل ۱۰. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب ارتفاع در پانل استوانه‌یی.



شکل ۱۱. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب زاویه‌ی انحنای پانل استوانه‌یی.

جدول ۲. مدل‌های مورد بررسی برای مشاهده‌ی اثر ارتفاع در پانل‌های استوانه‌یی.

پارامتر	حالت	مقدار
ارتفاع (h)	متغیر	۱٫۶، ۲٫۰، ۲٫۴، ۲٫۸m
عرض (b)	ثابت	۲m
ضخامت (t)	ثابت	۲mm
انحنای (θ)	ثابت	۳۰
ضریب پواسون	ثابت	۰٫۳
طول ترک (a)	متغیر	۰٫۰۶، ۱٫۱، ۱٫۴m
زاویه ترک با محور استوانه (α)	متغیر	۰٫۹۰
مش‌بندی	متغیر	

جدول ۳. مدل‌های مورد بررسی برای مشاهده‌ی اثر انحنای، طول ترک و زاویه‌ی ترک در پانل‌های استوانه‌یی.

پارامتر	حالت	مقدار
ارتفاع (h)	ثابت	۲m
عرض (b)	ثابت	۲m
ضخامت (t)	ثابت	۲mm
انحنای (θ)	متغیر	۱۰، ۶۰، ۹۰
ضریب پواسون	ثابت	۰٫۳
طول ترک (a)	متغیر	۰٫۰۲، ۰٫۰۶، ۱٫۱، ۱٫۶، ۱٫۸m
زاویه ترک با محور استوانه (α)	متغیر	۰٫۲۰، ۴۵، ۷۰، ۹۰
مش‌بندی	ثابت	۲۰ × ۲۰

در طول ترک‌های خیلی بزرگ مثل $\frac{a}{r} \geq 2$ ممکن است در بعضی از شکل مودهای سه مود اول جدایی لبه‌ها صورت بگیرد و ارتعاش موضعی لبه‌های ترک اتفاق بیفتد. تأثیر کم وجود ترک بر شکل مودها و فرکانس‌های ارتعاشی در حالت $\alpha = 0$ را می‌توان با توجه به سختی

می‌یابد (شکل ۹). به عبارت دیگر، اثر وجود ترک در فرکانس مود اول پوسته‌های نازک‌تر مشهودتر است. در مودهای دوم و سوم نیز با لاغرتر شدن پوسته فرکانس‌های نرمال کاهش می‌یابند.

۴.۱.۴. اثر ارتفاع پانل

به‌منظور نشان دادن اثر ترکیبی ارتفاع پانل، طول ترک و زاویه‌ی ترک، تعداد ۲۸ مدل با مشخصات داده شده در جدول ۲ ایجاد شده است. بررسی‌های به‌عمل آمده نشان می‌دهد که با افزایش ارتفاع فرکانس‌های طبیعی کاهش، و فرکانس‌های نرمال اول، دوم و سوم افزایش می‌یابند؛ به عبارت دیگر می‌توان گفت در پانل‌های کوتاه‌تر وجود ترک بیشتر بر فرکانس اول ارتعاشی تأثیر می‌گذارد. این بدان معناست که اثر یک ترک با طول ثابت بر روی پوسته‌ی بلند کم‌تر است (شکل ۱۰). در منحنی تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب ارتفاع، با افزایش ارتفاع پانل، زاویه‌ی ترک اثرش را از دست می‌دهد. به عبارت دیگر تأثیر زاویه‌ی ترک با طول ثابت بر روی فرکانس‌های ارتعاشی پانل کوتاه‌تر بیشتر است.

۵.۱.۴. اثر انحنای پانل

بررسی‌ها نشان می‌دهد که با افزایش زاویه‌ی انحنای قوس هر سه فرکانس اول، دوم و سوم به‌صورت معکوس یک تابع نمایی تغییر می‌کند. در نتیجه‌ی افزایش θ از صفر تا ۱۲۰ درجه، در سه مود اول شکل مودها به چندین موج محیطی و یک موج طولی تبدیل می‌شوند.

به‌منظور نشان دادن اثر ترکیبی، طول ترک، زاویه‌ی ترک و انحنای پانل مدل‌های جدول ۳ طراحی شده است. با بررسی نتایج مربوط به این مدل‌ها می‌توان گفت با افزایش θ فرکانس‌های نرمال اول، دوم و سوم کاهش می‌یابد (شکل ۱۱). به بیان دیگر وجود ترک اثر خود را در θ ‌های بالاتر بیشتر نشان می‌دهد. همچنین تأثیر افزایش زاویه‌ی ترک در θ ‌های بالاتر مشخص‌تر است.

۶.۱.۴. اثر ضریب پواسون

با بررسی نتایج به‌دست آمده می‌توان گفت ضریب پواسون بر شکل مودها و فرکانس‌های ارتعاشی مدل‌های مورد بررسی تأثیر چندانی ندارد.

۲.۴. استوانه‌های کامل

۱.۲.۴. اثر طول ترک

به‌منظور نشان دادن اثر ترکیبی طول ترک، زاویه ترک و ضخامت تعداد ۷۵ مدل ایجاد شده است. مشخصات کامل این مدل‌ها در جدول ۴ آمده است.

بررسی‌های به‌عمل آمده نشان می‌دهد که با افزایش طول ترک فرکانس‌های ارتعاشی و فرکانس‌های نرمال کاهش می‌یابند. این کاهش در حالت $\alpha = 0$ کم‌ترین مقدار، و در حالت $\alpha = 90$ بیشترین مقدار است (شکل ۱۲ و ۱۳). در حالت $\alpha = 0$ وجود ترک در حالت $\frac{a}{r} \leq \sqrt{8}$ بر شکل مودها تأثیر اساسی نمی‌گذارد (شکل ۱۴) و فقط

جدول ۴. مدل‌های طراحی شده برای مشاهده‌ی اثر طول ترک، زاویه‌ی ترک و ضخامت در استوانه‌ی کامل.

پارامتر	حالت	مقدار
ارتفاع (h)	ثابت	۲m
شعاع (r)	ثابت	۲m
ضخامت (t)	متغیر	۲mm
ضریب پواسون	ثابت	۰٫۳
طول ترک (a)	متغیر	۰٫۰۲، ۰٫۰۶، ۰٫۱، ۰٫۱۶، ۰٫۱۸m
زاویه ترک با محور استوانه (α)	متغیر	۰، ۲۰، ۴۵، ۷۰، ۹۰
مش بندی	ثابت	۲۲ × ۳۶

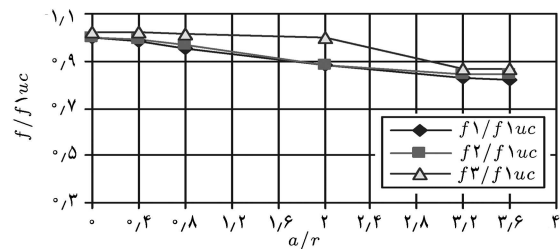
غشایی لبه‌های ترک توجیه کرد. در حالت $\alpha = 90^\circ$ حتی در طول ترک‌هایی چون $\frac{a}{r} = \sqrt{8}$ وجود ترک در شکل مودها اثر محسوس می‌گذارد (شکل ۱۵) و برای طول ترک‌های بزرگ‌تر مثل $\frac{a}{r} \geq 2$ ارتعاش پوسته در سه مود اول اغلب به صورت موضعی در ترک اتفاق می‌افتد.

۲.۲.۴. اثر زاویه‌ی ترک

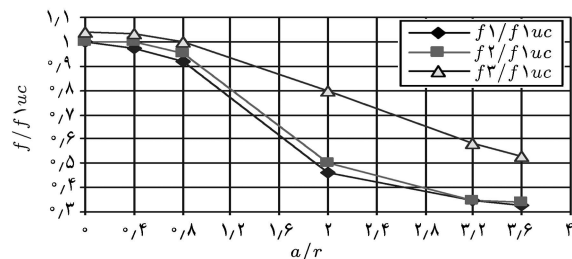
به منظور نشان دادن اثر ترکیبی زاویه‌ی ترک، طول ترک و ضخامت از مدل‌های مشابه جدول ۴ استفاده شده است. براساس بررسی‌های به عمل آمده، در طول ترک‌هایی چون $\frac{a}{r} \leq \sqrt{4}$ با افزایش زاویه‌ی ترک در شکل مودها و فرکانس‌های ارتعاش تغییر جدی رخ نمی‌دهد و شکل مودها به صورت کلی مطیح‌اند (در سه مود اول). در طول ترک‌های بالاتر (مثل $\frac{a}{r} \geq \sqrt{8}$) با افزایش زاویه‌ی ترک فرکانس‌های ارتعاشی و فرکانس‌های نرمال کاهش می‌یابند (شکل ۱۶)، این کاهش در صورتی که طول ترک بزرگ‌تر باشد محسوس‌تر است.

۳.۲.۴. اثر ضخامت

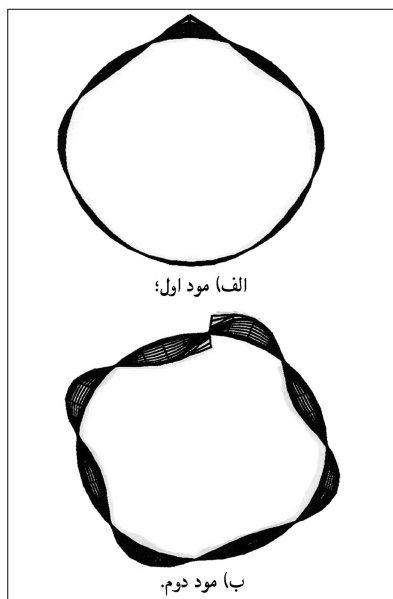
به منظور نشان دادن اثر ترکیبی طول ترک، ضخامت و زاویه‌ی ترک از مدل‌های مشابه جدول ۴ استفاده شد. با لاغرتر شدن پوسته، فرکانس نرمال اول کاهش می‌یابد. به عبارت دیگر در پوسته‌های نازک‌تر، وجود ترک تأثیر بیشتری بر فرکانس اول می‌گذارد. فرکانس‌های نرمال دوم و سوم نیز با لاغرتر شدن پوسته کاهش می‌یابند. در استوانه‌ی کامل در حالت $\alpha = 90^\circ$ در طول ترک‌های بالا ($\frac{a}{r} \geq 2$) به علت وجود ترک سه مود اول، ارتعاش آزاد به صورت موضعی در لبه‌های ترک اتفاق می‌افتد، لذا به ازای ضخامت‌های مختلف در این حالت شکل مودهای



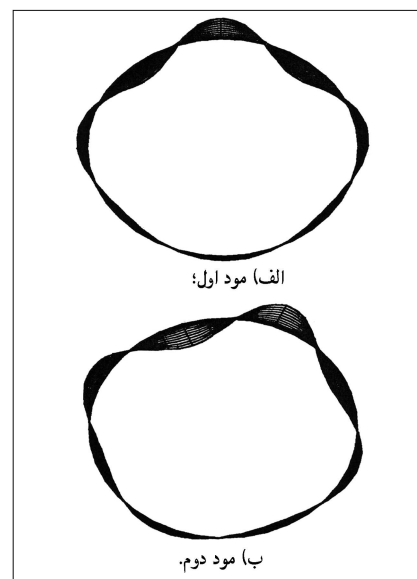
شکل ۱۲. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب تغییرات طول ترک در استوانه‌ی کامل ($\frac{r}{t} = 400$ و $\alpha = 0^\circ$).



شکل ۱۳. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب تغییرات طول ترک در استوانه‌ی کامل ($\frac{r}{t} = 400$ و $\alpha = 90^\circ$).



شکل ۱۵. مودهای استوانه‌ی ترک‌دار ($\alpha = 90^\circ$ و $\frac{r}{t} = 100$ و $\frac{a}{r} = \sqrt{8}$).



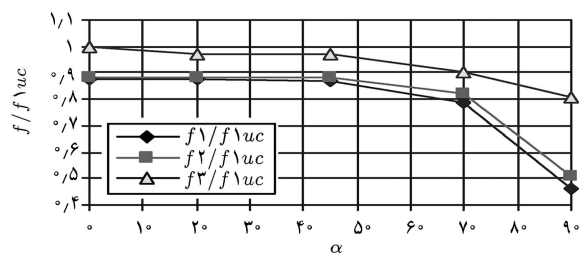
شکل ۱۶. مودهای استوانه‌ی ترک‌دار ($\alpha = 0^\circ$ و $\frac{r}{t} = 100$ و $\frac{a}{r} = 2$).

۲. در پانل‌ها و استوانه‌های کامل ترک‌دار، با افزایش طول ترک کاهش فرکانس ارتعاش در حالت $\alpha = 0^\circ$ کم‌ترین مقدار، و در حالت $\alpha = 90^\circ$ بیشترین مقدار است. با افزایش زاویه‌ی ترک از صفر به 90° درجه فرکانس‌های ارتعاشی و فرکانس‌های نرمال کاهش می‌یابند. همچنین وجود ترک در حالت $\alpha = 0^\circ$ کم‌ترین و در حالت $\alpha = 90^\circ$ بیشترین تأثیر را بر شکل مودها می‌گذارد.

۳. در پانل‌های استوانه‌ی و استوانه‌های کامل، وجود ترک بر فرکانس‌های اول، دوم و سوم پوسته‌های نازک‌تر تأثیر بیشتری دارد. همچنین در پانل‌های استوانه‌ی وجود ترک بر فرکانس‌های اول، دوم و سوم پوسته‌های کوتاه‌تر مؤثرتر است.

۴. در پانل‌های استوانه‌ی با افزایش زاویه‌ی انحنای قوس، هر سه فرکانس اول، دوم و سوم به صورت معکوس یک تابع نمایی تغییر ایجاد می‌کنند. در این پانل‌ها هرچه زاویه‌ی انحنای قوس بیشتر باشد، اثر وجود ترک بیشتر نمایان می‌شود. همچنین در زاویه‌ی انحنای بالاتر، تغییر زاویه‌ی ترک اثر خود را بهتر نشان می‌دهد.

۵. تغییر ضریب پواسون در پانل‌های استوانه‌ی و استوانه‌های کامل، تأثیر محسوسی بر فرکانس‌ها و شکل مودهای پانل‌ها و استوانه‌های ترک‌دار ندارد.



شکل ۱۶. تغییرات فرکانس‌های نرمال برحسب تغییرات زاویه‌ی ترک در استوانه‌ی کامل ($\frac{a}{r} = 2$ و $\frac{t}{r} = 400$).

یکسانی خواهیم داشت. در استوانه‌های کامل به‌ازای تمامی طول ترک و زاویه ترک‌های بررسی شده وجود ترک اثر خود را در شکل مودهای پوسته‌های نازک‌تر بیشتر نشان می‌دهند.

۵. نتیجه‌گیری

در مجموع با توجه به نتایج بدست آمده در این تحقیق در رابطه با ارتعاش آزاد پوسته‌های ترک‌دار می‌توان نتایج زیر را عنوان کرد:

۱. روش اجزاء محدود با استفاده از الگوی ریز کردن المان‌ها در ناحیه‌ی اطراف ترک در تحلیل ارتعاش آزاد پوسته‌های ترک‌دار از قابلیت و کارایی بسیار خوبی برخوردار است.

منابع

1. Estekanchi, H.E. and Vafai, A. "On the buckling of cylindrical shells with through cracks under axial load", *Thin walled structures*, **35**, pp. 255-274 (1999).
2. Vafai, A. and Estekanchi, H.E. "A parametric finite element study of cracked plates and shells", *thin walled structures* **33**, pp. 211-229 (1999).
3. Kraus, Harry. "Thin elastic shells", New York; London; Sydney, John Wiley & sons (1967).
4. Mark, Krawczuk. and ostachowicz wiselaw M., "A finite plate element for dynamic analysis of cracked plate", *Computer methods in applied mechanics and engineering*, **115**, pp. 67-68 (1994).
5. Cawley, P. and R.D. Adams, "The location of defects in structures from measurement of natural frequencies", *J. strain anal.* **14**, pp. 49-57 (1979).
6. Lee, H.P. and Lim, S.P. "Vibration of cracked rectangular plates including transverse shear de-

formation and rotary inertia", **49**(4), pp. 715-718 (1993).

7. Liew, K.M., Hung, K.C. and Lim, M.K. "Solution method for analysis of cracked plates under vibration", *Engineering fracture mechanics*, **48**(3) (1994).
8. Krawczuk, M. "Natural vibration of rectangular plates with a through crack", *Archive of applied mechanics*, **63**(7), pp. 491-504 (1993).
9. Owen, D.R.J. and Luxmoore, A.R. "Numerical methods in fracture mechanics", Pineridge press, Swansea, United Kingdom (1980).
10. Woo, C.W. and Chow, C.L. "Finite element analysis of crack instability", *Proceeding of second International conference, Swansea* (1980).
11. Kraus, Harry. "Thin elastic shells", New York; London; Sydney, John Wiley & sons (1967).
12. Clough, R.W. and Johnson, R.J. "A finite element approximation for the analysis of thin shells", *Int. J. Solid Struct.* **4**, pp. 43-60 (1968).