

# بررسی تأثیرات خطای همانندسازی ساختار چرخشی در تحلیل جریان در کانال با روش شبیه‌سازی مستقیم DNS

الهام رجبی\* (دانشجوی دکتری)

محمدرضا کاویانپور (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه خواجه‌نصیرالدین طوسی

مهندسی عمران: شریف  
دوری ۲-۱۴۹، شماره ۲، ص. ۱۲-۳

برای سری‌های فوری و چپیشف<sup>۱</sup>، تحلیل خطا در تقریب ضرایب انتگرالی کوادراتیک گاوسین از راه ساده‌ی تحلیل همانندسازی<sup>۲</sup> ممکن است. برای ایجاد کدهای شبه‌طیفی مناسب و پایدار با حذف این مسائل مکانیک سیالات استفاده از فرمولاسیون «قانون ۲/۳» پیشنهاد می‌شود. در این نوشتار به بررسی تأثیر الگوهای همانندسازی غیرمحدوف<sup>۳</sup>، حذف همانندسازی در راستای قائم<sup>۴</sup>، حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی<sup>۵</sup>، و حذف همانندسازی در ۳ راستا (کامل)<sup>۶</sup> در حذف خطای همانندسازی در جریان یک کانال پرداخته شده است. تحلیل جریان با حل مستقیم معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر DNS به روش شبه‌طیفی و الگوریتم گام زمانی متغیر و ساختار چرخشی جمله جابجایی انجام شده است. نتایج حاصله نشان می‌دهد علی‌رغم افزایش تعداد دفعات عملیات در الگوریتم‌های اصلاحی حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی و حذف همانندسازی در ۳ راستا (کامل)، استفاده از این روش‌ها منجر به افزایش دقت و کاهش هزینه‌های محاسباتی در حدود ۳۳٪ می‌شود. تفاوت مقادیر شدت آشفتگی میان این ۲ روش نیز بیشینه‌ی ۵/۵٪ برآورد می‌شود، در حالی‌که اختلاف مقادیر شدت آشفتگی در روش همانندسازی غیرمحدوف و الگوهای فوق بین ۷ تا ۹ برابر است. در نهایت با توجه به مقادیر آشفتگی محاسبه‌شده، نتیجه‌گیری شد که روش‌های بهبودیافته با حذف همانندسازی از منظر اقتصادی عملکرد مطلوب‌تری دارند.

واژگان کلیدی: شبیه‌سازی عددی مستقیم DNS، روش شبه‌طیفی، جریان کانال، خطای همانندسازی، گام زمانی متغیر.

rajabi@dena.kntu.ac.ir  
kavianpour@kntu.ac.ir

## ۱. مقدمه

زیرا روش‌های طیفی و شبه‌طیفی دقت بسیار بالاتری نسبت به سایر روش‌های عددی دارند. روش‌های طیفی انواع مختلفی دارند که با توجه به روش کمیته‌کردن تابع باقیمانده، معمول‌ترین آن‌ها عبارتند از: روش گالرکین و روش ترتیبی با شبه‌طیفی. همچنین در روش‌های طیفی از توابع اساسی مختلفی استفاده می‌شود که انتخاب تابع بهینه با توجه به هندسه‌ی مسئله تعیین می‌شوند. در شرایط مرزی متناوب استفاده از سری‌های فوری و در محدوده‌های متناهی با شرایط غیرمتناوب، بهترین انتخاب، چندجمله‌ی چپیشف است.

تفاوت اصلی میان روش گالرکین و روش شبه‌طیفی به پدیده‌ی به نام «همانندسازی» استناد داده می‌شود. برای تعریف ساده‌ی این پدیده باید اشاره کرد که در یک شبکه‌ی  $N$  نقطه‌ی ترکیبیات فوری  $\exp(ikx)$  با  $k: n/2$  با عنوان موج کوتاه ظاهر می‌شوند و در این حالت گفته می‌شود میان عدد موج بلند و کوتاه همانندسازی صورت می‌گیرد.<sup>[۴]</sup>

در روش گالرکین خطای موجود محدود به خطای قطع‌شدگی است، در حالی‌که در روش شبه‌طیفی (ترتیبی) هم‌زمان هر دو خطای همانندسازی و قطع‌شدگی وجود

در طول ۲۵ سال اخیر، شبیه‌سازی عددی مستقیم به ابزاری ارزشمند جهت تحقیقات در جریان‌های آشفتگی محصور در جداره تبدیل شده است و بررسی‌های متنوعی پیرامون ویژگی‌های آماری و همچنین ویژگی‌های ساختاری آشفتگی محصور در دیواره انجام است. یکی از ساده‌ترین جریان‌های محصور در جداره‌ی جریان عبوری از یک کانال مسطح است که اولین بار در سال ۱۹۸۷ مدل‌سازی شد،<sup>[۱]</sup> و تاکنون نیز بارها به روش‌های مختلف و با اعداد رینولدز متفاوت شبیه‌سازی شده است. مثلاً می‌توان به پژوهش‌هایی در دانشگاه توکیو در شبکه‌ی بی به ابعاد  $20 \times 48 \times 25 \times 10 \times 4 \times 230$  و عدد رینولدز اصطکاک  $Re_{\tau} = 2320$ <sup>[۲]</sup>، و همچنین شبیه‌سازی عددی مستقیم جریان کانال در اعداد رینولدز اصطکاک  $Re_{\tau} = 2000$  در شبکه‌ی بی به ابعاد  $460 \times 633 \times 644$  در مؤسسه‌ی DEISA در اروپا اشاره کرد.<sup>[۳]</sup> متداول‌ترین شیوه برای شبیه‌سازی عددی مستقیم استفاده از روش‌های طیفی است،

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۹/۹، اصلاحیه ۱۳۹۰/۵/۱۵، پذیرش ۱۳۹۰/۱۲/۱۴.

دارد. این خطا در محاسبه‌ی جملات غیرخطی در روش شبه طیفی به دلیل ساختار گسسته‌شده‌ی رابطه‌ی اندازه‌ی حرکت ظاهر می‌شود که با برخی شیوه‌های اصلاحی از بین می‌روند. اهمیت خطای همانندسازی اضافی در روش ترتیبی به‌ویژه در سال‌های ابتدایی رواج روش طیفی در مدل‌سازی همواره مورد بحث و جدل بوده است و به‌طور خاص دو موضوع واردی تأثیر همانندسازی بر دقت و در مسائل تدریجی پایداری زمانی محاسبات مد نظر قرار گرفته است. بدین سبب بسیاری از برنامه‌های جدید از رویه‌ی حذف همانندسازی و یا از الگوریتم‌های ویژه‌ی عددی که حالت بقایی رابطه‌ی انرژی گسسته‌شده را تأمین کنند، استفاده می‌کنند.

تأثیر خطای همانندسازی اولین بار توسط فیلیپ (۱۹۵۹) گزارش شد. وی فرایند انفجاری<sup>۷</sup> مدل گردش عام زمین (GCM)<sup>۸</sup> (۱۹۵۶) خود را به ناپایداری که منحصرأ به علت همانندسازی ایجاد شده بود، نسبت داد. هر چند ناپایداری این مدل با کاهش قابل توجه گام زمانی و ابعاد شبکه صورت پذیرفت، ولی انتقال عدد موج بلند به کوتاه به‌منزله‌ی منشاء ناپایداری فرض شد. فیلیپ (۱۹۵۹) با استفاده از فیلتر همه یا هیچ، پایداری مدل خود را تضمین کرد. پیشنهاد فیلیپ برای فرایند متوقف‌کردن همانندسازی، استفاده از فیلتر مکانی برای حذف امواج با عدد موج  $h$  و  $2h$  بود.<sup>[۲]</sup> برای روش‌های طیفی حذف اعداد موج آزردهنده قبل از هر انتقال به مقادیر شبکه صورت می‌گیرد. سپس در سال ۱۹۷۱ پیشنهاد شد که با فیلترکردن  $1/3$  بالایی نیز می‌توان طیف همانندسازی را کاملاً از بین برد،<sup>[۵]</sup> و نشان داده شد که پالایش نیمی از این طیف بی‌فایده است و اگر همه‌ی امواجی که در آن‌ها  $|k| > 2/3K$  است، فیلتر شوند؛ در این صورت فعل و انفعال کوادراتیک دو عدد موج  $p$  و  $q$  که از فیلتر عبور کرده‌اند، فقط با اعداد موج پالایش شده همانندسازی خواهد کرد و این بدان دلیل است که جابجایی همانندسازی در  $k$  همیشه باید مضربی از  $2h$  باشد. در نتیجه فقط کافی است اعداد موج میان  $2h$  و  $3h$  برای متوقف‌کردن همانندسازی فیلتر شوند. در واقع اعمال «قانون  $2/3$ » تأثیری بر امواج در دامنه‌ی  $k \in [-2/3K, 2/3K]$  ندارد، ولی همه‌ی ضرایب فوریه با شرط  $|k| > 2/3K$ ، در انتهای هر گام زمانی صفر می‌شوند. در سال ۱۹۶۶ نیز پیشنهاد دیگری مبنی بر استفاده از رابطه‌ی اختلاف محدود بهبودیافته ارائه شد که بقای رابطه‌ی انرژی را ارضاء کند که این راه حل هم مانع ناپایداری ناشی از همانندسازی شد.<sup>[۶]</sup>

به‌طورکلی می‌توان گفت مقالات متعددی در طول سالیان اخیر به‌ویژه در زمان طرح شیوه‌ی طیفی برای حل جریان‌های هیدرولیکی به روش شبه‌سازی مستقیم ارائه شده است، که در آن به نقش فرایند موسوم به همانندسازی در آن و به‌ویژه روش شبه‌طیفی پرداخته شده است. در این ملاحظات تأثیر خطای همانندسازی بر پایداری و دقت روش‌ها مدنظر قرار گرفته است. در الگوریتم‌های بهینه، همواره پیشنهادها مبنی بر کنترل و یا حذف تأثیر همانندسازی در محاسبات طیفی بوده است؛ زیرا در سال ۱۹۷۹ ثابت شد که تأثیر همانندسازی در دقت روش طیفی با خطای ناشی از قطع شدگی در یک مرتبه قرار دارد.<sup>[۷]</sup> بدین ترتیب با آگاهی از یکسان‌بودن کاهش نرخ رشد خطای قطع‌شدگی و درون‌یابی، رفتار مشابه خطاهای تقریب در الگوی گالرکین و شبه‌طیفی (ترتیبی) مشخص می‌شود. از تأثیر خطای همانندسازی در آنالیز فوریه و حل معادلات دیفرانسیل پاره‌یی به روش طیفی، برخی نتایج به این شرح ارائه شده است: مثلاً در معادله‌ی برگرز پایدار نیز نرخ افت در روش گالرکین بدون خطای همانندسازی و روش شبه‌طیفی (ترتیبی) با تأثیر همانندسازی<sup>۹</sup> مشابه است.<sup>[۸]</sup> همچنین در برآورد جریان سه بعدی پایدار معادلات ناویر استوکس نشان داده می‌شود که تقریب‌های روش گالرکین (بدون خطای همانندسازی) و روش شبه‌طیفی (با تأثیر همانندسازی) رفتارهای مشابه دارند که برای هر سه تقریب فوریه، چیشیف، و لواندر صادق است.<sup>[۹]</sup> از تحقیقات جدیدتر در این زمینه نیز می‌توان به

بررسی تأثیر همانندسازی در تحلیل فوریه‌ی چند سطحی در حل معادلات دیفرانسیل پاره‌یی با روش الگوریتم‌های چند شبکه‌یی<sup>۱۰، ۱۱</sup> و یا خطای همانندسازی در تحلیل زیرفضای موجک‌های<sup>۱۱</sup> دو بعدی اشاره کرد.<sup>[۱۱]</sup>

در ادامه‌ی بررسی تأثیر خطای همانندسازی بر حل معادلات دیفرانسیل، در سال ۱۹۹۴ نیز به تشریح اثر همانندسازی در معادله‌ی موج خطی یک بعدی با ضریب متغیر و ایجاد خطاهای غیرقابل پذیرش با فرض حل قابل قبول میدان پرداخته شد.<sup>[۱۲]</sup> همچنین در سال‌های ۱۹۸۳ و ۱۹۹۱ تحقیقاتی در زمینه‌ی تحلیل ورتکس نیلور-گرین<sup>۱۲</sup> در حالت سه بعدی و با اعداد رینولدز متفاوت و با استفاده از روش‌های عددی اختلاف محدود و طیفی اعم از گالرکین و شبه‌طیفی و با توجه به ساختارهای معمول گسسته‌سازی عبارت غیرخطی شامل ساختار چرخشی<sup>۱۳</sup>، ساختار متقارن انحرافی<sup>۱۴</sup>، ساختار انتقالی<sup>۱۵</sup>، و ساختار واگرایی<sup>۱۶</sup> انجام شد و تأثیر همانندسازی بر پارامترهای آشفتگی در تحلیل جریان در الگوهای گسسته‌سازی عبارت غیرخطی به روش شبه‌طیفی در مقایسه با روش گالرکین (بدون همانندسازی) ارائه شد.<sup>[۱۳، ۱۴]</sup> همچنین در گزارش‌هایی نتایج حاصل از تحلیل جریان به روش شبه‌سازی عددی مستقیم با استفاده از روش گالرکین و شبه‌طیفی PS در ساختارهای چرخشی و متقارن انحرافی مورد بحث و بررسی قرار گرفت.<sup>[۱۵، ۱۶]</sup> در سال ۱۹۹۶ نیز به بیان تحلیلی تفاوت میان نتایج حاصل از تأثیرات همانندسازی در ساختارهای مختلف عبارت جابجایی در محاسبات شبه‌طیفی معادلات ناویر استوکس پرداخته شد و برای نمونه به بررسی خطای همانندسازی در معادله‌ی برگرز و جریان آشفته‌ی ایزوتروپ تراکم‌پذیر به روش LES اشاره شد.<sup>[۱۷]</sup> در ادامه، در سال ۱۹۹۷ نمونه‌ی عددی جریان آشفته‌ی کانال به روش LES و اجزاء محدود با ساختارهای متفاوت عبارت غیرخطی جابجایی به‌ویژه ساختار چرخشی و ساختار متقارن انحرافی در روش LES و تأثیر همانندسازی در نتایج حاصله ارائه شد.<sup>[۱۸]</sup> امروزه نیز تأثیر خطای همانندسازی در شرایط متفاوت تحلیل جریان آشفته‌ی کانال به روش LES همواره مد نظر قرار گرفته است.<sup>[۱۹، ۲۰]</sup>

بدین ترتیب برای این مطلب شواهد منطقی وجود دارد که اگر در یک مسئله‌ی معلوم علی‌رغم وجود همانندسازی دقت کافی در محاسبات وجود داشته باشد و ابعاد شبکه به اندازه‌ی کافی ریز باشد، نتایج حاصله همانند پاسخ در حالت اصلاحی حذف همانندسازی خواهد بود. همچنین با توجه به مشاهده‌های عددی معتبر، استفاده از ساختارهای مناسب برای گسسته‌سازی معادلات مانند ساختار چرخشی، ساختار متقارن انحرافی، ساختار انتقالی و ساختار واگرایی موجب اصلاح برخی ناپایداری‌های زمانی می‌شود و در محاسبات بدون حذف همانندسازی می‌توان از آن‌ها استفاده کرد. این تذکر لازم است که در برخی کاربردهای روش‌های طیفی مانند جریان کاملاً آشفته، اعمال دقت کافی در ریزکردن مش بندی به دلیل محدودیت ابزار کامپیوتری مشکل است. در صورتی که ابعاد شبکه‌ی مش بندی در جریان‌های آشفته به‌گونه‌یی باشد که توانایی بررسی مقیاس‌های کوچک وجود داشته باشد، تأثیر همانندسازی بالطبع مورد توجه قرار می‌گیرد. البته خطاهای همانندسازی<sup>۱۷</sup> معمولاً با افزایش مرتبه‌ی الگو افزایش می‌یابد، مشتقات اول با دقت بیشتری معین می‌شوند و از این رو اثر متقابل همانندسازی در مودهای با بسامد بالاتر، تأثیر بیشتری بر ضرایب خواهد داشت. در نهایت می‌توان گفت علی‌رغم نامعلوم بودن دقیق علت ناپایداری برای رفع خطای همانندسازی<sup>۳</sup> استراتژی فیلترکردن، حفظ بقای انرژی در روابط گسسته‌سازی شده، و دقت بسیار بالا در گسسته‌سازی زمانی و مکانی پیشنهاد شده است. البته در صورتی که میدان جریان به خوبی با مدل طیفی همگرایی نمای قابل تحلیل شده باشد، بقای انرژی با تقریب بالایی ارضا می‌شود و نیازی به ساختارهای اصلاحی همانندسازی نیست.

در چند سال اخیر نیز تحقیقات متنوعی در رابطه با همانندسازی و حذف آن در روش‌های عددی متفاوت مانند روش شبه‌طیفی PS<sup>[۲۱]</sup>، روش‌های ترکیبی RANS و LES<sup>[۲۲]</sup>، روش اختلاف فشرده‌ی ترکیبی (CCD)<sup>[۲۳]</sup> انجام شده است. همچنین تأثیر رفع خطای همانندسازی در الگوهای مختلف جریان مانند آبشار مشبک بولتزمن<sup>[۲۴]</sup>، جریان تراکم‌ناپذیر کانال، داکت مربعی، و جریان تراکم‌پذیر عبوری از مقطع بال<sup>[۲۵]</sup> بررسی شده است.

با توجه به مطالب ذکرشده، تاکنون در تحقیقات اشاره‌شده به بررسی مستقل تأثیر توأم همانندسازی و حذف این خطا در شبیه‌سازی عددی مستقیم (DNS) جریان کانال به روش شبه‌طیفی پرداخته نشده است. همچنین تأثیر قانون ۲/۳ در حذف خطای همانندسازی در راستاهای مختلف در الگوهای حذف همانندسازی در راستای قائم، حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی، و حذف همانندسازی در ۳ راستا (کامل) بررسی نشده است. ضمن آنکه هر چند در شرایط معمول «با استفاده از گام زمانی ثابت» مشخص شده است که الگوی متقارن انحرافی بر ساختار چرخشی رجحان دارد، ولی مطابق با پژوهشی در سال (۲۰۱۲)<sup>[۲۶]</sup> نشان داده شد که در صورت استفاده از گام زمانی متغیر و استفاده از قانون ۲/۳ در راستای x و z، دقت نتایج در ساختارهای چرخشی و متقارن انحرافی تفاوتی ندارند. لذا در این تحقیق به بررسی نتایج حاصل از جریان آشفته‌ی کانال با استفاده از روش DNS و الگوی چرخشی با الگوریتم گام زمانی متغیر پرداخته می‌شود و تأثیر حذف خطای همانندسازی با الگوهای مختلف قانون ۲/۳ در راستاهای متفاوت با رویکرد کاهش پیشینه‌ی هزینه‌ی محاسباتی ارائه می‌شود.

## ۲. تعریف مسئله

چنان‌که گفته شد، به‌طورکلی ۲ شیوه‌ی متعارف برای حذف خطای همانندسازی وجود دارد، که عبارت‌اند از: روش جابجایی فازها و روش پیمایشی<sup>۲۱</sup> که البته هر دو توانایی بسط به حالت دو و سه بعدی را دارند. روش جابجایی فازها برای حذف عبارت همانندسازی نیز توسط آرسراگ و پترسون در سال ۱۹۷۱ ارائه شد. در این روش تبدیلات بر روی شبکه‌ی جابجاشده به اندازه‌ی  $\Delta$  در فضای فیزیکی صورت می‌گیرد و بدین‌گونه ترکیبات همانندسازی شده مربوط به جمله‌ی غیرخطی با هزینه‌ی دو برابر انتگرال گسسته‌ی پیشگی<sup>۲۲</sup> از بین می‌رود، که البته بیشتر از هزینه‌ی روش پیمایشی است.<sup>[۸]</sup> در این بخش به نحوه‌ی همانندسازی در گسسته‌سازی با استفاده از بسط فوری و چپیشف و شیوه‌ی برخورد و حذف خطای همانندسازی در روش پیمایشی و یا قانون ۲/۳ پرداخته می‌شود. اگر برای هر عدد صحیح  $N$  مجموعه‌ی از این نقاط در نظر گرفته شود (رابطه‌ی ۱):

$$x_j = \frac{2\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (1)$$

که در آن،  $x_j$ ها به‌منزله‌ی نقاط یا گره‌های شبکه در بسط فوری هستند، آنگاه ضرایب فوری‌ی گسسته‌شده‌ی تابع مختلط  $u$  در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$  با توجه به نقاط شبکه‌ی فوق به این شرح بیان می‌شوند (رابطه‌ی ۲):

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ikx_j} \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (2)$$

چندجمله‌ی مثلثاتی درون‌یاب  $u$  در هر نقطه عبارت است از:

$$I_N u(x) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{-ikx}$$

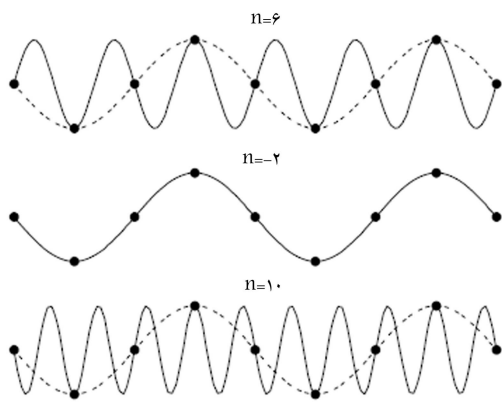
این رابطه نشان می‌دهد که  $k$ امین مود از چند جمله‌ی مثلثاتی درون‌یاب  $u$  فقط به  $k$ امین مود  $u$  بستگی ندارد؛ بلکه این مقدار به همه‌ی مودهای  $u$  که  $k$ امین‌شان در شبکه‌ی گسسته‌سازی شده دارای اثر یکسان<sup>۲۳</sup> هستند، مربوط می‌شود. از آنجا که مقادیر توابع متعامد  $\phi_k(x_j)$  و  $\phi_{k+Nm}(x_j)$  مطابق شکل ۱ با هم برابرند، لذا بسامد  $(k + Nm)$ امین با بسامد  $k$ امین در شبکه هم‌اثر هستند و در همه‌ی نقاط شبکه این بسامدها غیرقابل تشخیص هستند. به عبارت دیگر، در یک مجموعه‌ی گسسته از  $N$  نقطه با فاصله‌ی مساوی در بازه‌ی  $[0, 2\pi]$ ، همه‌ی مودهای فوری‌ی شکل ۱، این مطلب را (برای بخش موهومی) در حالت  $m = 0, -1, 1, 2, \dots$  به نظر یکسان می‌رسند.  $N = 10$  نشان می‌دهد.

تبدیل فوری‌ی گسسته (DFT) که نمونه‌گیری از تابع  $u(x)$  در این نقاط (با فاصله‌ی مساوی) است، نمی‌تواند تمایز بین این مودها را تشخیص دهد. در واقع هر ضریب تبدیل فوری‌ی گسسته برابر با مجموعه‌ی از همه‌ی ضرایبی است که مودهایی مربوط به آن‌ها روی نقاط شبکه، معادل به نظر می‌رسند. چند جمله‌ی مثلثاتی درون‌یاب (از پایین‌ترین مرتبه، همان‌طور که در تقریب‌ها استفاده می‌شود) در نقاط شبکه‌ی بدون خطاست، اما در میان این نقاط چنین نیست و با بسط فوری‌ی کوتاه‌شده تفاوت دارد و در واقع رابطه‌ی ۳ را به صورت رابطه‌ی ۴ نیز می‌توان نوشت:

$$I_N u = P_N u + R_N u \quad (4)$$

که در آن، خطای  $R_N u$  که اختلاف میان چند جمله‌ی درون‌یاب و سری فوری قطع شده است، به‌منزله‌ی خطای همانندسازی شناخته می‌شود (رابطه‌ی ۵):

$$R_N u = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \left( \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{+\infty} \hat{u}_{k+Nm} \right) \phi_k \quad (5)$$



شکل ۱. پدیده‌ی همانندسازی.

که در آن‌ها  $x_j = \frac{\pi j}{N}$  است. البته  $\tilde{s}_k$  ضریب فوری‌ی گسسته‌ی تابع  $s$  است. با استفاده از رابطه‌ی تعامد تبدیل گسسته رابطه‌ی ۱۴ را خواهیم داشت:

$$\tilde{s}_k = \sum_{m+n=k} \hat{u}_m \hat{v}_n + \sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n = \hat{s}_k + \sum_{m+n=k \pm N} \hat{u}_m \hat{v}_n \quad (14)$$

که در آن، جمله‌ی دوم سمت راست، عبارت خطای همانندسازی است. اگر انتگرال گسسته‌ی پیچشی از این رابطه حاصل شود، معادله‌ی دیفرانسیل با روش طیفی گالرکین صحیح تقریب زده نشده است. این الگو روش شبه‌طیفی نامیده شده است.<sup>[۱۵]</sup> در این روش عبارت انتگرال گسسته‌ی پیچشی به هزینه‌ی معادل حاصل ضرب FFT و  $N$  محاسبه می‌شود. کل عملیات نیز با حاصل ضرب  $(15/2)N \log_2(N)$  انجام می‌شود. تعمیم محاسبه‌ی انتگرال گسسته‌ی پیچشی به حالت دو و سه بعدی نیز به همین ترتیب انجام می‌شود. کلید شیوه‌ی حذف خطای همانندسازی، استفاده از تبدیل گسسته با  $M$  نقطه به جای  $N$  نقطه است، به شرطی که  $M \geq 3N/2$  باشد. در این روش از بیمایشی یا قطع‌شدگی استفاده می‌شود. اگر روابط ۱۵ را فرض کنیم:

$$y_j = \frac{\pi j}{M} \quad (15)$$

$$\bar{u}_j = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \hat{u}_k e^{ik y_j}$$

$$\bar{v}_j = \sum_{k=-M/2}^{M/2-1} \hat{v}_k e^{ik y_j}$$

بنابراین رابطه‌ی ۱۶ را خواهیم داشت:

$$\bar{s}_j = u_j v_j \quad (16)$$

و برای  $j = 0, \dots, M-1$  داریم (رابطه‌ی ۱۷):

$$\hat{u}_k = \begin{cases} \hat{u}_k & |k| \leq N/2 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (17)$$

عبارت‌های  $\bar{u}_j$ ،  $\bar{v}_j$  و  $\bar{s}_j$  مقادیر  $u$  در نقاط  $y_j = \frac{\pi j}{M}$  هستند، با توجه به اینکه  $u_j$  مقادیر  $u$  در نقاط  $x_j = \frac{\pi j}{N}$  هستند. بدین ترتیب ضرایب  $\hat{u}_k$  همان ضرایب  $\hat{u}_k$  هستند که برای اعداد موج اضافی مقادیر با صفر پوشانده شده‌اند. همچنین اگر رابطه‌ی ۱۸ برقرار باشد:

$$\check{s}_k = \frac{1}{M} \sum_{j=0}^{M-1} \bar{s}_j e^{-ik y_j} \quad k = -\frac{M}{2}, \dots, \frac{M}{2} - 1 \quad (18)$$

بنابراین رابطه‌ی ۱۸ را خواهیم داشت:

$$\check{s}_k = \sum_{m+n=k} \check{u}_m \check{v}_n + \sum_{m+n=k \pm M} \check{u}_m \check{v}_n \quad (19)$$

که در اینجا مقادیر  $\check{s}_k$  برای  $|k| \leq N/2$  مهم است و انتخاب  $M$  چنان صورت می‌گیرد که جمله‌ی دوم سمت راست برای این مقادیر  $k$  حذف شود. از آنجا که  $\check{u}_m$  و  $\check{v}_n$  برای مقادیر  $|m| > N/2$  صفر هستند، در نامناسب‌ترین حالت ممکن

این عبارت با خطای قطع‌شدگی  $u - P_N u$  متعامد است، بنابراین رابطه‌ی ۶ را خواهیم داشت:

$$\|u - I_N u\|^2 = \|u - P_N u\|^2 + \|R_N u\|^2 \quad (6)$$

لذا خطای ناشی از درون‌یابی، در واقع همواره بزرگ‌تر از خطای ناشی از قطع‌شدگی سری فوریه است. بدین ترتیب  $k$  آمین مود درون‌یابی جبری  $u$  به  $k$  آمین مود  $u$  و همه‌ی مدهایی که عدد موجشان از  $N$  بزرگ‌تر است، بستگی دارد.<sup>[۱۶]</sup> بنابراین حالت  $k$  آمین مود از درون‌یابی جبری  $u$  بستگی به تمام مدهایی است که عدد موج آن بزرگ‌تر از  $N$  است. خطای همانندسازی برای نقاط درون‌یابی شده‌ی چبیشف بیان ساده‌تری دارد. به همین ترتیب بسط چبیشف تابع  $u$  برابر با رابطه‌ی ۷ است:

$$u(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{u}_k T_k(x), \quad \hat{u}_k = \frac{2}{\pi c_k} \int_{-1}^1 u(x) T_k(x) w(x) dx \quad (7)$$

که در آن،  $T_k(x) = \cos k\theta$  است. با توجه به روابط حاصل از گسسته‌سازی بسط چبیشف، نقاط کوادرنتر در حالت چبیشف گاوس لوباتو (CGL) و وزن آن‌ها به ترتیب عبارت‌اند از (رابطه‌ی ۸):

$$x_j = \cos \frac{\pi j}{N} \quad j = 0, \dots, N-1$$

$$w_j = \begin{cases} \frac{\pi}{2N} & j = 0, N \\ \frac{\pi}{N} & j = 1, \dots, N-1 \end{cases} \quad (8)$$

ساختار خطای همانندسازی در نقاط چبیشف گاوس لوباتو نیز مشابه با نقاط حاصل از بسط سری فوریه در رابطه‌ی ۶ است. با توجه به خاصیت تعامد در چندجمله‌ی چبیشف برای  $k = 0, \dots, N$  رابطه‌ی ۹ را خواهیم داشت:

$$(T_k, T_l)_N = \begin{cases} (T_k, T_l)_N & \text{if } l = 2mN \pm k, m \geq 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \quad (9)$$

و لذا مشابه با رابطه‌ی ۳، رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$\tilde{u}_k = \hat{u}_k + \sum_{\substack{j=2mN \pm k \\ j > N}}^{\infty} \hat{u}_j \quad (10)$$

ساختار اصلی الگوریتمی در روش طیفی گالرکین برای حل مسائل غیرخطی و با مسائل با ضرایب متغیر انتگرال گسسته‌ی پیچشی برای محاسبه‌ی حاصل ضرب  $s(x) = u(x)v(x)$  است. رهیافت محاسباتی در روش تبدیل برای  $u$  و  $v$  استفاده از تبدیل معکوس گسسته‌ی فوریه‌ی (DFT) برای تبدیل  $\hat{u}_m$ ،  $\hat{v}_n$  به فضای فیزیکی برای ایجاد حاصل ضرب فوق و سپس استفاده از DFT برای محاسبه‌ی  $\hat{s}_k$  است. لذا تبدیلات گسسته به صورت رابطه‌های ۱۱ الی ۱۳ معرفی می‌شوند:

$$u_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{u}_k e^{ik x_j} \quad j = 0, \dots, N-1$$

$$v_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \hat{v}_k e^{ik x_j} \quad (11)$$

$$s_j = u_j v_j \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (12)$$

$$\check{s}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} s_j e^{-ik x_j}, \quad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \quad (13)$$

بالایی و  $y = a, b$  پایینی ارضا می‌شود. همچنین شرایط مرزی برای سرعت در جهت‌های  $x$  و  $z$  به صورت شرایط متناوب در روابط ۲۳ در نظر گرفته شده است:

$$\begin{aligned} u_{tot}(x, y, z + L_z; t) &= u_{tot}(x, y, z; t), \\ u_{tot}(x + L_x, y, z; t) &= u_{tot}(x, y, z; t) \end{aligned} \quad (23)$$

در تحلیل میدان در تولید شرایط اولیه، همه‌ی جزئیات میدان سرعت سه بعدی اولیه با ایجاد یک میدان تصادفی سرعت و همچنین یک تحریک ایجاد شده است. سرعت و فشار کل میدان نیز به ۲ بخش ثابت و نوسانی تقسیم می‌شوند. بدین ترتیب میدان سرعت با حاصل جمع سرعت پایه و سرعت نوسانی برابر است (رابطه‌ی ۲۴):

$$u_{tot}(x; t) = U(y) e_x + u(x; t) \quad (24)$$

میدان فشار کل نیز با حاصل جمع عبارت خطی فشار در راستای  $x$  و فشار نوسانی برابر است (رابطه‌ی ۲۵):

$$p_{tot}(x; t) = x \frac{dP}{dx}(t) + p(x; t) = \prod_x(t) x + p(x; t) \quad (25)$$

همچنین گرادبان میدان فشار با حاصل جمع گرادبان میدان فشار پایه و گرادبان فشار نوسانی برابر است (رابطه‌ی ۲۶):

$$\nabla p_{tot}(x; t) = \frac{dP}{dx}(t) e_x + \nabla p(x; t) = \prod_x(t) e_x + \nabla p(x; t) \quad (26)$$

با جای‌گذاری روابط ۲۴ و ۲۶ در رابطه‌ی ۲۱ خواهیم داشت (رابطه‌ی ۲۷):

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla p = \nu \nabla^2 u - u_{tot} \cdot \nabla u_{tot} + \left[ \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \Pi_x \right] e_x \quad (27)$$

چنان‌که پیش از این نیز اشاره شد، در تحلیل جمله‌ی غیرخطی  $u_{tot} \cdot \nabla u_{tot}$  از فرم‌های متفاوتی استفاده می‌شود که از نقطه‌نظر پیوستگی در ریاضیات یکسان است، ولی در صورت گسسته‌سازی خصوصیات متفاوتی از خود بروز می‌دهند. با توجه به نتایج گزارش شده در پژوهش انجام شده [۲۶] از ساختار چرخشی استفاده شده است که در این شیوه، جمله‌ی غیرخطی با رابطه‌ی ۲۸ برابر است:

$$(\nabla \times u_{tot}) \times u_{tot} + \frac{1}{\rho} \nabla \cdot (u_{tot} u_{tot}) \quad (28)$$

فرم چرخشی در شبیه‌سازی جریان آشفتگی همگن استفاده می‌شود. این فرم در تحلیل شبه‌طیفی از خواص پایداری بهره‌مند است و محاسبه‌ی عددی آن نسبت به فرم استاندارد  $(u \cdot \nabla) u$  نیازمند عملیات کمتری است.

## ۴. گسسته‌سازی معادلات

### ۴.۱. گسسته‌سازی مکانی

تقریباً همه‌ی روش‌های مطرح در CFD با اصلاحاتی می‌توانند در DNS نیز استفاده شوند و لذا گستری بزرگی از روش‌های عددی را می‌توان در شبیه‌سازی عددی مستقیم به‌کار برد. در این تحقیق با توجه به محدودیت امکانات سخت‌افزاری استفاده از روش شبه‌طیفی [۲۵] مد نظر بوده است و در آن منفضل‌سازی در جهت‌های افقی با توجه به شرایط مرزی متناوب با بسط سری فوریه و در جهت عمود بر دیواره‌ی بسط سری چیشیف انجام می‌شود. بنابراین برای هر یک از توابع سرعت با توجه به

$M \geq \frac{2N}{\pi} - 1$  و یا  $-\frac{N}{\pi} - \frac{N}{\pi} \leq \frac{N}{\pi} - 1 - M$  است و در نهایت با انتخاب  $M$  به‌گونه‌ی مذکور ضرایب بدون همانندسازی حاصل می‌شود (رابطه‌ی ۲۰).

$$\hat{s}_k = \hat{s}_k \quad k = -\frac{N}{\pi}, \dots, \frac{N}{\pi} - 1 \quad (20)$$

تعداد دفعات عملیات برای این روش تبدیل  $(1/5N) \log_2(1/5N)$  است که از روش معمولی بدون حذف همانندسازی تقریباً ۵۰٪ بیشتر است. بنا به دلایل واضح، این شیوه گاهی «قانون ۳/۲» (rule) نامیده می‌شود. اگر به جای عامل ۳FFT، عامل ۲FFT در دسترس باشد، شیوه‌ی حذف همانندسازی با انتخاب  $M$  از قرار کوچک‌ترین توان ۲ با شرط ارضای رابطه‌ی  $M \geq \frac{2N}{\pi} - 1$  اجرا می‌شود. از این شیوه با نام روش برشی (Truncation) یا «قانون ۲/۳» (rule) یاد می‌شود. [۸] به‌طور کلی امروزه این روش به‌منزله‌ی الگوی پذیرفته‌شده در کنترل خطای همانندسازی در تحلیل جریان کانال به روش DNS در حالات مختلف استفاده شده است. [۲۷، ۲۸]

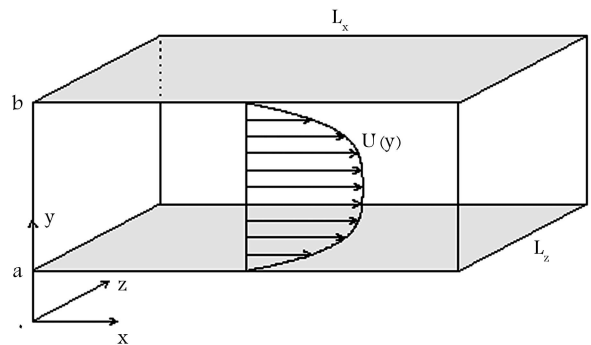
## ۳. میدان جریان

هندسه‌ی کلی جریان در شکل ۲ ارائه شده است. سیال بین دو دیواره‌ی صلب ساکن ۲۴ با مختصات  $y = a$  و  $y = b$  جریان دارد. سیال در راستای  $x$  با فرض وجود جریان پایه‌ی سهموی با معادله‌ی  $U(y) = 1 - y^2$  حرکت می‌کند. میدان محاسباتی جریان به شکل  $\Omega = [0, L_x] \times [a, b] \times [0, L_z]$  است که در آن  $L_x = 4\pi$  و  $L_z = 2\pi$  معرف جهات متناوب در نظر گرفته‌شده در راستای  $x$  و  $z$  جریان است و ارتفاع کانال  $b - a$  نیز برابر ۲ واحد است. ابعاد فیزیکی میدان جریان حاصل از یک شبکه‌ی نقاط  $128 \times 65 \times 128$  است. عدد رینولدز اصطکاک‌ی حاصله حدوداً برابر با ۱۷۵ است که دقت لازم گسسته‌سازی مکانی در تحلیل جریان به روش شبیه‌سازی عددی مستقیم در هر ۳ راستا را برآورده می‌سازد. معادلات حاکم شامل معادلات ناویر-استوکس تراکم‌ناپذیر با شرایط مرزی متناوب در راستای  $x$  و  $z$  و معادلات بقایی اندازه‌ی حرکت و جرم هستند که به صورت رابطه‌های ۲۱ و ۲۲ بیان می‌شوند:

$$\frac{\partial u_{tot}}{\partial t} + u_{tot} \cdot \nabla u_{tot} = -\nabla p_{tot} + \nu \nabla^2 u_{tot} \quad (21)$$

$$\nabla u_{tot} = 0 \quad (22)$$

در این معادلات،  $u_{tot}(x; t)$  سرعت کل میدان جریان، و  $p_{tot}(x; t)$  فشار کل در میدان جریان است. برای سرعت شرط مرزی عدم لغزش  $u = 0$  در جداره‌ی



شکل ۲. مدل شماتیک میدان محاسباتی جریان در کانال.

که در آن،  $L$  اپراتور خطی و  $C$  ثابت هستند. حال با فرض این بسط (رابطه ۳۶) برای مشتق زمانی در گام  $n+1$ :

$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=t^{n+1}} \simeq \frac{1}{\Delta t} \left( \zeta_0 y^{n+1} - \sum_{q=0}^{J-1} \alpha_q y^{n-q} \right) \quad (36)$$

و فرض ضرایب  $\beta_0, \beta_1, \dots, \beta_{J-1}$  برای بسط عبارت غیرخطی  $N$  به شکل  $N^{n+1} = \sum_{q=0}^{J-1} \beta_q N^{n-q}$  طی مرحله انجام می‌شود. در این روش  $\alpha_q, \beta_q, \zeta$  و ضرایب عددی هستند که در این روش ضرایب مذکور عبارتند از:  $\zeta = 1/6, \alpha_0 = -3, \alpha_1 = 1/5, \alpha_2 = -1/3, \beta_0 = 3, \beta_1 = -3, \beta_2 = 1$  [۳۰].

## ۵. ارائه و تحلیل نتایج

در این تحقیق، تحلیل جریان سیال بین دو دیواره‌ی صلب ساکن با فرض وجود جریان پایه‌ی سهموی با استفاده از حل مستقیم معادلات ناور-استوکس تراکم‌ناپذیر به روش شبه‌طیفی و شرایط مرزی متناوب در راستای  $x$  و  $z$  صورت گرفته است. زمان لازم برای تحلیل جریان با توجه به معیار ذکرشده در پژوهشی در سال ۲۰۰۱ [۳۱] برابر  $T = 300$  s (۱۲۰۰۰ گام زمانی) و اعداد رینولدز اولیه  $Re_L = 4000$  معادل غلظت اولیه  $v = 1/4000$  در نظر گرفته شده است. میدان محاسباتی جریان  $\Omega = [0, 4\pi] \times [-1, 1] \times [0, 2\pi]$  است و شبکه‌ی مش بندی  $128 \times 65 \times 128$  انتخاب شده است. عدد رینولدز اصطکاکی حاصله  $Re_\tau = 175$  دقت لازم گسسته‌سازی مکانی در تحلیل جریان به روش شبه‌سازی مستقیم را برآورده کرده است. گسسته‌سازی مکانی با روش ترتیبی (شبه‌طیفی) و تاو (t)، در ساختار چرخشی و استفاده از بسط سری فوری در منفصل‌سازی‌های افقی و بسط چیبشیف در جهت عمود بر دیواره انجام شده است. حل معادلات تاو با لحاظ کردن تصحیح تاو و معادلات نهایی هلمولتز و استفاده از روش ارائه شده در پژوهشی در سال ۱۹۸۷ انجام شده است. [۲۹] گسسته‌سازی زمانی با روش SBDF۳ و گسسته‌سازی مکانی جمله‌ی غیرخطی با روش چرخشی انجام شده است. همچنین در جهت کاهش محاسبات و امکان افزایش گام زمانی از الگوریتم با گام‌های زمانی متغیر استفاده شده است. بدین ترتیب با در نظر گرفتن محدوده‌ی مجاز تغییر عدد کورانت CFL در بازه‌ی  $0.4$  تا  $0.6$  امکان تغییر در هر گام زمانی ایجاد می‌شود. در این روش گام زمانی اولیه  $dt = 1/2(dt_{min} + dt_{max})$  و کرانه‌ی پایین بازه‌ی گام زمانی  $dt_{min} = 0.001$  است و امکان افزایش گام زمانی به میزان  $dt_{max} = 0.1$  وجود دارد. [۲۷] بررسی و مقایسه‌ی حالات تحلیل جریان بدون حذف: همانندسازی، همانندسازی در راستای قائم، همانندسازی در راستای طولی و عرضی جریان، و همانندسازی در هر ۳ راستا صورت گرفته و جمع‌بندی لازم ارائه شده است.

در شکل ۳، تغییرات مقادیر شدت آشفتگی  $\overline{uu}$  ارائه شده است. در این نمودار تغییرات قابل ملاحظه‌ی میان روش‌های همانندسازی غیرمحدوف و حذف همانندسازی در راستای قائم از یک سو و روش‌های حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی و حذف کامل همانندسازی مشاهده می‌شود. بیشینه‌ی اختلاف در قله‌ی نمودار در ۲ موقعیت  $y = 0.57, 0.8$  میان روش همانندسازی غیرمحدوف و حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی به ترتیب برابر  $1.05E-02, 1.03E-02$  (در حدود  $0.27, 0.81$  برابر) است. انحراف و اختلاف در سایر مقادیر آماری نیز وجود دارد که برای نمونه شدت آشفتگی  $\overline{uv}, \overline{vw}$  در شکل‌های ۴ و ۵ ارائه شده است. مطابق این شکل‌ها نتایج روش همانندسازی غیرمحدوف به الگوی

تبدیل میدان سرعت از فضای فیزیکی به فضای طیفی در راستای  $x$  و  $z$  با استفاده از تبدیل فوری رابطه‌ی ۲۹ را خواهیم داشت:

$$u(x, y, z) = \sum_{k_z = -N_z/2+1}^{N_z/2} \sum_{k_x = -N_x/2+1}^{N_x/2} \hat{u}(k_x, y, k_z) e^{i\pi(k_x x/L_x + k_z z/L_z)} \quad (29)$$

که در آن  $N_x$  و  $N_z$  به ترتیب تعداد نقاط در جهت  $x$  و  $z$ ،  $\hat{u}$  ضرایب بسط فوری و  $k_x$  و  $k_z$  به ترتیب طول میدان حل در جهات  $x$  و  $z$  است و  $\hat{u}$  نیز خود تابعی از  $y$  است که با استفاده از تبدیل چیبشیف به صورت رابطه‌ی ۳۰ تعریف می‌شود:

$$\hat{u}(k_x, y, k_z) = \sum_{n=0}^{N_y} \hat{u}(k_x, n, k_z) T_n(y) \quad (30)$$

که در آن،  $T_n(y)$  جملات چندجمله‌ی چیبشیف در  $y$  مربوطه و  $\hat{u}$  ضرایب این چندجمله‌ی‌ها و  $N_y$  تعداد نقاط در جهت  $y$  هستند. در جهت‌های  $x$  و  $z$  شبکه به صورت یکنواخت مطابق رابطه‌ی ۳۱ در نظر گرفته شده است:

$$x_l = \frac{l x_L}{N_x} - \frac{N_x}{2} + 1 \leq l \leq \frac{N_x}{2} \\ z_m = \frac{m z_L}{N_z} - \frac{N_z}{2} + 1 \leq m \leq \frac{N_z}{2} \quad (31)$$

که در آن،  $x_l$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $l$ ام در جهت  $x$  و  $z_m$  فاصله‌ی نقطه‌ی  $m$ ام در جهت  $z$  است. با توجه به اینکه  $y \in [-1, 1]$ ، لذا نقاط در این جهت به صورت رابطه‌ی ۳۲ تعریف می‌شوند که نقطه‌ی  $n$ ام در جهت  $y$  است:

$$y_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N_y}\right) \quad n \in (0, N_y) \quad (32)$$

## ۲.۴. گسسته‌سازی زمانی

روش مختلفی در گسسته‌سازی زمانی در قالب ۲ شیوه‌ی لغزشی ۲۶ و به روش‌های کوپل یا مونولیتیک ۲۷ دسته‌بندی می‌شوند. در این نوشتار با توجه به نتایج ارائه شده در پژوهشی در سال ۱۹۸۷ [۲۹]، شیوه‌ی مونولیتیک به صورت استفاده از گسسته‌سازی زمانی پیشرو اولر مرتبه‌ی یک برای جملات صریح و گسسته‌سازی زمانی پسرو اولر مرتبه‌ی سه برای جملات ضمنی مد نظر بوده است. در این الگوریتم که به نام SBDF۳<sup>۲۸</sup> مشهور است، اگر معادله‌ی اندازه‌ی حرکت به صورت رابطه‌ی ۳۳ بازنویسی شود:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla q = \nu \nabla^2 u - N(u) + \left[ \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - \Pi_x \right] \quad (33)$$

که در آن،  $q \triangleq p + 1/2 u \cdot u$  و جمله‌ی غیرخطی  $\nabla u_{tot} \cdot \nabla u_{tot}$  با ساختار چرخشی به صورت رابطه‌ی ۳۴ است:

$$N(u) \triangleq (\nabla \times u) \times u + U \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial U}{\partial y} e_x \quad (34)$$

پس از تبدیل فوری رابطه‌ی ۳۵ را خواهیم داشت:

$$\frac{\partial \hat{u}}{\partial t} + \tilde{\nabla} \hat{q} = \tilde{L} \hat{u} - \tilde{N}(\hat{u}) + \tilde{C} \quad (35)$$

جریان  $\overline{v'v'}$  برابر  $4.2\%$  و شدت آشفتگی در عرض جریان  $\overline{w'w'}$  برابر  $3.3\%$  است.

تغییرات عدد کورانت CFL در الگوهای ذکرشدهی روش‌های مختلف حذف همانندسازی نیز ثبت و در شکل ۶ ارائه شده است. با توجه به امکان تغییرگام زمانی در تحلیل جریان، کنترل تغییرات عدد کورانت در محدوده  $[0.4, 0.6]$  در راستای کنترل پایداری حل الگوی چرخشی صورت می‌گیرد.

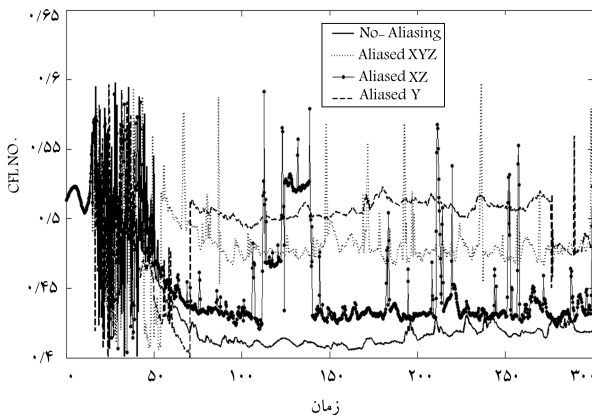
در ادامه برای صحت‌سنجی، از مقایسه‌ی نمودار پروفیل سرعت میانگین محاسباتی با قوانین تحلیلی و تجربی مقیاس‌شده برای زیرلایه‌ی ویسکوز و لایه‌ی داخلی موسوم به قانون جداره در شکل ۷ استفاده شده است. اگر سرعت اصطکاکی  $u^*$  از رابطه‌ی ۳۷ به دست آید:

$$u^* \triangleq \sqrt{\nu \left. \frac{dU}{dy} \right|_{y=0}} \quad (37)$$

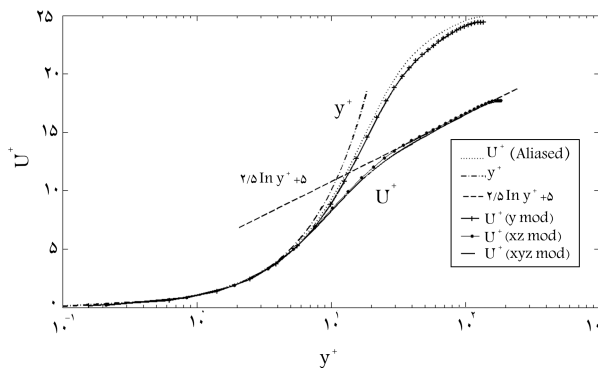
که در آن،  $U(y)$  پروفیل سرعت میانگین است. در مقیاس، دیواره‌ی ابعاد و سرعت‌ها برابر  $U^+ \triangleq U/u^*$ ،  $y^+ \equiv yu^*/\nu$  می‌شود. چنان‌که می‌دانیم، رابطه‌ی ۳۸ برقرار است:

$$\begin{aligned} U^+ &= y^+ & y^+ < 10 \\ U^+ &= 2.5 \ln y^+ + 5 & y^+ > 30 \end{aligned} \quad (38)$$

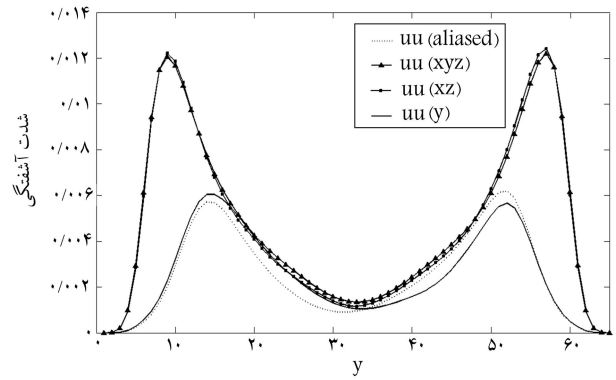
در شکل ۷ مشاهده می‌شود نتایج حاصل از سرعت میانگین در همه‌ی روش‌ها در ناحیه‌ی زیرلایه‌ی ویسکوز با قانون جداره هم‌خوانی دارد.



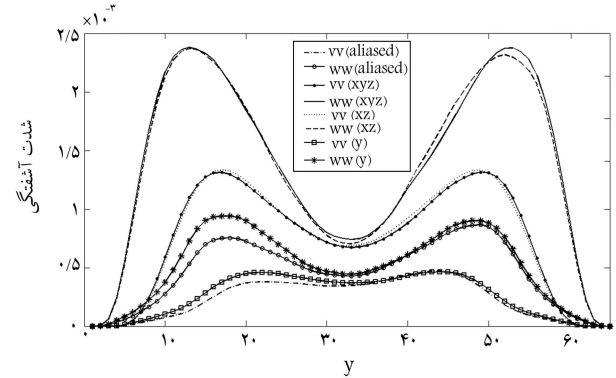
شکل ۶. تغییرات عدد کورانت CFL در روش‌های مختلف حذف همانندسازی.



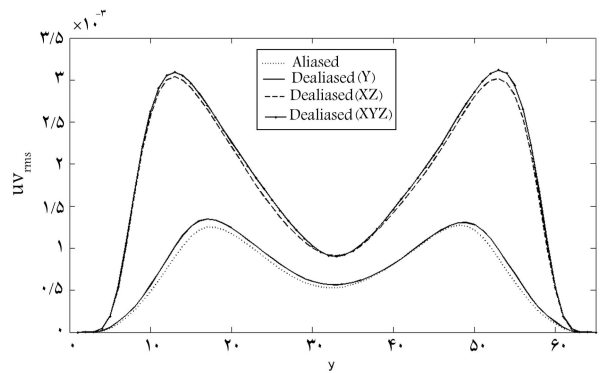
شکل ۷. نمودار قانون جداره.



شکل ۳. تغییرات مقادیر شدت آشفتگی  $\overline{uu}$ .



شکل ۴. تغییرات مقادیر شدت آشفتگی  $\overline{vv}$  و  $\overline{ww}$ .



شکل ۵. تغییرات مقادیر تنش رینولدز  $uv_{rms}$ .

حذف همانندسازی در راستای قائم نزدیک و نتایج روش حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی به الگوی حذف همانندسازی در ۳ راستا نزدیک‌تر است. بیشینه‌ی اختلاف  $\overline{v'v'}$  در میان روش همانندسازی غیرمحدوف و روش حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی در حدود  $7.5\%$  برابر و برای  $\overline{w'w'}$  در حدود  $9.6\%$  برابر است. بیشینه‌ی اختلاف در  $uv_{rms}$  میان الگوی همانندسازی غیرمحدوف و روش حذف همانندسازی کامل و در حدود  $5.9\%$  برابر است. این بیشینه‌ی تفاوت میان روش‌های همانندسازی غیرمحدوف و حذف همانندسازی در راستای قائم برای شدت آشفتگی  $\overline{v'v'}$  و  $\overline{w'w'}$  به ترتیب برابر  $28.7\%$  و  $28.6\%$  است. میانگین تفاوت مقادیر شدت آشفتگی میان دو روش حذف همانندسازی در ۳ راستا و حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی در مقادیر شدت آشفتگی در راستای جریان  $\overline{uu}$  برابر  $5.51\%$ ، در مقادیر شدت آشفتگی در راستای قائم

جدول ۱. پارامترهای آشفته‌گی در روش‌های مختلف حذف همانندسازی.

روش	زمان اجرا (s)	استهلاک (u+U)	انرژی نرمالیزه (u+U)	سرعت برشی دیواره	انحراف معیار استاندارد
غیرمحدوف	۳۷۸۰۶	۰٫۱۸۰۰۹۳	۲٫۳۴۸۱۵	۰٫۰۲۲۸۷۸۸۴۲	۰٫۰۵۶۲۲۹۳
در راستای قائم	۲۸۴۰۵	۰٫۱۸۰۲۱۶	۲٫۴۸۴۷۶	۰٫۰۲۳۹۷۴۸۰۵	۰٫۰۵۷۰۸۹۴
در سه راستا- (کامل)	۲۱۸۹۰	۰٫۱۸۶۶۷۸	۴٫۷۹۶۶۷	۰٫۰۳۸۲۳۵۳۵	۰٫۰۷۹۰۹۳
در راستای طولی و عرضی	۲۲۶۰۰	۰٫۱۸۶۰۰۴	۴٫۶۹۸۷۳	۰٫۰۳۷۷۸۶۷۲۵	۰٫۰۷۸۳۹۳

۱. در صورت استفاده از میدان جریان با ابعاد مشخص و مشخص‌بندی معین، الگوی بدون حذف خطای همانندسازی در مقایسه با سایر روش‌های اصلاحی دارای دقت کافی نیستند. این تغییرات در مقادیر آماری آشفته‌گی در حدود ۶ تا ۱۰ برابر برآورد شده است. نتایج حاصله از نمودار لگاریتمی سرعت میانگین در این روش‌ها در ناحیه‌ی انتقالی و داخلی نیز بیانگر این تفاوت معنادار است. در میان سایر ویژگی‌های آشفته‌گی نیز بیشینه‌ی انحراف ۱۰٪ در انرژی نرمالیزه‌ی کل محاسبه شده حاصل شده است.

این بی‌دقتی حتی در صورت برقراری شرط پایداری زمانی برای جریان با استفاده از الگوریتم با گام‌های زمانی متغیر و کنترل عدد کورانت در محدوده‌ی مجاز حاصل نمی‌شود. بنابراین در راستای دستیابی به دقت مناسب در روش‌های بدون حذف خطای همانندسازی و حذف همانندسازی در راستای قائم ضروری است تا نسبت به تغییر ابعاد و ریزکردن شبکه اقدام شود، که با تبعات افزایش زمان و هزینه‌ی محاسباتی مواجه است.

۲. همچنین نتایج حاصله از این تحقیق نشان داد که حذف خطای همانندسازی در راستای قائم به تنهایی نیز با مشکلاتی مشابه با الگوی بدون حذف خطای همانندسازی مواجه است و اصلاحات اساسی در جهت کاهش خطای همانندسازی ایجاد نمی‌شود.

۳. این بررسی نشان می‌دهد که در صورت استفاده از شیوه‌ی پیمایشی و حذف تأثیر همانندسازی در راستای  $x$  و  $z$  نتایج حاصله با نتایج تجربی و عددی تأیید شده تطابق بسیار مناسبی دارد. البته دقت الگوی حذف همانندسازی در ۳ راستا اندکی بیشتر ارزیابی می‌شود. میانگین تفاوت مقادیر آماری آشفته‌گی میان ۲ روش حذف همانندسازی در ۳ راستا و ۲ راستای طولی و عرضی حدوداً بین ۳ تا ۵ درصد است. با توجه به این نتایج، تفاوت مقادیر آماری شدت آشفته‌گی در ۲ روش ذکرشده قابل ملاحظه نیست و به عبارت دیگر تأثیر خطای همانندسازی در راستای قائم قابل توجه نیست.

۴. همچنین با توجه به نتایج مربوط به زمان انجام محاسبات زمان تحلیل جریان در صورت استفاده از الگوریتم اصلاحی حذف همانندسازی در ۳ راستا، در حدود ۳۳٪ کاهش می‌یابد که مبین کارایی مناسب این روش علی‌رغم افزایش تعداد دفعات عملیات است. این مسئله به دلیل صفرشدن ضرایب  $\hat{u}_k$  برای اعداد موج اضافی در هر گام زمانی در این روش‌هاست، لذا روش‌های بهبود یافته‌ی حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی و حذف کامل همانندسازی با الگوریتم گام زمانی متغیر منجر به کاهش زمان اجرا و صرفه‌جویی در هزینه‌ی محاسباتی می‌شوند و الگوی مناسب‌تری در تحلیل جریان در میدان‌های بزرگ‌تر و با اعداد رینولدز بالاتر با توجه به محدودیت‌های سخت‌افزاری موجود است.

در حالی‌که این مقایسه در ناحیه‌ی انتقالی و همچنین محدوده‌ی لایه‌ی داخلی نشان می‌دهد که روش‌های حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی و حذف کامل همانندسازی مطابق الگوی لگاریتمی رفتار می‌کنند؛ ولی نتایج در ۲ روش دیگر با نمودار تفاوت معناداری دارد.

در جدول ۱، نتایج مربوط به زمان انجام محاسبات، سرعت برشی دیواره، انرژی نرمالیزه‌ی کل، استهلاک، و انحراف معیار استاندارد سرعت نیز ارائه شده است. رابطه‌های ۳۹ و ۴۰ برای محاسبه‌ی انحراف معیار استاندارد و انرژی نرمالیزه‌شده‌ی حاصل از سرعت لحظه‌ی استفاده شده است.

$$\sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=T}^{T_1} \frac{1}{L_x L_y L_z} \times \int_a^b \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} (u_i - u_{i_{mean}}) \cdot (u_i - u_{i_{mean}}) dx dy dz} \quad (39)$$

$$\sum_{i=T}^{T_1} \frac{1}{L_x L_y L_z} \int_a^b \int_0^{L_z} \int_0^{L_x} u_i \cdot u_i dx dy dz \quad (40)$$

با توجه به جدول ۱ مشخص می‌شود که مقادیر سرعت برشی دیواره، انرژی نرمالیزه‌ی کل، استهلاک، و انحراف معیار استاندارد سرعت در روش‌های همانندسازی غیرمحدوف و حذف همانندسازی در راستای قائم مشابهت بیشتری دارد و این پارامترها در الگوهای حذف همانندسازی در راستای طولی و عرضی و حذف کامل همانندسازی نیز مقادیری نزدیک‌تر دارند. بیشینه‌ی این تفاوت پارامترها در مقدار انرژی در حدود ۹۶٪ میان روش‌های همانندسازی غیرمحدوف و حذف همانندسازی در ۳ راستا و کمینه‌ی آن در استهلاک بین همین ۲ روش در حدود ۳٪ برآورد می‌شود. ضمن آنکه زمان اجرا در روش بدون حذف خطای همانندسازی بسیار بیشتر از الگوهای اصلاحی بوده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش تأثیر همانندسازی و الگوهای حذف خطای همانندسازی در جریان یک کانال تراکم‌ناپذیر بررسی شده است. تحلیل جریان با الگوی شبه‌طیفی در روش شبیه‌سازی مستقیم و الگوریتم گام زمانی متغیر و ساختار چرخشی از جمله جابجایی انجام شده است. با توجه به نمودارها و نتایج ارائه‌شده به‌طور کلی مشاهده می‌شود که:



پانوشتها

1. Chebyshev
2. dealised
3. no dealiasing
4. dealiase Y
5. dealiase XYZ
6. dealiase XZ
7. blow up
8. general circulation model
9. aliased
10. multigrid
11. wavelets
12. Taylor-Green vortex
13. rotational
14. skew-symmetric
15. convection
16. divergence
17. aliasing
18. combined compact difference (CCD)
19. cascaded lattice Boltzmann
20. airfoil
21. padding
22. convolution sum
23. alias
24. pouisule flow
25. pesodu spectral
26. splitting method
27. Monolithic
28. third order backwards difference scheme

منابع (References)

1. Kim, J., Moin, P. and Moser, R.D. "Turbulence statistics in fully developed channel flow at low Reynolds number", *J. Fluid Mech.*, **177**, pp. 133-166 (1987).
2. Hoyas, S. and Jim'enez, J. "Scaling of the velocity fluctuations in turbulent channels up to  $Re\tau=2000$ ", *Phys. of Fluids*, **18**, pp. 351-356 (2006).
3. Iwamoto, K., Kasagi, N. and Suzuki, Y., *Direct Numerical Simulation of Turbulent Channels Flow at  $Re\tau=2320$* , Proc 6th Symposium Smart Control of Turbulence, Tokyo (2005).
4. Boyd, J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral Methods*, Publisher: Dover Publications, pp. 202-218 (2001).
5. Orszag, S.A. "Numerical simulation of incompressible flows within simple boundaries: I. Galerkin (spectral) representations", *Stud. Appl. Math.*, **50**, pp. 293-327 (1971a).
6. Arakawa, A. "Computational design for long-term numerical integration of the equations of fluid motion: Two-dimensional incompressible flow. Part I.", *J. Computational Physics*, **1**(1), pp.119-43 (1966). (reprinted *J. Comp. Phys.*, **135**, pp. 103-114 (1997)).
7. Kreiss, H.O. and Olinger, J. "Stability of the Fourier method", *SIAM J. Numer. Anal.*, **16**(3), pp. 421-433 (1979).
8. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T. A., *Spectral Methods: Fundamentals in Single Domains*, Scientific Computation, Springer, pp. 121-135 (2006).
9. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., *Spectral Methods. Evolution to Complex Geometries and Applications to Fluid Dynamics*, Series, Scientific Computation, Springer, pp. 83-183 (2007).
10. Van der Vegt, J.J.W. and Rhebergen, S. "Discrete fourier analysis of multigrid algorithms", Department of Applied Mathematics, University of Twente, Enschede. ISSN 1874-4850 (2011).
11. Liu, H. and Li, Y.Z. "On the aliasing error in a class of bidimensional wavelet subspaces", *Appl. Math. J. Chinese Univ.*, **26**(1), pp. 77-85 (2011).
12. Goodman, J., Hou, T. and Tadmor, E. "On the stability of the unsmoothed Fourier method for hyperbolic equations", *Numer. Math.*, **67**, pp. 93-129 (1994).
13. Brachet, M.E., Meiron, D.I., Orszag, S.A., Nickel, B.G., Morf, R.H. and Frisch, U. "Small-scale structure of the Taylor-Green vortex", *J. Fluid Mech.*, **130**, pp. 411-452 (1983).
14. Brachet, M.E. "Direct simulation of three-dimensional turbulence in the Taylor-Green vortex", *Fluid Dyn. Res.*, **8**, pp. 1-8 (1991).
15. Zang, T.A. "On the rotation and skew-symmetric forms for incompressible flow simulations", *Appl. Numer. Math.*, **7**, pp. 27-40 (1991).
16. Zang, T.A. "Spectral methods for simulations of transition and turbulence", *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, **80**(1-3), pp. 209-221 (1990).
17. Blaisdell, G.A., Spryopoulos, E.T. and Qin, J.H. "The effect of the formulation of the nonlinear terms on aliasing errors in spectral methods", *Appl. Numer. Math.*, **21**(3), pp. 207-219 (1996).
18. Kravchenko, A.G. and Moin, P. "On the effect of numerical errors in large eddy simulations of turbulent flows", *J. Comput. Phys.*, **131**(2), pp. 310-322 (1997).
19. Chung, D. and McKEON, B.J. "Large-eddy simulation of large-scale structures in long channel flow", *J. Fluid Mech.*, **661**, pp. 341-364 (2010).
20. Chung, D. and Pullin, D.I. "Large-eddy simulation and wall modelling of turbulent channel flow", *J. Fluid Mech.*, **631**, pp. 281-309 (2009).
21. Hou, T. and Li, R. "Computing nearly singular solutions using pseudo-spectral methods", *J. of Comput. Phys.*, **226**, pp. 379-397 (2007).
22. Schluter J.U. and Pitsch, H. "Anti-aliasing filters for coupled reynolds- averaged/ large-eddy simulations", *AIAA J.*, **43**(3), pp. 608-616 (2005).
23. Sengupta, T.K., Vijay, V.V.S.N. and Bhaumik, S. "Further improvement and analysis of CCD scheme: Dissipation discretization and de-aliasing", *J. of Computational Physics*, **228**(17), pp. 6150-6168 (2009).
24. Kirby, R.M. and Karniadakis, G.E. "De-aliasing on non-uniform grids: Algorithms and applications", *J. Comput. Phys.*, **191**, pp. 249-264 (2003).
25. Geier, M. "De-aliasing and stabilization formalism of the cascaded lattice Boltzmann automaton for under-resolved high Reynolds number flow", *Int. J. Numer. Meth. Fluids*, **56**, pp. 1249-1254 (2008).

26. Rajabi, E. and Kavianpoor, M.R. "Optimum algorithm of time discretization for channel flow analysis in direct numerical simulation method", *by Int. J. of Civil Eng.*, **10**(4), pp. 337-344 (2012).

27. Hamlington, P.E., Krasnov, D., Boeck, T. and Schumacher, J. "Statistics of the energy dissipation rate and local enstrophy in turbulent channel flow", *Physica D, Nonlinear Phenomena*, **241**(3), pp. 169-177 (2012).

28. Thais, L., Tejada Martinez, A.E., Gatski, T.B. and Mompean, G. "A massively parallel hybrid scheme for direct numerical simulation of turbulent viscoelastic channel flow", *Computers & Fluids*, **43**, pp. 134-142 (2011).

29. Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A. and Zang, T.A., *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Berlin etc., Springer-Verlag, pp. 119-123 (1987).

30. Tennekes, H. and Lumley, J.L., *A First Course in Turbulence*, MIT Press, pp. 149-164 (1972).

31. Abe, H., Kawamura, H. and Matsuo, Y. "Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to the Reynolds number dependence", *Phys. Fluids*, **11**, pp. 943-945 (2001).

# ON THE EFFECT OF ALIASING ERRORS IN THE ROTATIONAL FORM FOR CHANNEL FLOW ANALYSIS IN DIRECT NUMERICAL SIMULATION

**E. Rajabi**(corresponding author)

rajabi@dena.kntu.ac.ir

**M.R. Kavianpoor**

kavianpour@kntu.ac.ir

**Dept. of Civil Engineering**

**Khaje Nasir Toosi University of Technology**

Sharif Civil Engineering Journal

Volume 29, Issue 2, Page 3-12, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 30 November 2010; received in revised form 6 August 2011; accepted 4 March 2012.

## Abstract

The objective of this work is to perform aliased and de-aliased direct numerical simulation of a turbulent channel flow with a variable time-stepping algorithm. The time advancement is carried out by an implicit 3rd order backward different scheme for linear terms, and explicit forward Euler for nonlinear terms (SBDF3), in  $T=300s$  (about 12000 time step). A  $\tau$  pseudo spectral method is employed on  $128 \times 65 \times 128$  computational grids in  $\Omega=[0.4\pi] \times [-1.1] \times [0.2\pi]$ . The Fourier series in stream-wise and span-wise directions and Chebychev polynomial expansion in a normal direction are employed. The friction Reynolds number is  $Re_\tau=175$  and initial viscosity is set to  $\nu=1/4000$ . The effect of aliasing errors is examined in the NoDealiasing scheme. Also, the product's aliasing errors are eliminated by truncating the Fourier coefficients of the velocity and the product, using the so-called "2/3 rule", in three schemes of: DealiasY, DealiasXZ and DealiasXYZ. A comparison of turbulence intensities is made over the interval from  $T_0 = 100$  to  $T_1 = 300$ . The results of turbulence statistics, wall-shear velocity, standard deviation, overall CPU time and total normalized energy of instantaneous velocities have also been collected. Also, the results of the mean velocity profile are compared to the scaling laws for viscous and inertial layers in all schemes. The present results of turbulence strength show significant discrepancies between the results of NoDealiasing and DealiasY schemes and the DealiasXZ and DealiasXYZ schemes at the other side. Also there are no considerable differences between DealiasXZ and DealiasXYZ results. The differences between computed values of turbulent quan-

ties vary from 96% in total normalized energy to 3% in dissipation. Compared to the NoDealiasing scheme, modified DealiasXYZ reduces the computational time around 33%. Therefore, from a practical standpoint, the choice between the costly, ordinary, and de-aliased rotational form reduces to the last one, if the final decision rests on economics.

**Key Words:** Direct numerical simulation (DNS),  $\tau$  pseudo spectral method, channel flow, aliasing errors, variable time-stepping algorithm.