مهندسی عمران شریف
دوره‌ی ۲-۲۹، شماره‌ی ۱، ص. ۵۵-۶۴

Original Article

توابع پتانسیل برای مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی

میثم فراتی (دانشجوی کارشناسی ارشد)
مرتضی اسکندری قادی * (دانشیار)
محمد رحیمیان (استاد)
دانشکده‌ی فنی و مهندسی، دانشگاه تهران

یک زیرمجموعه‌ی باز در یک فضای اقلیدسی شامل محیط همسانگرد جانبی با رفتار ارتجاعی ـخطی از نقطه‌نظر ترموالاستیسیته به‌منزله‌ی دامنه‌ی مسئله‌ی مورد مطالعه در نظر گرفته می‌شود. با استفاده از یک روش سیستماتیک، توابع پتانسیل کامل برای حل مسائل ترموالاستودینامیک در این محیط ارائه می‌شود. این توابع پتانسیل برای جداسازی معادلات دیفرانسیل کوپل شده‌ی تغییرمکان ـدرجه‌ی حرارت برگرفته از معادلات حرکت و قانون اول ترمودینامیک حاکم بر محیط به‌کار می‌روند. توابع پتانسیل، شامل دو تابع اسکالر هستند که یکی از آن‌ها معادله‌ی دیفرانسیل جزئی از مرتبه‌ی شش و دیگری معادله‌ی دیفرانسیل جزئی از مرتبه‌ی دو را ارضا می‌کند. در مورد هم‌ارزبودن و غیریکتابودن توابع پتانسیل بحث‌شده و دو مورد دیگر از توابع پتانسیل به منظور نشان دادن غیریکتابودن ذکر می‌شود. به‌علاوه، مسئله در حالت دو بعدی مفصلاً بحث شده است و توابع پتانسیل مربوط به‌طور جداگانه ارائه می‌شود.

واژگان کلیدی: ترموالاستودینامیک، محیط همسانگرد جانبی، توابع پتانسیل، معادلات حرکت و انرژی، قانون اول ترمودینامیک.

mforati@ut.ac.ir
ghadi@ut.ac.ir
rahimian@ut.ac.ir

۱. مقدمه

تاکنون مطالعات بسیاری در زمینه‌ی تئوری ارتجاعی خطی در محیط غیرهمسانگرد[۱] صورت گرفته است. در حالت کلی و در صورتی که در یک محیط سه بعدی، فرض همسانگردبودن ماده کنارگذاشته شود، تحلیل مسئله پیچیده و طولانی خواهد شد.[۱] همچنین زمانی که معادلات حاکم بر مسئله به‌صورت دینامیکی و شامل قسمت حرارتی نیز باشد، بر پیچیدگی تحلیل مسئله افزوده خواهد شد. لذا بررسی تحلیلی مسائل ترموالاستودینامیک[۲] در یک محیط سه بعدی غیرهمسانگرد کمتر مورد توجه قرارگرفته است. در پژوهشی نیز نشان داده شده است که یکی از مهم‌ترین خصوصیات مکانیکی مواد کامپوزیت[۳]، ویژگی غیرهمسانگرد بودن آن‌هاست،[۲] و همسانگرد جانبی[۴] از بارزترین و کاربردی‌ترین نمونه‌های مواد غیرهمسانگرد است.

در یک محیط ارتجاعی، شکل و فرم معادلات حاکم بر مسائل ترموالاستیسیته[۵] به لحاظ ریاضی با روابط تئوری تغییرشکل[۶] در یک محیط ارتجاعی متخلخل اشباع[۷] که اغلب در مسائل تراوش و تحکیم محیط‌های متخلخل[۸] کاربرد دارند، مشابه است.[۳و۴] درحقیقت، عامل درجه‌ی حرارت[۹] در روابط تئوری ترموالاستیسیته، نقش فشار سیال موجود در حفره‌ها[۱۰] در روابط محیط‌های متخلخل اشباع را ایفا می‌کند و براساس تشابه‌سازی ریاضی، پژوهشگران نشان داده‌اند که بررسی مسائل ترموالاستیسیته، اهمیت ویژه‌یی در تحلیل مسائل محیط‌های چندفازی دارد.[۳و۴]

در این مقاله، به مسائل ترموالاستودینامیک به‌صورت سه بعدی در یک محیط همسانگرد جانبی توجه شده است، به‌صورتی که محور تقارن ارتجاعی[۱۱] محیط همسانگرد جانبی و محور تقارن انتقال حرارت هدایتی و انبساط حرارتی[۱۲] محیط بر هم منطبق هستند. به‌علاوه فرض می‌شود، محیط نسبت به این محور محدب[۱۳] باشد؛ یعنی هر خط موازی با این محور، مرزهای محیط را در بیشینه دو نقطه قطع کند.[۱و۵]

از اولین مطالعاتی که در این زمینه صورت پذیرفته است، بررسی محیط همسانگرد جانبی در حالت متقارن محوری[۱۴] و بدون پیچش بود و تابع پتانسیل[۱۵] اسکالر مجزاکننده‌ی معادلات تعادل برای آن در سال ۱۹۴۰ ارائه شد.[۶] معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل، یک معادله دیفرانسیل جزیی از مرتبه چهار بوده،[۶] که درواقع تعمیم‌یافته‌یی از تابع کرنشی لاو برای محیط‌های همسانگرد است.[۷-۹] در یک مطالعه‌ی دیگر مسائل الاستواستاتیک[۱۶] در حالت کلی مورد توجه قرارگرفته و تابع پتانسیل لخنیتسکی برای حالت کلی تعمیم داده شده است.[۹و۱۰] همچنین برای مسائل سه بعدی در حالت متقارن محوری، مجموعه‌یی از دو تابع اسکالر ارائه شده است، به‌طوری که هرکدام از آن‌ها یک معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دو را ارضا می‌کند.[۱۱] شرط حل این مسئله $\mathbf{e}_3.\mathrm{curl}\mathbf{u} = 0$ است که در آن $\mathbf{e}_3$ برداری موازی محور تقارن ارتجاعی ماده و $\mathbf{u}$ بردار تغییرمکان است. همچنین در این پژوهش نشان داده شده است که برای سیستم متقارن محوری، حل ارائه‌شده قابل تبدیل به یک

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۹/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۰/۶/۱، پذیرش ۱۳۹۰/۹/۵.

تابع پتانسیل است، به‌طوری که معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر آن از مرتبه‌ی چهار و همان معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل لخنیتسکی است.[۱۲و۵] تعمیم‌یافته‌ی حل مسئله‌ی اخیر، برای حالت کلی در پژوهشی دیگر ارائه شد،[۱۳] که البته قابل ارتباط‌دادن به روش حل لخنیتسکی ـ هو ـ نوواکی نیز است.[۱۲] این حل برای کلیه‌ی مسائل الاستودینامیک[۱۷] در محیط همسانگرد جانبی که دامنه‌ی آن نسبت به هر محور موازی محور ارتجاعی ماده محدب باشد، گسترش یافته است،[۱۴] و با کمک آن روش حلی یکپارچه برای کلیه‌ی مسائل الاستواستاتیک و الاستودینامیک در محیط همسانگرد معرفی شده است.[۱۵و۱۶]

توابع پتانسیل دیگری نیز برای مواد همسانگرد، ارائه شده است[۱۷و۱۹] که معادلات حرکت برحسب تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت و معادله‌ی انتقال حرارت را از معادلات دیفرانسیل کوپل شده به معادلات دیفرانسیلی مجزا تبدیل می‌کند.[۳]

نوشتار حاضر، مسائل ترموالاستودینامیک را در مواد همسانگرد جانبی که محور ارتجاعی ماده همان محور تقارن گرمایی ماده نیز باشد، مورد بررسی قرار می‌دهد. هدف از این تحقیق، ارائه‌ی دو تابع پتانسیل اسکالر برای مسائل ترموالاستودینامیک در مواد همسانگرد جانبی خطی است. لذا هم روابط تنش ـ کرنش و هم روابط کرنش ـ تغییرمکان خطی فرض می‌شوند. توابع پتانسیل ارائه‌شده چنان هستند که یکی از آن‌ها، معادله‌ی دیفرانسیل جزئی از مرتبه‌ی شش و دیگری معادلات دیفرانسیل جزئی از مرتبه‌ی دو را ارضا می‌کند. در شرایطی خاص که بردار تغییرمکان $\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$، شرط $\mathbf{e}_3.\mathrm{curl}\mathbf{u} = 0$ را ارضا کند، دو تابع پتانسیل به یک تابع پتانسیل کاهش می‌یابد. برای تحقق این منظور، با استفاده از مفاهیم بنیادی و پایه‌یی تئوری ترموالاستودینامیک، ابتدا معادله‌های حاکم بر محیط ارائه می‌شوند. سپس این روابط براساس مشخصات محیط همسانگرد جانبی برحسب تغییرمکان و تغییر درجه‌ی حرارت بسط داده می‌شوند و یک دستگاه معادلات دیفرانسیلی شامل ۴ معادله‌ی دیفرانسیل جزئی حاصل می‌شوند. از حل هم‌زمان این ۴ معادله‌ی دیفرانسیلی، مجهولات مسئله شامل تغییرمکان‌ها و تغییرات درجه‌ی حرارت در هر نقطه از محیط به دست می‌آیند. از آنجا که حل هم‌زمان دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی کوپل شده بسیار مشکل است، در اینجا این معادلات دیفرانسیلی با ارائه‌ی توابع پتانسیل مناسب جداسازی می‌شوند. در پایان دو تابع پتانسیل دیگر نیز ارائه خواهد شد و شرایط غیر یکتا بودن[۱۸] توابع پتانسیل نیز بررسی می‌شوند.

۲. مفاهیم بنیادی تئوری ترموالاستودینامیک

مجموعه‌ی باز (جسم) B در فضای اقلیدسی به‌طور ساده پیوسته فرض می‌شود، اگر تابع تغییرشکل آن در هر نقطه از یک لحظه به لحظه‌یی دیگر پیوسته باشد. از آنجایی که تابع تغییرشکل حاصل جمع تابع تغییرمکان و تابع همیشه پیوسته بردار وضعیت است، در تعریف محیط پیوسته می‌توان از تابع تغییرمکان به جای تغییرشکل استفاده کرد. وضعیت جسم B در لحظه‌ی $t = 0$، محیط مرجع و در لحظه‌ی t، محیط تغییرشکل‌یافته نامیده می‌شود. محیط مرجع با B_0 و محیط تغییرشکل‌یافته با B_t نشان داده می‌شود. $\mathbf{S}(\mathbf{X},t)$ اولین تانسور تنش پایولا ـ کرشهف[۱۹] برای واحد سطح فضایی در محیط مرجع و $\mathbf{f}(\mathbf{X},t)$ نیروی حجمی به ازای واحد حجم در محیط تغییرشکل‌یافته در نظر گرفته می‌شود، به‌طوری که $\mathbf{X}$ یک نقطه در محیط مرجع و $\mathbf{x}$ تغییرشکل‌یافته‌ی آن در زمان t است. بردار $\mathbf{u}(\mathbf{X},t)$ نشان‌دهنده‌ی تغییرمکان نقطه‌ی $\mathbf{X}$ در زمان t است، به‌طوری‌که $\mathbf{X} \in \mathrm{B}$ و $t \in (0, t_0)$ با شرط $t_0 > 0$ بوده و بنابراین نقطه‌ی $\mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X},t)$ مکان نقطه‌ی $\mathbf{X}$ در زمان t در فضاست. در این صورت $\mathbf{U}$ تانسورگرادیان تغییرشکل[۲۰] $\mathbf{x} \to \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X},t)$ است، اگر رابطه‌ی ۱ برقرار باشد:

$$\mathbf{U} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \tag{1}$$

که در آن $\mathbf{I}$ تانسور یکه و ∇ عملگر گرادیان نسبت به $\mathbf{X}$ است.

طبق تعریف، تابع دلخواه $\overline{\omega}(\mathbf{x},t)$ از کلاس $C^{m,n}$ روی محیط $\mathrm{B} \times (0, t_0)$ نامیده می‌شود، اگر روی B_0 پیوسته‌بوده و دارای مشتقات پیوسته تا مرتبه‌ی m نسبت به مختصات مکان $\mathbf{x}$ و تا مرتبه‌ی n نسبت به مختصه‌ی زمان t باشد.[۷]

اگر $\mathbf{S}$ روی $\mathrm{B} \times (0, t_0)$ از کلاس $C^{1,0}$ و $\mathbf{f}$ روی $\mathrm{B} \times (0, t_0)$ پیوسته باشند، با استفاده از قانون حرکت و تعادل گشتاورها برای هر زیرمجموعه‌ی P از B در هر زمان t می‌توان رابطه‌های ۲ و ۳ را نوشت:[۱۷]

$$\mathrm{div}\,\mathbf{S} + \mathbf{f} = \rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{2}$$

$$\mathbf{S}\,\mathbf{f}^{\mathrm{T}} = \mathbf{f}\,\mathbf{S}^{\mathrm{T}} \tag{3}$$

که در این رابطه‌ها div عملگر دیورژانس، بالانویس T معرف عملگر ترانهاده و بالانویس $(\cdot)$ معرف مشتق نسبت به زمان است.

قانون اول ترمودینامیک[۲۱] که تعادل انرژی کل را مورد توجه قرار می‌دهد، درواقع ارتباطی بین کار انجام‌شده روی سیستم، حرارت انتقال‌یافته به سیستم و تغییر انرژی داخلی سیستم برقرار می‌کند. از قانون اول ترمودینامیک، رابطه‌ی ۴ ثابت می‌شود:[۱۷]

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{S}.\dot{\mathbf{U}} - \mathrm{div}\,\mathbf{q} + r \tag{4}$$

که در آن، $\mathbf{e}(\mathbf{X},t)$ از کلاس $C^{0,1}$، انرژی داخلی[۲۲] به ازای واحد حجم در محیط مرجع است. همچنین $\mathbf{q}(\mathbf{X},t)$ از کلاس $C^{1,0}$ رابردار شار حرارتی[۲۳] نامیده که به ازای واحد سطح فضایی در وضعیت مرجع اندازه‌گیری می‌شود و $\mathbf{r}(\mathbf{X},t)$ منبع گرما[۲۴] یا نرخ تغییر گرما به ازای واحد حجم در وضعیت مرجع از فضای خارج است.[۱۷] رابطه‌ی ۴ برای هر جزء P در هر زمان t برقرار است.[۱۷]

قانون دوم ترمودینامیک[۲۵] درواقع شرایط تعادل ترمودینامیکی محیط را بیان می‌کند. برای بیان این قانون، علاوه‌بر تابع تک مقداری درجه‌ی حرارت، نیاز به تعریف تابع تک مقداری دیگری به نام آنتروپی[۲۶] است که یکی دیگر از توابع حالت سیستم می‌باشد. یکی از نتایج مهم قانون دوم ترمودینامیک، کمینه‌بودن انرژی داخلی است که توسط گیبز[۲۷] بیان شده است.[۲۰] از قانون دوم ترمودینامیک برای هر جزء P در هر زمان t می‌توان رابطه‌ی ۵ را نوشت:[۱۷]

$$\dot{\eta} \geq -\mathrm{div}\,\left(\frac{\mathbf{q}}{\theta}\right) + \frac{r}{\theta} \tag{5}$$

که در آن، $\eta(\mathbf{X},t)$ آنتروپی واحد حجم در شکل مرجع و $\theta(\mathbf{X},t) > 0$، درجه‌ی حرارت مطلق و هر دو از کلاس $C^{0,1}$ هستند. با استفاده از این دو تابع، انرژی آزاد محیط با استفاده از رابطه‌ی ۶ نوشته می شود.

$$\psi = e - \eta\theta \tag{6}$$

از ترکیب رابطه‌های ۴ و ۵ نامساوی رابطه‌ی ۷ از قانون دوم ترمودینامیک حاصل می‌شود:[۱۷]

$$\dot{\psi} + \eta\dot{\theta} - \mathbf{S}.\dot{\mathbf{U}} + \frac{1}{\theta}\mathbf{q}.\mathbf{g} \leq 0 \tag{7}$$

به طوری که در آن $\mathbf{g}$ گرادیان حرارتی[۲۸] بوده و از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$\mathbf{g} = \nabla\theta \tag{8}$$

در صورتی که $\mathbf{V}$ ریشه‌ی دوم[۲۹] $\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U}$ باشد، تانسور کرنش لاگرانژی[۳۰] را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۹ تعریف کرد:[۱۷]

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}\left(\mathbf{V}^{2} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\mathbf{U}^{\mathrm{T}}\mathbf{U} - 1\right) = \frac{1}{2}\left(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^{\mathrm{T}}\right) \tag{9}$$

که آخرین تساوی در آن با فرض تغییرشکل‌های کوچک نوشته شده است. اگر رابطه‌ی ۱۰ را بنویسیم:

$$\mathbf{K}\left(\mathbf{E},\theta\right) = -\partial_{\mathbf{g}}\,\mathbf{q}\left(\mathbf{E},\theta,\mathbf{g}\right)\big|_{\mathbf{g}=0} \tag{10}$$

آنگاه $\mathbf{K}(\mathbf{E},\theta)$ تانسور رسانایی حرارتی[۳۱] نامیده می‌شود. مشاهده می‌شود با تعریف ارائه‌شده، $\mathbf{K}$ در حالت کلی به کرنش و درجه‌ی حرارت وابسته است.[۱۷] در رابطه‌ی ۱۰، $\partial_{\mathbf{g}}$ به معنی مشتق نسبت به $\mathbf{g}$ بوده و این رابطه در $\mathbf{g} = 0$ نوشته شده است. عدد c در رابطه‌ی ۱۱:

$$c\left(\mathbf{U},\theta,\mathbf{x}\right) = \partial_\theta\, e\left(\mathbf{U},\theta,\mathbf{x}\right) = \theta\,\partial_\theta\,\eta\left(\mathbf{U},\theta,\mathbf{x}\right) \tag{11}$$

گرمای ویژه نامیده شده[۱۷] و در شرط صدق می‌کند:

$$c\left(\mathbf{U},\theta,\mathbf{x}\right) > 0 \tag{12}$$

در صورتی که از قسمت‌های غیرخطی روابط صرف‌نظر شود، به‌عبارت‌دیگر اگر فقط تغییرشکل‌های کوچک مورد توجه باشد، آنگاه روابط پایه‌ی تئوری ترموالاستیسیته‌ی خطی[۳۲] به‌صورت روابط ۱۳ نوشته می‌شوند:[۱۷]

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div}\mathbf{S} + \mathbf{b} = \rho\ddot{\mathbf{u}},\\
&-\operatorname{div}\mathbf{q} + \theta_0\mathbf{M}.\dot{\mathbf{E}} + r = c\dot{\theta},\\
&\mathbf{S} = C\mathbf{E} + \left(\theta - \theta_0\right)\mathbf{M},\\
&\mathbf{q} = -\mathbf{K}\,\nabla\theta
\end{aligned} \tag{13}$$

لازم به ذکر است که در تغییرشکل‌های کوچک تانسورهای تنش پایولا ـکرشهف و تانسور تنش کوشی یکسان هستند و درنتیجه تانسور $\mathbf{S}$ نیز در این روابط تانسور کوشی است. در روابط ۱۳ تانسور مرتبه‌ی چهارم[۳۳] $\mathbf{C}$، تانسور ارتجاعی[۳۴] محیط است که از رابطه‌ی ۱۴ به‌دست می‌آید:[۱۷]

$$\mathbf{C} = \partial^{2}_{\mathbf{E}}\;\psi\left(\mathbf{E},\theta\right)\big|_{\substack{\mathbf{E}=0,\\ \theta=\theta_0}} \tag{14}$$

و تانسور مرتبه‌ی دوم[۳۵] $\mathbf{M}$، تانسور تنش ـدرجه‌ی حرارت[۳۶] محیط است که از رابطه‌ی ۱۵ به‌دست می‌آید:[۱۷]

$$\mathbf{M} = \partial_\theta\;\mathbf{S}\left(\mathbf{E},\theta\right)\big|_{\substack{\mathbf{E}=0,\\ \theta=\theta_0}} \tag{15}$$

که‌در آن $\mathbf{S} = \mathbf{S}^{\mathrm{T}}$ بوده و تانسور $\mathbf{M}$ نیز متقارن است. نیروی حجمی نیز شامل دو قسمت به‌صورت رابطه‌ی ۱۶ فرض شده است:

$$\mathbf{f} = \mathbf{b} - \rho\ddot{\mathbf{u}} \tag{16}$$

$\rho(\mathbf{X})$ در روابط ۱۳ چگالی محیط مرجع و $\mathbf{b}(\mathbf{X},t)$ بردار نیروهای حجمی است.

۳. روابط ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی

تنش در هر نقطه از محیط و در هر لحظه از زمان تابعی از کرنش است. در حالتی که رفتار محیط خطی باشد، تانسور تنش تابعی خطی از تانسور کرنش است. در این حالت می‌توان رابطه‌ی ۱۷ را نوشت:

$$\mathbf{S} = \mathbf{C}\mathbf{E} \tag{17}$$

که در آن تانسور $\mathbf{C}$، یک تانسور مرتبه‌ی چهار است و تانسورهای مرتبه‌ی دو تنش کوشی و کرنش با آن به یکدیگر مرتبط می‌شوند.[۲۱] این تانسور در مواد همسانگرد جانبی (دارای تقارن محوری) به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ در می‌آید:[۷]

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix}
C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & 0\\
C_{1122} & C_{1111} & C_{1133} & 0 & 0 & 0\\
C_{1133} & C_{1133} & C_{3333} & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & C_{1212} & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}
\end{bmatrix} \tag{18}$$

که در آن C_{1212} از رابطه‌ی ۱۹ به‌دست می‌آید:[۷]

$$C_{1212} = \frac{1}{2}\left(C_{1111} - C_{1122}\right) \tag{19}$$

به‌علاوه به‌دلیل مثبت ـمعین[۳۷] بودن انرژی کرنشی، مقادیر ویژه‌ی تانسور $\mathbf{C}$ مثبت هستند که از آن روابط ۲۰ به‌دست می‌آیند:[۱]

$$\begin{aligned}
&C_{1111} > 0,\, C_{3333} > 0,\, C_{1313} > 0,\, C_{1212} > 0,\\
&C_{1111}C_{3333} - C_{1133}^{2} - C_{3333}C_{1212} > 0
\end{aligned} \tag{20}$$

و می‌توان نشان داد که این روابط به سه رابطه‌ی ۲۱ خلاصه می‌شوند:[۲۲]

$$\begin{aligned}
&C_{1111} > \left|C_{1122}\right|,\, C_{1313} > 0,\\
&C_{1111}C_{3333} - 2C_{1133}^{2} - C_{3333}C_{1212} > 0
\end{aligned} \tag{21}$$

همچنین برای سهولت بیشتر، ۵ ضریب ثابت ارتجاعی را نسبت به یکی از این ضرایب نرمال کرده و این پارامترها مطابق روابط ۲۲ معرفی می‌شوند:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = \frac{C_{1212} + C_{1122}}{C_{1212}},\, \alpha_2 = \frac{C_{1313}}{C_{1212}},\\
&\alpha_3 = \frac{C_{1133} + C_{3333}}{C_{1212}},\, \alpha_4 = \frac{C_{3333}}{C_{1212}}
\end{aligned} \tag{22}$$

از طرفی در محیط همسانگرد جانبی تانسور تنش ـدرجه‌ی حرارت $\mathbf{M}$ و تانسور هدایت گرمایی $\mathbf{K}$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ تعریف می‌شوند.[۲۳،۱۷]

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \bar{m}_1 & 0 & 0\\ & \bar{m}_1 & 0\\ & & \bar{m}_3 \end{bmatrix},\, \mathbf{K} = \begin{bmatrix} \bar{k}_1 & 0 & 0\\ & \bar{k}_1 & 0\\ & & \bar{k}_3 \end{bmatrix} \tag{23}$$

در ادامه، پارامترهای $\mathbf{M}$، $\mathbf{K}$ و کلیه‌ی ضرایب در طرفین روابط اول و دوم در رابطه‌ی ۱۳ بر ضریب ثابت ارتجاعی C_{1212} تقسیم می‌شوند (روابط ۲۴):

$$\begin{aligned}
&\frac{\bar{k}_1}{C_{1212}} = k_1,\, \frac{\bar{k}_3}{C_{1212}} = k_3,\, \frac{\bar{m}_1}{C_{1212}} = m_1,\\
&\frac{\bar{m}_3}{C_{1212}} = m_3,\, \frac{c}{C_{1212}} = c_0,\, \frac{r}{C_{1212}} = r_0,\, \frac{\rho}{C_{1212}} = \rho_0
\end{aligned} \tag{24}$$

در این صورت رابطه‌های اول و دوم رابطه‌ی ۱۳ به‌صورت روابط ۲۵ برحسب توابع اسکالر u_1، u_2، u_3 و T نوشته می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&\left[(1+\alpha_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_1\\
&+\left[\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]u_2+\left[\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right]u_3\\
&+\left[m_1\frac{\partial}{\partial x_1}\right]T=-\rho_0 b_1,\\
&\left[\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}\right]u_1+\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+(1+\alpha_1)\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_2\\
&+\left[\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right]u_3+\left[m_1\frac{\partial}{\partial x_2}\right]T=-\rho_0 b_2,\\
&\left[\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right]u_1+\left[\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3}\right]u_2\\
&+\left[\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\alpha_4\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]u_3\\
&+\left[m_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right]T=-\rho_0 b_3,\ \left[m_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t}\right]u_1\\
&+\left[m_1\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial t}\right]u_2+\left[m_3\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t}\right]u_3\\
&+\left[\frac{k_1}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{k_1}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\frac{k_3}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{c_0}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}\right]T=-\frac{r_0}{\theta_0}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

که در آن T مطابق رابطه‌ی ۲۶:

$$T=\theta-\theta_0 \tag{26}$$

تغییرات درجه‌ی حرارت است. از حل هم‌زمان این ۴ معادله‌ی دیفرانسیلی، مجهولات u_1، u_2، u_3 و T حاصل خواهند شد. این دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی را می‌توان به فرم ماتریسی رابطه‌ی ۲۷ نوشت:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{W}+\mathbf{b}=0 \tag{27}$$

که در آن، $\mathbf{D}$ ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی به‌صورت روابط ۲۸ و ۲۹ است:

$$
\mathbf{D}=\begin{bmatrix}
\nabla_{12}^2+\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & m_1\frac{\partial}{\partial x_1}\\
\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2} & \nabla_{12}^2+\alpha_1\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}+\alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & m_1\frac{\partial}{\partial x_2}\\
\alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial x_3} & \alpha_2\nabla_{12}^2+\alpha_4\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} & m_3\frac{\partial}{\partial x_3}\\
m_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t} & m_1\frac{\partial^2}{\partial x_2\partial t} & m_3\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t} & \frac{k_1}{\theta_0}\nabla_{12}^2+\frac{k_3}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}-\frac{c_0}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial t}
\end{bmatrix}
\tag{28}
$$

$$\nabla_{12}^2=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \tag{29}$$

$\mathbf{W}$ بردار تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت نیز مطابق رابطه‌ی ۳۰ و $\mathbf{b}$ بردار نیروی حجمی ـ منبع گرمایی به ازای واحد حجم به‌صورت رابطه‌ی ۳۱ تعریف می‌شوند:

$$\mathbf{W}=\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 & T \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{30}$$

$$\mathbf{b}=\begin{bmatrix} \rho_0 b_1 & \rho_0 b_2 & \rho_0 b_3 & {}^{r_0}/_{\theta_0} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \tag{31}$$

از حل دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی رابطه‌ی ۲۵ یا ۲۷، بردار $\mathbf{W}$ حاصل می‌شود.

۴. تابع پتانسیل

بر پایه‌ی مطالب بخش‌های قبلی، از حل ۴ معادله‌ی دیفرانسیل با مشتقات جزئی و کوپل شده، کلیه‌ی مجهولات مسئله‌ی ترموالاستودینامیک شامل تغییرمکان‌ها و اختلاف درجه‌ی حرارت به‌صورت توابعی برحسب مکان و زمان به‌دست خواهند آمد. حل تحلیلی این ۴ معادله‌ی دیفرانسیل اگر غیرممکن نباشد، بسیار پیچیده است. لذا روشی با نام روش توابع پتانسیل و نحوه‌ی عمل آن در این قسمت ارائه خواهد شد تا به کمک آن معادلاتی به‌دست آیند که با حل آن‌ها کلیه‌ی مجهولات مسئله قابل دسترسی باشند. سپس توابع پتانسیل خاص مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی نیز معرفی خواهند شد.

رابطه‌ی ۲۷ فرم ماتریسی از معادله‌ی دیفرانسیلی رابطه‌ی ۲۵ است که جواب آن در حالت کلی، از جمع جواب قسمت همگن (جواب عمومی) و قسمت ناهمگن (جواب خصوصی مطابق شرایط خاص هر مسئله) به دست می‌آید. قسمت همگن رابطه‌ی ۲۷ به صورت رابطه‌ی ۳۲ نوشته می‌شود:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{W}=0 \tag{32}$$

و اگر $\mathbf{I}$ ماتریس واحد و $\mathbf{d}$ ماتریس کوفاکتور ماتریس $\mathbf{D}$ باشند، آنگاه رابطه‌ی ۳۳ از جبر ماتریس‌ها به‌دست می‌آید:

$$\mathbf{D}\,\mathbf{d}=\det\mathbf{D}\,\mathbf{I} \tag{33}$$

که در آن $\det\mathbf{D}$ دترمینان ماتریس عملگری $\mathbf{D}$ است. عملگرهای دو طرف رابطه‌ی ۳۳ را می‌توان بر تابع برداری دلخواه و به اندازه‌ی کافی هموار $\mathbf{F}$ اثر داد که در آن صورت رابطه‌ی ۳۴ به‌دست می‌آید:[24]

$$\mathbf{D}\,\mathbf{d}\,\mathbf{F}=\det\mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\mathbf{F} \tag{34}$$

و در صورتی که بردار تغییرمکان ـ درجه‌ی حرارت برحسب تابع $\mathbf{F}$ به صورت رابطه‌ی ۳۵ نوشته‌شود:

$$\mathbf{W}=\mathbf{d}\,\mathbf{F} \tag{35}$$

آنگاه مطابق رابطه‌های ۳۲ و ۳۴، برقراری رابطه‌ی ۳۶ الزامی است:

$$\det\mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\mathbf{F}=0 \tag{36}$$

این معادلات با توجه به وجود ماتریس واحد مجزاست و با حل آن مؤلفه‌های تابع $\mathbf{F}$ به‌دست می‌آیند. با قراردادن $\mathbf{F}$ در رابطه‌ی ۳۵، بردار $\mathbf{W}$ حاصل خواهد شد.[24]

برای بررسی رابطه‌ی ۳۶، ابتدا لازم است دترمینان ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی $\mathbf{D}$ به‌دست آید. می‌توان نشان داد که دترمینان ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی براساس عملگرهای موج[38] و انتقال حرارت، در قالب فرم کلی رابطه‌ی ۳۷ نوشته می‌شود:[23]

$$\det \mathbf{D} = \varphi \Box_0 \Box_1 \Box_2 \Box_T + \Lambda \tag{۳۷}$$

که در آن $\Box_0$، $\Box_1$، $\Box_2$ و $\Box_T$ از روابط ۳۸ به دست می‌آیند:

$$\begin{aligned}
\Box_0 &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_0^2 \partial x_3^2} - \rho_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
\Box_1 &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_1^2 \partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{1+\alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
\Box_2 &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_2^2 \partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2},\\
\Box_T &= \nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{s_T^2 \partial x_3^2} - c' \frac{\partial}{\partial t}
\end{aligned} \tag{۳۸}$$

آنچه که اهمیت دارد تعیین پارامترهای φ، c'، s_0^2، s_1^2، s_2^2 و s_T^2 و عملگر Λ در فرم پیشنهادی رابطه‌ی ۳۷ براساس مشخصات مکانیکی محیط هستند. s_1^2 و s_2^2 ریشه‌های معادله‌ی ۳۹ هستند:[16]

$$\begin{aligned}
&(C_{3333} C_{2323})\, s^4 + \Big(C_{1133}^2 + 2C_{1133} C_{2323}\\
&\quad - C_{1111} C_{3333}\Big)\, s^2 + C_{1111} C_{2323} = 0
\end{aligned} \tag{۳۹}$$

$$\begin{aligned}
s_0^2 &= \frac{1}{\alpha_2},\\
s_T^2 &= \frac{k_1}{k_3},\\
c' &= \frac{c_0}{k_1},\\
\varphi &= \alpha_2 \frac{k_1}{\theta_0} (1+\alpha_1)
\end{aligned} \tag{۴۰}$$

و ترم‌های اضافی Λ بر پایه‌ی فرضیات رابطه‌های ۳۹ و ۴۰ به‌صورت رابطه‌ی ۴۱ به دست می‌آیند:[23]

$$\begin{aligned}
\Lambda = -\alpha_2 \Box_0 \Bigg\{ & \frac{k_1}{\theta_0} (1+\alpha_1) \left(\delta \frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial t^2}\right) \Box_T\\
& + m_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right.\\
& \left.\times \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \delta_m \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \nabla_{12}^2\right]\Bigg\}
\end{aligned} \tag{۴۱}$$

که در آن مقادیر δ و δ_m از رابطه‌های ۴۲ و ۴۳ به دست می‌آیند:

$$\delta = \frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\left(1 - \frac{1}{s_1^2}\right) + \frac{\rho_0}{\alpha_2}\left(\frac{\alpha_4}{1+\alpha_1} - \frac{1}{s_1^2}\right) \tag{۴۲}$$

$$\delta_m = \frac{(\alpha_4 - \alpha_2)\, m_1^2 + (\alpha_1 - \alpha_2 + 1)\, m_3^2 - 2\alpha_3 m_1 m_3}{\alpha_2 m_1^2} \tag{۴۳}$$

و ضرایب مقیاس[39] s_1^2 و s_2^2 اعداد حقیقی مثبت و یا اعداد مختلط هستند. در این صورت اگر دترمینان ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی براساس عملگرهای موج و انتقال حرارت از رابطه‌ی ۳۷ بازنویسی شود، این دترمینان به شکل رابطه‌ی ۴۴ خواهد بود:[23]

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{D} = {} & \alpha_2 \frac{k_1}{\theta_0} (1+\alpha_1) \Box_0 \Box_T \left(\Box_1 \Box_2 - \delta \frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial t^2}\right)\\
& - \alpha_2 m_1^2 \Box_0 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right) \left[\left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right.\\
& \left.\times \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \delta_m \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \nabla_{12}^2\right]
\end{aligned} \tag{۴۴}$$

در محیط‌های همسانگرد ضرایب ارتجاعی C_{ijkl} به‌صورت $C_{1111} - C_{3333} = 2G(1-v)/(1-2v)$، $C_{1133} = 2Gv/(1-2v)$ و $C_{1212} = G$ هستند. با قراردادن این ضرایب در رابطه‌های ۴۲ و ۴۳ می‌توان فهمید که δ و δ_M در محیط‌های همسانگرد (ایزوتروپ) برابر صفر می‌شوند. در حالتی که محیط همسانگرد جانبی است، δ و δ_m در حالت کلی صفر نیستند و درنتیجه در جواب‌های معادله‌های موج و انتقال حرارت، اغتشاشی ایجاد خواهد شد که ناشی از اثرات ناهمسانگرد بودن محیط است. از دیگر موارد با اهمیت در رابطه‌ی ۴۴ این است که عملگر $\det\mathbf{D}$ و مؤلفه‌های ماتریس $\mathbf{d}$ چنان مرتب شده‌اند که مرتبه‌ی معادله‌ی حاکم بر تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ به معادله‌ی دیفرانسیلی مرتبه‌ی ۶ کاهش یافته است (رابطه‌ی ۴۶). $\mathbf{d}$ ماتریس کوفاکتور ماتریس $\mathbf{D}$ در رابطه‌ی ۳۵، به‌صورت کلی رابطه‌ی ۴۵ در نظر گرفته می‌شود:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \tag{۴۵}$$

اگر همه‌ی مؤلفه‌های تابع $\mathbf{F}$ در رابطه‌های ۳۴ تا ۳۶ به غیر از مؤلفه‌ی سوم آن صفر باشند، آنگاه فقط درایه‌های ستون سوم ماتریس $\mathbf{d}$ مورد نیاز است. این درایه‌ها از ماتریس کوفاکتور $\mathbf{d}$ به‌صورت روابط ۴۶ هستند:[23]

$$\begin{aligned}
d_{13} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\right)\left(\alpha_2 \frac{k_1}{\theta_0} \Box_T - m_1 m_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Box_0,\\
d_{23} &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\right)\left(\alpha_2 \frac{k_1}{\theta_0} \Box_T - m_1 m_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) \Box_0,\\
d_{33} &= \left[\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1) \Box_T \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left. - \frac{\rho_0}{1+\alpha_1} \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - m_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial t} \nabla_{12}^2\right)\right] \Box_0,\\
d_{43} &= -(\alpha_1 m_3 - \alpha_2 m_1 + m_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t}\right)\\
&\qquad \times \left[\nabla_{12}^2 + \left(\frac{\alpha_2 m_3}{\alpha_1 m_3 - \alpha_2 m_1 + m_3}\right) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right.\\
&\qquad \left. - \left(\frac{\rho_0 m_3}{\alpha_1 m_3 - \alpha_2 m_1 + m_3}\right) \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \Box_0
\end{aligned} \tag{۴۶}$$

از نکات حائز اهمیت در رابطه‌ی ۴۶ این است که کوفاکتورها نیز به‌صورتی نوشته شده‌اند که بتوان از عملگر $\Box_0$ در آن‌ها فاکتور گرفت تا مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیلی حاکم بر تابع $\mathbf{F}$ کاهش یابد و در ضمن تا حد امکان ساده و قابل درک به لحاظ فیزیک مسئله باشند.

۵. حل عمومی مسائل ترموالاستودینامیک در محیط همسانگرد جانبی

با درنظرگرفتن تابع برداری $\mathbf{F} = [0 \;\; 0 \;\; \overline{F} \;\; 0]^{T}$ و قراردادن آن در رابطه‌ی ۳۵، شکل ماتریسی آن مطابق رابطه‌ی ۴۷ بازنویسی می‌شود:[۲۳]

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} & d_{14} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} & d_{24} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} & d_{34} \\ d_{41} & d_{42} & d_{43} & d_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{F} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{۴۷}$$

ملاحظه می‌شود اولاً برای بردار $\mathbf{F}$ فقط یک مؤلفه‌ی غیرصفر فرض شده است و ثانیاً با توجه به جداشدن عملگر $\Box_0$ در روابط ۴۴ و ۴۶، این تابع اختیاری به فرم رابطه‌ی ۴۸ در نظرگرفته شده است:

$$F = \Box_0 \bar{F} \tag{۴۸}$$

براساس این تابع پیشنهادی (رابطه‌ی ۴۸) مجهولات مسئله شامل تغییرمکان‌ها و تغییر درجه‌ی حرارت از رابطه‌ی ۴۷ حاصل می‌شوند:[۲۳]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\right)\left(\alpha_3 \frac{k_1}{\theta_0}\Box_T - m_1 m_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) F, \\ u_2 &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\right)\left(\alpha_3 \frac{k_1}{\theta_0}\Box_T - m_1 m_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) F, \\ u_3 &= \left[\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\Box_T \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - m_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{12}^2\right)\right] F, \\ T &= -(\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t}\right) \\ &\quad \times \left[\nabla_{12}^2 + \left(\frac{\alpha_2 m_1}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\rho_0 m_1}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] F \end{aligned} \tag{۴۹}$$

یادآوری می‌شود که با توجه به رابطه‌ی ۴۸، مرتبه‌ی معادله‌ی حاکم بر تابع پتانسیل $\mathbf{F}$ کاهش می‌یابد و به‌صورت رابطه‌ی ۵۰ منتج می‌شود:

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \left\{\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\Box_T \left(\Box_1 \Box_2 - \delta \frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial t^2}\right)\right. \\ &\quad - m_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right. \\ &\quad \left.\left. \times \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \delta_m \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\nabla_{12}^2\right]\right\} F = 0 \end{aligned} \tag{۵۰}$$

رابطه‌های ۴۹ و ۵۰، جوابی عمومی برای مسائل ترموالاستودینامیک در یک محیط همسانگرد جانبی قلمداد می‌شوند. با دقت در رابطه‌ی ۴۹ مشاهده می‌شود که تغییرمکان‌های به‌دست‌آمده از این رابطه در شرط اضافی $\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{curl\,u} = 0$ صدق می‌کند. با اضافه کردن یک تابع پتانسیل دیگر به رابطه‌ی ۳۵، می‌توان اولاً این شرط اضافی را حذف کرد و ثانیاً شرایط لازم برای حل قسمت ناهمگن و البته بدون منبع حرارتی ($r = 0$) را نیز مهیا کرد.[۲۵] تابع برداری $\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, 0)$ از کلاس $C^{1,0}$ روی $\mathrm{B} \times (0, t_0)$، با این شرط که $\frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} = 0$ باشد، در نظر گرفته می‌شود. روابط تغییرمکان ـ‌درجه‌ی حرارت با استفاده از توابع اسکالر $\chi(x_1, x_2, x_3, t)$ از کلاس $C^{3,2}$ و $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, t)$ از کلاس $C^{6,5}$ روی $\mathrm{B} \times (0, t_0)$ براساس رابطه‌ی ۳۵ به‌صورت روابط ۵۱ پیشنهاد می‌شوند:[۲۳]

$$\begin{aligned} u_1 &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_3}\right)\left(\alpha_3 \frac{k_1}{\theta_0}\Box_T - m_1 m_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) F - \frac{\partial \chi}{\partial x_2}, \\ u_2 &= -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_3}\right)\left(\alpha_3 \frac{k_1}{\theta_0}\Box_T - m_1 m_3 \frac{\partial}{\partial t}\right) F + \frac{\partial \chi}{\partial x_1}, \\ u_3 &= \left[\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\Box_T \left(\nabla_{12}^2 + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right.\right. \\ &\quad \left.\left. - \frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - m_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\nabla_{12}^2\right)\right] F, \\ T &= -(\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3 \partial t}\right) \\ &\quad \times \left[\nabla_{12}^2 + \left(\frac{\alpha_2 m_1}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\rho_0 m_1}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] F \end{aligned} \tag{۵۱}$$

با قراردادن این روابط در معادلات ۲۵ و $r = 0$، معادلات حاکم بر توابع پتانسیل $\mathbf{F}(x_1, x_2, x_3, t)$ و $\chi(x_1, x_2, x_3, t)$ به‌صورت روابط ۵۲ و ۵۳ به دست می‌آیند:[۲۳]

$$\begin{aligned} &\alpha_2 \left\{\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\Box_T \left(\Box_1 \Box_2 - \delta \frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial t^2}\right)\right. \\ &\quad - m_1^2 \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\left(\nabla_{12}^2 + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right. \\ &\quad \left.\left. \times \left(\nabla_{12}^2 + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \delta_m \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\nabla_{12}^2\right]\right\} F = b_3 \end{aligned} \tag{۵۲}$$

$$\Box_0 \chi(x_1, x_2, x_3, t) = \xi(x_1, x_2, x_3, t) \tag{۵۳}$$

همچنین تابع اسکالر $\xi(x_1, x_2, x_3, t)$ مطابق رابطه‌ی ۵۴ حاصل خواهد شد:[۱۴،۲۴]

$$\nabla \times (X\mathbf{e}_3) = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 \tag{۵۴}$$

۶. نایکتایی توابع پتانسیل و ارائه‌ی دو تابع پتانسیل جدید

بسیار مهم است که کامل‌بودن و یکتانبودن توابع پتانسیل، هم به لحاظ نگرش ریاضی و هم به لحاظ کاربرد، بررسی شود.[۱،۲،۴،۷،۱۲،۱۴،۲۶-۳۲] پس از کامل‌بودن لازم است روشن شود، آیا می‌توان جواب دیگر برای مجزاسازی معادلات حاکم به دست آورد، به‌طوری که مجهولات مسئله شامل تغییرمکان‌ها و تغییرات درجه‌ی حرارت از آن‌ها حاصل شوند. شایان ذکر است توابع پتانسیل غیریکتا در صورت کامل‌بودن نیز جواب‌های یکتا برای مسئله‌ی تئوری ارتجاعی نتیجه می‌دهند. درواقع توابع پتانسیل غیریکتا برای حل یک مسئله قابل تبدیل به یکدیگر هستند. توابع پتانسیل مختلف که برای جداسازی یک دستگاه معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزیی به‌کارگرفته می‌شوند، در صورت ارضاکردن معادلات دیفرانسیل یکسان هم‌ارز تعریف می‌شوند، در غیر این صورت غیرهم‌ارز نامیده می‌شوند. در این بخش ابتدا بیان می‌شود که توابع پتانسیل هم‌ارز باید چه شرایطی داشته باشند و به‌علاوه دو

تابع پتانسیل دیگر که همانند تابع ارائه‌شده در رابطه‌ی ۵۰ رفتار می‌کنند، ذکر خواهد شد.

در حالتی که بتوان تابع پتانسیل برداری $\hat{\mathbf{F}}$ را به شکل رابطه‌ی ۵۵ فرض کرد:

$$\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{F} + \mathbf{D}\,\mathbf{G} \tag{۵۵}$$

که در آن $\mathbf{G}$ با توجه به ماتریس عملگر $\mathbf{D}$ (رابطه‌ی ۲۸)، یک تابع برداری ۴ در ۱ است که به اندازه‌ی کافی هموار فرض می‌شود؛ به‌علاوه $\mathbf{G}$ رابطه‌ی ۵۶ را ارضا می‌کند:

$$\det \mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\mathbf{G} = 0 \tag{۵۶}$$

در این‌صورت تمامی روابطی که برای تابع $\mathbf{F}$ برقرار هستند، برای تابع $\hat{\mathbf{F}}$ نیز به همان صورت برقرارند. در اثبات این موضوع، با نگاهی به روابط ۳۴، ۵۵ و ۵۶ می‌توان رابطه‌ی ۵۷ را تشکیل داد:

$$\mathbf{d}\,\hat{\mathbf{F}} = \mathbf{d}\,\mathbf{F} + \mathbf{d}\,\mathbf{D}\,\mathbf{G} = \mathbf{W} \tag{۵۷}$$

در این‌صورت ملاحظه می‌شود که هیچ تغییری در نتایج مجهولات مسئله $\mathbf{W}$ اعم از تغییرمکان‌ها و تغییر درجه‌ی حرارت ایجاد نمی‌شود (رابطه‌ی ۵۸):

$$\det \mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\hat{\mathbf{F}} = \det \mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\mathbf{F} + \mathbf{D} \det \mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\mathbf{G} = 0 \tag{۵۸}$$

و معادله‌ی حاکم بر تابع پتانسیل $\mathbf{F}$، به همان صورت برای تابع پتانسیل $\hat{\mathbf{F}}$ نیز مؤثر است. برای ارائه‌ی توابع پتانسیل دیگر، می‌توان با تکرار مراحل گذشته و قراردادن c' (رابطه‌ی ۵۹):

$$c' = \frac{c_0}{k_1} + \frac{\theta_0 m_1^2}{k_1\left(1+\alpha_1\right)} \tag{۵۹}$$

به جای قسمت چهارم رابطه‌ی ۴۰ و پیگیری سایر مراحل، شکل جدیدی از دترمینان ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی را پیشنهاد داد (رابطه‌ی ۶۰):

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{D} = \Bigg[&\alpha_2 \frac{k_1}{\theta_0}\left(1+\alpha_1\right) \Box_1 \Box_2 \Box_T \\
&-\rho_0 \left(\alpha_2 + \alpha_4 - \frac{1+\alpha_1}{s_1^2} - \frac{\alpha_2}{s_2^2}\right) \\
&\times \left(\frac{k_1}{\theta_0}\nabla_{12}^2 + k_3 \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial t^2}\right) \\
&+ \left(\frac{\left(\alpha_2^2 - \alpha_3^2\right) m_1^2}{1+\alpha_1} + 2\alpha_3 m_1 m_3 \right. \\
&\left. - \left(1+\alpha_1\right) m_3^2\right) \times \left(\frac{\partial^3}{\partial x_3^2 \partial t}\nabla_{12}^2\right) \\
&- \left(\frac{\rho_0^2 m_1^2}{1+\alpha_1}\right)\left(\alpha_2 \nabla_{12}^2 - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\left(\frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) \\
&+ \left(\frac{\alpha_2 \alpha_4 m_1^2}{1+\alpha_1} - \alpha_2 m_3^2\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x_3^4 \partial t}\right) \\
&+\rho_0 \left(\left(\alpha_2 + \alpha_4\right)\frac{c_0}{\theta_0} - \frac{\frac{c_0\left(1+\alpha_1\right)}{\theta_0} - m_1^2}{s_1^2} \right. \\
&\left. -\frac{\alpha_2 c_0}{\theta_0 s_2^2} - \frac{\alpha_2 m_1^2}{s_2^2\left(1+\alpha_1\right)} + m_3^2\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x_3^2 \partial t^3}\right)\Bigg] \Box_0
\end{aligned} \tag{۶۰}$$

و در حالت دیگر اگر c' به‌صورت رابطه‌ی ۶۱ باشد:

$$\begin{aligned}
c' = &\frac{c_0}{k_1} \\
&+ \frac{m_1^2 \theta_0}{k_1\left(1+\alpha_1\right)} \\
&+ \frac{m_3^2 \theta_0}{k_1\left(1+\alpha_1\right)}
\end{aligned} \tag{۶۱}$$

دترمینان ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی به‌صورت رابطه‌ی ۶۲ به دست خواهد آمد:

$$\begin{aligned}
\det \mathbf{D} = \Bigg[&\alpha_2 \frac{k_1}{\theta_0}\left(1+\alpha_1\right) \Box_1 \Box_2 \Box_T \\
&-\rho_0 \left(\alpha_2 + \alpha_4 - \frac{1+\alpha_1}{s_1^2} - \frac{\alpha_2}{s_2^2}\right) \\
&\times \left(\frac{k_1}{\theta_0}\nabla_{12}^2 + \frac{k_3}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\left(\frac{\partial^4}{\partial x_3^2 \partial t^2}\right) \\
&- \left(m_3^2 \left(\alpha_1 + \frac{\alpha_3^2 - \alpha_2^2}{1+\alpha_1} - \alpha_4 - 1\right)\right. \\
&\left. -m_1^2 \left(\frac{\alpha_2^2 - \alpha_3^2}{1+\alpha_1} + 2\alpha_3 \frac{m_3}{m_1}\right)\right)\left(\nabla_{12}^2 \frac{\partial^3}{\partial x_3^2 \partial t}\right) \\
&+\rho_0^2 \left(\frac{m_1^2 + m_3^2}{1+\alpha_1}\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial t^5}\right) \\
&-\rho_0 \left(\frac{\alpha_2\left(m_1^2 + m_3^2\right)}{1+\alpha_1} + m_3^2\right)\left(\nabla_{12}^2 \frac{\partial^3}{\partial t^3}\right) \\
&+ \left(\frac{\alpha_2 \alpha_4 \left(m_1^2 + m_3^2\right)}{1+\alpha_1} - \alpha_2 m_3^2\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x_3^4 \partial t}\right) \\
&+ \left(\alpha_2 m_3^2\right)\left(\nabla_{12}^4 \frac{\partial}{\partial t}\right) \\
&+\rho_0 \left(\frac{c_0}{\theta_0}\left(\alpha_2 + \alpha_4 - \frac{1+\alpha_1}{s_1^2} - \frac{\alpha_2}{s_2^2}\right)\right. \\
&- \left(m_1^2 + m_3^2\right)\left(\frac{1}{s_1^2} + \frac{\alpha_2}{s_2^2\left(1+\alpha_1\right)}\right) \\
&\left. + m_3^2\right)\left(\frac{\partial^5}{\partial x_3^2 \partial t^3}\right)\Bigg] \Box_0
\end{aligned} \tag{۶۲}$$

همچنین اگر بتوان توابع پتانسیل $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ را طوری حدس زد که روابط ۶۳ و ۶۴ به‌صورت هم‌زمان برقرار باشند:

$$\mathbf{W} = \mathbf{d}\,\mathbf{F}_1 \tag{۶۳}$$

$$\mathbf{W} = \mathbf{d}\,\mathbf{F}_2 \tag{۶۴}$$

آنگاه ثابت می‌شود که تابع $\mathbf{H}$ وجود دارد، به‌طوری که در رابطه‌ی ۶۵ صدق کند:

$$\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2 = \mathbf{D}\,\mathbf{H} \tag{۶۵}$$

و شرط رابطه‌ی ۶۶ را نیز ارضا کند:

$$\det \mathbf{D}\,\mathbf{I}\,\mathbf{H} = 0 \tag{۶۶}$$

برای اثبات این موضوع، با کم‌کردن روابط ۶۳ از روابط ۶۴ نشان داده می‌شود که رابطه‌ی ۶۷ برقرار است:

$$\mathbf{d}\,\left(\mathbf{F}_1 - \mathbf{F}_2\right) = 0 \tag{۶۷}$$

با درنظرگرفتن روابط ۳۳، ۶۵ و ۶۷، رابطه‌ی ۶۶ ثابت خواهد شد.

۷. بازنویسی روابط برای حالت دو بُعدی

با صفر قراردادن برخی مؤلفه‌های تانسور کرنش می‌توان به بررسی مسئله در حالت دو بعدی پرداخت. با فرض استقلال کلیه‌ی توابع از متغیر x_2 روابط ۶۸ حاصل می‌شود:

$$E_{21} = E_{22} = E_{23} = 0 \tag{۶۸}$$

و ماتریس عملگرهای دیفرانسیلی نیز در حالت دو بعدی به‌صورت رابطه‌ی ۶۹ اصلاح می‌شود:

$$\mathbf{D}_{2\mathrm{D}} = \begin{bmatrix} (1+\alpha_1)\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} & \alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & m_1\frac{\partial}{\partial x_1} \\ \alpha_3\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3} & \alpha_2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \alpha_4\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2} & m_3\frac{\partial}{\partial x_3} \\ m_1\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial t} & m_3\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t} & \frac{k_1}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{k_3}{\theta_0}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{c_0}{\theta_0}\frac{\partial}{\partial t} \end{bmatrix} \tag{۶۹}$$

با محاسبه و ساده‌سازی دترمینان ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی در حالت دو بعدی (رابطه‌ی ۶۹)، رابطه‌ی جدیدی که مستقل از x_2 هستند (رابطه‌ی ۷۰)، شکل خواهد گرفت:

$$\begin{aligned} \det\mathbf{D}_{2\mathrm{D}} = {} & \alpha_2\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\,\square_{T-2\mathrm{D}} \\ & \times\left(\square_{1-2\mathrm{D}}\square_{2-2\mathrm{D}} - \delta\frac{\partial^4}{\partial x_3^2\partial t^2}\right) \\ & -\alpha_2 m_1^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right. \\ & \left.\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \delta_m\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_3^2}\right] \end{aligned} \tag{۷۰}$$

که در آن با استفاده از فرضیات رابطه‌ی ۴۰، می‌توان روابط ۷۱ را نوشت:

$$\begin{aligned} \square_{1-2\mathrm{D}} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{s_1^2\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \square_{2-2\mathrm{D}} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{s_2^2\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \\ \square_{T-2\mathrm{D}} &= \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{s_T^2\partial x_3^2} - c'\frac{\partial}{\partial t} \end{aligned} \tag{۷۱}$$

در این صورت مؤلفه‌های ماتریس کوفاکتور نیز براساس ماتریس اپراتورهای دیفرانسیلی $\mathbf{D}_{2\mathrm{D}}$ به‌صورت روابط ۷۲ اصلاح خواهند شد:

$$\begin{aligned} d_{12-2\mathrm{D}} = {} & -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right)\left(\alpha_3\frac{k_1}{\theta_0}\square_{T-2\mathrm{D}} - m_1 m_3\frac{\partial}{\partial t}\right), \\ d_{22-2\mathrm{D}} = {} & \left[\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\,\square_{T-2\mathrm{D}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right.\right. \\ & \left.\left.-\frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - m_1^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}\right)\right], \\ d_{32-2\mathrm{D}} = {} & -(\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t}\right) \\ & \times\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\alpha_2 m_3}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right. \\ & \left.-\left(\frac{\rho_0 m_3}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] \end{aligned} \tag{۷۲}$$

که با درنظرگرفتن تابع برداری $\mathbf{F} = [0\ \ \overline{F}\ \ 0]^{\mathrm{T}}$ و براساس رابطه‌ی ۷۲، تغییرمکان‌ها و تغییرات درجه‌ی حرارت براساس حل عمومی مسئله به‌صورت روابط ۷۳ حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned} u_{1-2\mathrm{D}} = {} & -\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_3}\right)\left(\alpha_3\frac{k_1}{\theta_0}\square_{T-2\mathrm{D}} - m_1 m_3\frac{\partial}{\partial t}\right)F_{2\mathrm{D}}, \\ u_{3-2\mathrm{D}} = {} & \left[\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\,\square_{T-2\mathrm{D}}\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\alpha_2}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right.\right. \\ & \left.\left.-\ \frac{\rho_0}{1+\alpha_1}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right) - m_1^2\left(\frac{\partial^3}{\partial x_1^2\partial t}\right)\right]F_{2\mathrm{D}}, \\ T_{2\mathrm{D}} = {} & -(\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3)\left(\frac{\partial^2}{\partial x_3\partial t}\right) \\ & \times\left[\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \left(\frac{\alpha_2 m_3}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right. \\ & \left.-\left(\frac{\rho_0 m_3}{\alpha_1 m_3 - \alpha_3 m_1 + m_3}\right)\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right]F_{2\mathrm{D}} \end{aligned} \tag{۷۳}$$

که معادله‌ی حاکم بر تابع پتانسیل آن، براساس رابطه‌ی ۷۰ به قرار رابطه‌ی ۷۴ است:

$$\begin{aligned} & \alpha_2\left\{\frac{k_1}{\theta_0}(1+\alpha_1)\,\square_{T-2\mathrm{D}}\left(\square_{1-2\mathrm{D}}\square_{2-2\mathrm{D}} - \delta\frac{\partial^4}{\partial x_3^2\partial t^2}\right)\right. \\ & -m_1^2\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho_0}{\alpha_2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right)\right. \\ & \left.\left.\times\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{m_3^2}{m_1^2}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right) + \delta_m\frac{\partial^4}{\partial x_1^2\partial x_3^2}\right]\right\}F_{2\mathrm{D}} = 0 \end{aligned} \tag{۷۴}$$

۸. نتیجه‌گیری

در نوشتار حاضر، با استفاده از روشی سیستماتیک یک مجموعه تابع پتانسیل برای حل مسائل ترموالاستودینامیک مربوط به محیط‌های همسانگرد جانبی ارائه شده است. از نکات مهم توابع پتانسیل مذکور آن است که این توابع در قالب عملگرهای موج، انتقال حرارت و ترم‌های اضافی حاصل شده‌اند که دارای معانی فیزیکی و کاربردی خاصی هستند و به‌علاوه عملگرها چنان مرتب شده‌اند که مرتبه‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر تابع پتانسیل نیز کمتر شده است، به طوری که نیازی به شرایط مرزی و اولیه اضافه بر شرایط فیزیکی واقعی نیست. به دلیل تشابه معادلات

حاکم بر انتقال حرارت و فشار سیال موجود در حفره‌ها (فشار سیال حفره‌یی) می‌توان از توابع پتانسیل ارائه‌شده در این نوشتار، برای حل مسائل تئوری تغییرشکل (تحکیم و تراوش) محیط ارتجاعی همسانگرد جانبی متخلخل اشباع نیز استفاده کرد.

پانوشت‌ها

1. anisotropic media
2. thermoelastodynamics
3. composite materials
4. transversely isotropic materials
5. theory of thermoelasticity
6. deformation theory
7. fluid-saturated porous elastic materials
8. seepage and consolidation of porous media
9. temperature
10. pore fluid pressure
11. axis of elastic symmetry
12. axis of symmetry for heat conductivity and thermal expansion
13. convex
14. circularly symmetrical problems
15. potential functions
16. elastostatics
17. elastodynamics
18. non-uniqueness
19. first piola-kirchhoff stress tensor
20. deformation gradient
21. first law of thermodynamics
22. internal energy
23. heat flux vector
24. heat supply
25. second law of thermodynamics (classius-duhamel inequality)
26. entropy
27. Gibbs
28. temperature gradient
29. positive definite square root
30. finite strain tensor
31. conductivity tensor
32. basic equations of linearized thermoelasticity theory
33. fourth-order tensor
34. elasticity tensor
35. second-order tensor
36. stress-temperature tensor
37. positive definite
38. wave operators
39. scale factors

منابع (References)

1. Eubanks, R.A. and Sternberg, E., "On the axisymmetric problem of elasticity theory for a medium with transverse isotropy", *Journal of Rational Mechanics and Analysis,* **3**, pp. 89-101 (1954).
2. Dundurs, J. "Some properties of elastic stress in a composite", In *Recent Advances in Engineering Science,* **5**, pp. 203-216 (1970).
3. Biot, M.A. "Thermoelasticity and irreversible thermodynamics", *Journal of Applied Physics,* **27**, pp. 240-253 (1956).
4. Verruijt, A. "The completeness of Biot's solution of the coupled thermoelastic problem", *Quarterly of Applied Mathematics,* **26**(4), pp. 485-490 (1969).
5. Apostol, T.M., *Mathematical Analysis: A Modern Approach to Advanced Calculus*, Addison-Wesley (1957).
6. Lekhnitskii, S.G., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body,* Mir, Moscow (1981).
7. Gurtin, M.E. "The linear theory of elasticity: Mechanics of solids II (editor C. Truesdell)", *Springer-Verlag,* Berlin, pp. 1-295 (1972).
8. Love, A.E.H. "A treatise on the mathematical theory of elasticity", Dover Publications, New York (1944).
9. Nowacki, W. "The stress function in three dimensional problems concerning an elastic body characterized by transversely isotropy", *Bull. Acad. Polon. Sci.,* **2**, pp. 21-25 (1954).
10. Hu, H.C. "On the three dimensional problems of the theory of elasticity of a transversely isotropic body", *Sci. Sinica,* **2**, pp. 145-151 (1953).
11. Elliott, H.A., "Three dimensional stress distributions in hexagonal aeolotropic crystals", *Proc. Camb. Phil. Soc.,* **44**, pp. 522-533 (1948).
12. Wang, M.Z. and Wang, W. "Completeness and nonuniqueness of general solutions of transversely isotropic elasticity", *International Journal of Solids and Structures,* **32**(374), pp. 501-513 (1995).
13. Lodge, A.S. "The transformation to isotropic form of the equilibrium equations for a class of anisotropic elastic solids", *The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics,* **8**, pp. 211-225 (1955).
14. Eskandari-Ghadi, M. "A complete solution of the wave equations for transversely isotropic media", *Journal of Elasticity,* **81**, pp. 1-19 (2005).
15. Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R.Y.S. "Elastodynamics and elastostatics by a unified method of potentials", *Journal of Elasticity,* **92**(2), pp. 187-194 (2008).
16. Eskandari-Ghadi, M. and Pak, R.Y.S. "On the completeness of a method of potentials in elastodynamics", *Quarterly of Applied Mathematics,* **65**(4), pp. 789-797 (2005).

17. Carlson, D.E. "Linear Thermoelasti city Mechanics of solids II (Editor C. Truesdell)", *Springer,* Berlin, pp. 297-345 (1972).

18. Deresiewicz, H. "Solution of the equations of thermoelasticity", *Proc. 3rd U.S. National Congr. Appl. Mech., Brown University,* pp. 287-291 (1958).

19. Zorski, H. "Singular solutions for thermoelastic media", *Bull. Acad. Polon. Sci.,* **6**, pp. 331-339 (1958).

20. Fung, Y.C., *Foundation of Solid Mechanics*, Englewood Chiffs, Prentice-Hall Inc. (1965).

21. Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M., "Mechanics of continuous media", University of Tehran Press, 2nd edition (In persain) (2005).

22. Fedorov, F.I., "Theory of elastic waves in crystals", *Plenum Press,* New York (1968).

23. Forati, M., "A complete set of potential functions for thermoelasto dynamic, equations in transversely isotropic media", Msc thesis, College of Eng. University of Tehran(In persain) (2009).

24. Rahimian, M. and Eskandari-Ghadi, M., "Theory of elasticity," University of Tehran Press, 2nd edition(In persain) (2001).

25. Eskandari-ghadi, M., "Impedance function for rigid surface foundation of transversely isotropic half-space", PhD thesis, College of Eng.University of Tehran (In persain)(1992).

26. Sternberg, E. and Gurtin, M.E. "On the completeness of certain stress functions in the linear theory of elasticity", *Proc. Forth U.S. Nat. Cong. Appl. Mech.,* pp.793-797 (1962).

27. Stippes, M. "Completeness of Papkovich potentials", *Quarterly of Applied Mathematics,* **26**, pp. 477-483 (1969).

28. Tran-Cong, T. "On the completeness and uniqueness of Papkovich-Neuber and the non-axisymmetric Boussinesq, Love and Burgatti solutions in general cylindrical coordinates", *Journal of Elasticity,* **36**, pp. 227-255 (1995).

29. Truesdell, C. "Invariant and complete stress functions for general continua", *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **4**, pp. 1-29 (1959).

30. Gurtin, M.E. "On Helmholtz's theorem and the completeness of the Papkovich-Neuber stress functions for infinite domains", *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **9**, pp. 225-233 (1962).

31. Sternberg, E. "On the integration of the equation of motion in the classical theory of elasticity", *Archive for Rational Mechanics and Analysis,* **6**, pp. 34-50 (1960).

32. Sternberg, E. and Eubanks, R.A. "On stress functions for elastokinetics and the integration of the repeated wave equation", *Quarterly of Applied Mathematics,* **15**, pp. 149-153 (1957).

THERMOELASTODYNAMIC BOUNDARY VALUE PROBLEMS IN TRANSVERSELY ISOTROPIC MATERIAL WITH POTENTIAL FUNCTIONS

M. Forati
M. Eskandari-Ghadi
M. Rahimian
College of Engineering
University of Tehran
Tehran, Iran.

Abstract:

An open region in Euclidean space containing thermoelastic transversely isotropic material is considered, wherein the axes of material symmetry from both mechanical and thermal points of view are identical. The coupled equations of motion and energy equation are considered as governing equations for the problem involved in this paper. The governing equations are a system of partial differential equations that cannot be analytically solved using classical methods. The related boundary value problem may be solved, either with completely numerical methods such as finite element methods, or with semi numerical methods such as the boundary element method. In the latter case, the related Green's functions are needed, which may be determined by solving the governing equations analytically. To do so, the system of partial differential equations governing the boundary value problems should be transformed into some separated partial differential equations. The method of potential functions is the best way to catch the separated partial differential equations. In this paper, based on a systematic method, a set of potential functions is introduced, which transforms the system of coupled partial differential equations into two separated equations. The order of the governing partial differential equations for one of the potential functions is six, and for the other is two. The uniqueness and non-uniqueness of the proposed potential functions are discussed and based on the non-uniqueness rule of the potential functions; two other sets for the potential functions are also introduced. In addition, the two dimensional case of the problem is discussed separately and the related potential functions are introduced. Applications of the results of this paper are seen if one determines the displacements and the temperature Green's function for the related initial boundary value problems, which, themselves, may be used in transient boundary element methods.

Keywords: Thermoelastodynamics; transversely isotropic; potential functions; equations of motion; energy equation; non-uniqueness of potential functions.