مهندسی عمران شریف
دوره‌ی ۲-۲۹، شماره‌ی ۲، ص. ۶۱-۷۵

Original Article

بررسی عددی اثرات ریزساختار بر مقاومت فشاری بتن

محمدرضا یعقوبی (کارشناس ارشد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف
شریف شاه‌بیک* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس
ابوالحسن وفایی (استاد)
دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

در این تحقیق، ریزساختار بتن به کمک یک مدل اجزای محدود سه‌بعدی شبیه‌سازی شده است. این مدل دارای دو فاز ملات و سنگدانه‌های درشت است. شکل سنگدانه‌ها به‌صورت کروی و رفتار آن‌ها به‌صورت ارتجاعی خطی در نظر گرفته شده است. از منحنی دانه‌بندی فولر جهت بیان توزیع سنگدانه‌ها استفاده می‌شود. رفتار ملات در ساختار خمیری ـ خسارت[1] بیان شده است. در ابتدا، نحوه‌ی پیاده‌سازی مدل خمیری ـ خسارت ارائه و در گام بعد، صحت پیاده‌سازی مدل خمیری ـ خسارت برای یک المان بررسی می‌شود. در بخش پایانی اثر درصد حجمی سنگدانه، اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه و مدول ارتجاعی سنگدانه بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن مطالعه و نتایج با دستاوردهای سایر پژوهشگران مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: ریزساختار، مقاومت فشاری بتن، روش اجزای محدود، خمیری ـ خسارت.

mohammadreza.yaghoobi@gmail.com
shahbeyk@modares.ac.ir
vafai@sharif.edu

۱. مقدمه

ریزساختار کاملاً ناهمگن بتن موجب پیچیدگی بسیار رفتار این ماده شده است. در عمل نمی‌توان فقط با تکیه بر نتایج آزمایشگاهی، تمام ابعاد رفتاری این ماده را درک کرد. بنابراین به منظور شناخت بهتر رفتار بتن، مطالعات نظری برای تحلیل اثر اندرکنش اجزای مختلف تشکیل‌دهنده‌ی بتن (ریزساختار بتن) صورت می‌پذیرد که منجر به پیدایش روابط ساختاری بتن در بزرگ‌مقیاس می‌شود. بتن باید به‌عنوان یک ماده‌ی مرکب کامل (با همه اجزای ریزمقیاس) به گونه‌یی کامل و واقعی شبیه‌سازی شود. شبیه‌سازی‌های عددی با به‌کارگیری روش‌های تئوری و تجربی می‌تواند به‌منزله‌ی ابزاری مهم برای بررسی رفتار مواد مرکب، از جمله بتن، در نظر گرفته شود. ریزساختار بتن شامل قسمت‌های گوناگونی همانند سنگ‌دانه‌های ریز و درشت، چسب سیمانی، ناحیه‌ی فصل مشترک بین ملات و سنگدانه[2]، حفره‌ها و ریزترک‌ها است. باید توجه داشت که به دلیل تفاوت زیاد در اندازه‌ی این قسمت‌ها، ارائه‌ی مدلی جامع با امکانات موجود که اثرات همه‌ی این بخش‌ها را در نظر گیرد، کار بسیار دشواری است. به‌صورت کلی می‌توان این مدل‌ها را دست‌کم به ۳ دسته‌ی کلی تقسیم‌بندی کرد: در دسته‌ی اول، از ترکیب المان‌های متداول در اجزای محدود و المان‌های مرزی[3] استفاده می‌شود. در برخی پژوهش‌های پیشین،[1و2] بتن به‌صورت تعداد زیادی سنگدانه که در داخل ماتریس[4] (ملات) قرار گرفته‌اند، شبیه‌سازی شده است. تمامی مدل توسط المان‌های اجزای محدود تقسیم‌بندی[5] شده و در سطح مشترک بین المان‌های سنگ‌دانه‌ها با ماتریس و نیز ماتریس با ماتریس، المان‌های بدون ضخامت مکانیک شکستی به‌کار رفته است. این المان‌ها توصیف‌کننده‌ی مسیرهای احتمالی ترک هستند. در دسته‌ی دوم از سیستم‌های جایگزین برای المان‌های اجزای محدود همانند المان‌های لتیس[6]، خرپا و غیره استفاده می‌شود. در سال ۱۹۹۰، نیز یک مدل خرپا برای شبیه‌سازی پدیده‌ی گسترش ترک ایجاد شد.[3] مدل لتیس پیشنهادی نیز روشی مطمئن برای شبیه‌سازی سازوکار گسیختگی و الگوی گسترش ترک در بتن است.[4] در سال ۲۰۰۳ نیز بر مبنای تئوری ریزصفحات[7] یک مدل لتیس با درنظرگرفتن اثرات محصورشدگی ارائه شد.[5] در دسته‌ی سوم، پژوهشگران از اجزای محدود برای شبیه‌سازی تمامی ریزساختار بتن استفاده می‌کنند. این روش اولین بار درسال ۱۹۸۶ مورد استفاده قرار گرفته است.[6]

نوع دیگری از تقسیم‌بندی مدل‌های به‌کاررفته جهت شبیه‌سازی ریزساختار بتن، براساس درنظرگرفتن (و یا نگرفتن) ناحیه‌ی فصل مشترک بین ملات و سنگدانه تعریف می‌شود. بدین ترتیب مدل‌ها به ۲ صورت سه‌فازی (ملات، سنگدانه‌های درشت، و ناحیه‌ی فصل مشترک) و دوفازی (ملات و سنگدانه‌های درشت) تقسیم می‌شوند. مهم‌ترین مزیت درنظرگرفتن ناحیه‌ی فصل مشترک، توانایی شبیه‌سازی پدیده‌های موضعی در اطراف سنگدانه‌هاست. با توجه به آنکه ضخامت این فاز بسیار کوچک‌تر از ابعاد فازهای دیگر (ملات و سنگدانه‌های درشت) است، شبیه‌سازی

* نویسنده مسئول
تاریخ: دریافت ۱۳۸۹/۱۲/۲۴، اصلاحیه ۱۳۹۰/۹/۲۱، پذیرش ۱۳۹۰/۱۰/۳.

سه‌بعدی و سه‌فازی بتن در یک مدل و به‌صورت غیرخطی با امکانات موجود، کاری بسیار دشوار است. به همین دلیل، بیشتر مدل‌های غیرخطی سه‌فازی موجود، فقط به‌صورت دوبعدی هستند.[۷و۸] به همین سبب، شبیه‌سازی سه‌بعدی بتن به‌صورت دوفازی (به ویژه در مسائلی که خصوصیات غیرخطی بتن بررسی می‌شود) دارای محبوبیت زیادی است.[۹و۱۰]

در این تحقیق، ریزساختار بتن توسط یک مدل دوفازی سه‌بعدی اجزای محدودی شبیه‌سازی شده است. فرض می‌شود که سنگدانه‌ها به‌صورت کروی هستند. رفتار سنگدانه‌های درشت، همان‌گونه که در بیشتر تحقیقات پیشین فرض شده است،[۷و۹-۱۱] به‌صورت ارتجاعی خطی در نظر گرفته می‌شود. با توجه به آن که ملات دارای ریزساختاری مشابه بتن است (هر دو دارای سنگدانه، ملات، ناحیه‌ی فصل مشترک بین ملات و سنگدانه، ریزترک و حفره‌ها هستند)، می‌توان از روابط ساختاری بتن برای شبیه‌سازی ملات استفاده کرد. بنابراین از مدل خمیری ـ خسارت ارائه‌شده‌ی لی و فنوس[۱۲] که در سال ۲۰۰۹ اصلاح شده است،[۱۳] برای شبیه‌سازی رفتار ملات همگن شده استفاده می‌شود. در این تحقیق، ابتدا نحوه‌ی پیاده‌سازی مدل خمیری ـ خسارت لی و فنوس اصلاح‌شده توضیح داده و سپس صحت‌سنجی می‌شود. در گام دوم با تولید یک مدل سه‌بعدی دوفازی، نمونه‌های بتنی به کمک روش اجزای محدود استاندارد شبیه‌سازی می‌شوند. در گام نهایی اثر درصد حجمی سنگدانه، اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه، و مدول ارتجاعی سنگدانه بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن مطالعه و نتایج به‌دست‌آمده با مشاهدات سایر پژوهشگران مقایسه می‌شود.

۲. هندسه‌ی نمونه‌های بتنی

در بررسی ریزساختار بتن، باید کلیه‌ی مشخصات هندسی نمونه‌ها، شامل شکل نمونه‌های بتنی، اندازه‌ی نمونه‌ها، هندسه‌ی سنگدانه‌ها، و توزیع سنگدانه‌ها به‌دقت شبیه‌سازی شوند. در کاربردهای عملی، هر دو نمونه‌ی استوانه‌یی و مکعبی جهت انجام آزمایش بر روی بتن به‌کار می‌روند. در این تحقیق از نمونه‌های مکعبی استفاده شده است. به‌منظور حذف اثرات تصادفی ریزساختار بر نتایج، کمینه‌ی اندازه‌ی نمونه‌های مکعبی باید براساس مفهوم RVE [۸] انتخاب شوند. در این تحقیق نمونه‌ی مکعبی ۸۰ میلی‌متری به‌عنوان حجم مشخصه انتخاب شده است.

از دیدگاه محاسباتی، شبیه‌سازی تمامی سنگدانه‌ها (با هر اندازه‌یی) ناممکن است. به سبب آن‌که بسیاری از استانداردها از الک شماره‌ی ۴ (با قطر سوراخ‌های برابر ۴٫۷۵ میلی‌متر) به‌منزله‌ی مرز بین سنگدانه‌های درشت و ریز استفاده می‌کنند، این اندازه به‌صورت معمول به‌عنوان حد پایین اندازه‌ی سنگدانه‌ها منظور می‌شود.[۱۴-۱۶] به‌عبارت دیگر، سنگدانه‌های با قطر کوچک‌تر از ۴٫۷۵ میلی‌متر به‌عنوان قسمتی از فاز ملات همگن‌شده در نظر گرفته می‌شوند. حد بالای اندازه‌ی سنگدانه در این تحقیق ۱۹ میلی‌متر فرض شده است. باید توجه کرد که در این تحقیق منظور از درصد حجمی سنگدانه‌ها، درصد حجمی سنگدانه‌های درشت (با قطر بزرگ‌تر از ۴٫۷۵ میلی‌متر) و منظور از درصد حجمی کل سنگدانه‌ها، درصد حجمی کل سنگدانه‌های ریز و درشت است.

به منظور سهولت انجام عملیات جای‌گذاری سنگدانه‌ها در فضا، سنگدانه‌ها به‌صورت کروی فرض می‌شوند. در میان همه‌ی روش‌های موجود برای چیدن سنگدانه‌ها در فضا از روش SSI [۹] استفاده شده است.[۱۷] در این روش کره‌هایی با اندازه‌ی تصادفی به‌صورت پشت سر هم ایجاد می‌شوند و به‌صورت تصادفی در قسمتی از فضا قرار می‌گیرند. اگر این کره‌ها خارج از محدوده‌ی نمونه قرار گیرند و یا با کره‌های قبلی تداخل داشته باشند، پذیرفته نمی‌شوند. این عملیات تا آنجا ادامه می‌یابد که نمونه با درصد حجمی سنگدانه‌ی موردنظر پر شود. باید توجه کرد که اندازه‌ی سنگدانه‌ها باید از یک منحنی دانه‌بندی تبعیت کند. در این تحقیق از منحنی دانه‌بندی فولر استفاده شده است. این منحنی بااستفاده از رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود:

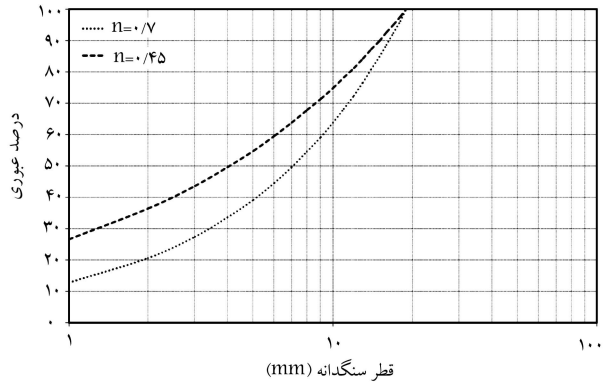
$$P(d) = ۱۰۰(\frac{d}{d_{\max}})^n \qquad (۱)$$

در این رابطه، $P(d)$ درصد تجمعی عبوری از الک با اندازه‌ی سوراخ‌های d، $d_{\max}$ اندازه‌ی قطر بزرگ‌ترین سنگدانه، و n توان معادله است (n می‌تواند در بازه‌ی ۰٫۴۵ و ۰٫۷ تغییر کند). منحنی‌های مورداستفاده در این تحقیق بین دو منحنی که با دو مقدار حدی n رسم شده‌اند، قرار می‌گیرند (شکل ۱).

برای بررسی اثرات درصد حجمی سنگدانه‌ها بر مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن، ۴ نمونه‌ی مکعبی با اندازه‌ی ۸۰ میلی‌متر ایجاد شده است که درصد حجمی سنگدانه‌ی متفاوتی دارند (جدول ۱).

هندسه‌ی این نمونه‌ها در شکل ۲ نمایش داده شده‌اند. بارگذاری نمونه‌های بتنی از نوع اعمال تغییرمکان است. علت اعمال تغییرمکان‌ها بر روی نمونه‌ی بتنی، مشاهده‌ی اثر نرم‌شدگی در راستای بارگذاری است.

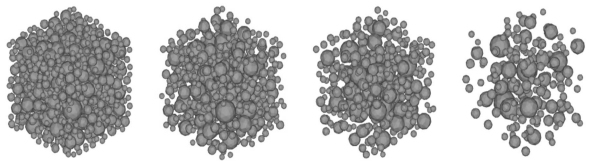
به‌منظور بررسی اثر اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه در مقاومت بیشینه‌ی آن، سه نمونه‌ی بتنی با درصد حجمی ۱۵٪ سنگدانه با بزرگ‌ترین اندازه‌ی ۸، ۱۵ و ۱۹ میلی‌متر بررسی شده است(شکل ۳). تعداد دانه‌ها در این نمونه‌ها به‌ترتیب برابر ۶۶۸، ۳۲۳ و ۲۴۲ است. منحنی دانه‌بندی این نمونه‌ها نیز از رابطه‌ی ۱ مشخص می‌شود.



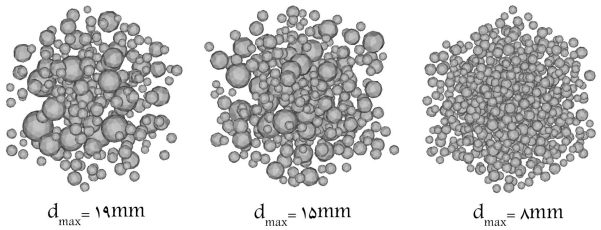
شکل ۱. منحنی دانه‌بندی استفاده‌شده برای سنگدانه‌ها (۰٫۷ و n =۰٫۴۵).

جدول ۱. مشخصات نمونه‌های بتنی برای بررسی اثرات درصد حجمی سنگدانه‌ها در مقاومت فشاری مشخصه بتن.

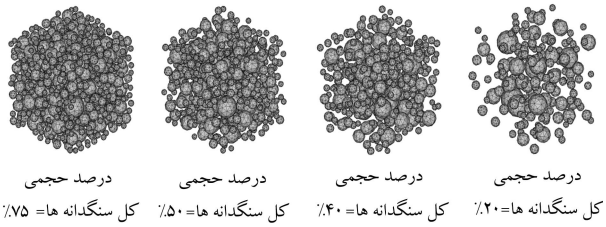
شماره‌ی نمونه	درصد حجمی سنگدانه‌ها	درصد حجمی کل سنگدانه‌ها	تعداد دانه‌ها
۱	۱۱	۲۰	۱۷۹
۲	۲۲	۴۰	۳۶۹
۳	۲۷	۵۰	۵۰۹
۴	۴۱	۷۵	۸۷۸



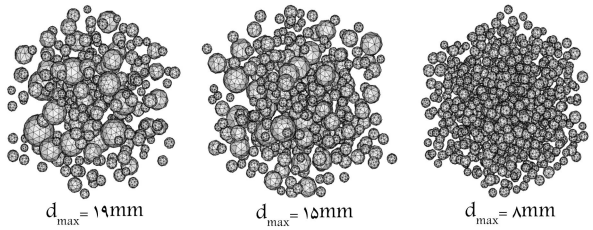
شکل ۲. هندسه‌ی نمونه‌های بتنی دارای مقادیر مختلف درصد حجمی سنگدانه.



شکل ۳. هندسه‌ی نمونه‌های بتنی دارای مقادیر مختلف بزرگ‌ترین سنگدانه.



شکل ۴. شبکه‌بندی نمونه‌های بتنی دارای مقادیر مختلف درصد حجمی سنگدانه.



شکل ۵. شبکه‌بندی نمونه‌های بتنی دارای مقادیر مختلف بزرگ‌ترین سنگدانه.

۳. مدل اجزای محدود

در این تحقیق، برای هر یک از نمونه‌های بتنی یک شبکه‌بندی ایجاد شده است که در تمام آن‌ها از المان‌های ۴ گره‌یی هرمی استفاده شده است. شکل‌های ۴ و ۵ المان‌بندی ایجادشده برای نمونه‌های مختلف بتنی را نمایش می‌دهند. اطلاعات اجزای محدود این دو نمونه در جدول‌های ۲ و ۳ ارائه شده‌اند. جهت انجام تحلیل‌ها از یک رایانه با پردازنده‌ی اینتل ۸۴۰۰ دوهسته‌یی دارای ۳ گیگابایت حافظه استفاده شده است.

۴. مدل رفتاری ریزساختار

در این تحقیق، رفتار سنگدانه‌های درشت به‌صورت ارتجاعی خطی در نظرگرفته شده است. مدول ارتجاعی سنگدانه برابر ۵۰ گیگاپاسکال و ضریب پواسون آن برابر ۰٫۱۷ قرار داده شده است. با توجه به آن که ملات دارای ریزساختاری مشابه بتن است (هر دو دارای سنگدانه، ملات، ناحیه‌ی فصل مشترک بین ملات و سنگدانه،

جدول ۲. اطلاعات اجزای محدود نمونه‌های بتنی جهت بررسی اثرات درصد حجمی سنگدانه‌ها در مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن.

شماره‌ی نمونه	تعداد المان‌ها	تعداد گره‌ها
۱	۲۴۸۹۲۸	۴۲۹۲۵
۲	۲۹۶۹۶۶	۵۱۱۹۳
۳	۳۳۸۰۹۰	۵۸۳۰۵
۴	۴۲۰۱۳۷	۷۲۶۸۵

جدول ۳. اطلاعات اجزای محدود نمونه‌های بتنی جهت بررسی اثر اندازه بزرگترین سنگدانه در مقاومت فشاری مشخصه بتن.

اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه	تعداد المان‌ها	تعداد گره‌ها
۸	۶۲۲۸۶۵	۱۰۵۲۹۶
۱۵	۳۲۵۷۸۵	۵۵۸۵۳
۱۹	۲۶۲۹۲۰	۴۵۳۱۹

ریزترک، و حفره‌ها هستند)، می‌توان از روابط ساختاری بتن برای شبیه‌سازی ملات استفاده کرد. بنابراین مدل خمیری ـ خسارت لی و فنوس[۱۲] که درسال ۲۰۰۹ [۱۳] اصلاح شده است، جهت بیان رفتار ملات همگن‌شده استفاده می‌شود. باید توجه داشت که این اصلاحات مبانی مدل لی و فنوس را تغییر نمی‌دهند.

در مدل رفتاری لی و فنوس اصلاح‌شده، برای نمایش وضعیت خرابی در ماده ۲ متغیر اسکالر کششی و فشاری به‌کار می‌رود. سطح تسلیم در این مدل براساس رابطه‌ی ارائه‌شده توسط لوبلینر و همکارانش[۱۸] بیان شده است. روابط ساختاری ارتجاعی ـ خمیری از روابط خرابی مجزا شده‌اند. سطح تسلیم در فضای تنش مؤثر ($\bar{\boldsymbol{\sigma}}$) تعریف می‌شود. هر چند در این مدل خرابی همسان‌گرد است، اما برای متغیر فشاری و کششی خرابی، دو مسیر رشد جداگانه فرض می‌شود. این روش بر مبنای تئوری تغییرشکل‌های کوچک ارائه‌شده است که برای شبیه‌سازی بتن کفایت می‌کند.

خرابی کششی و فشاری به‌ترتیب با دو متغیرکرنش خمیری معادل کششی $\tilde{\varepsilon}_t^p$ و فشاری کنترل می‌شوند. مقادیر $\tilde{\varepsilon}_t^p$ و $\tilde{\varepsilon}_c^p$ با استفاده از رابطه‌ی ۲ تعریف می‌شوند.

$$\tilde{\varepsilon}_{c,t}^p = \int_0^t \dot{\tilde{\varepsilon}}_{c,t}^p dt \qquad (۲)$$

که در آن:

$$\dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p = \begin{bmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}}_t^p \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}_c^p \end{bmatrix} = \mathbf{h} \cdot \dot{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}^p \qquad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} r\left(\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 + r\left(\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) \end{bmatrix}$$

$$r\left(\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) = \frac{\sum_{i=1}^{3} \left\langle \hat{\bar{\sigma}}_i \right\rangle}{\sum_{i=1}^{3} \left| \hat{\bar{\sigma}}_i \right|} \qquad (۳)$$

در رابطه‌ی ۳، $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^p$ و $\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ به ترتیب ماتریس مقادیر ویژه‌ی نرخ کرنش خمیری و تنش هستند. $\langle x \rangle$ براکت ماکولی است که به‌صورت رابطه‌ی ۴ تعریف می‌شود:

$$\langle x \rangle = (|x| + x)/2 \qquad (۴)$$

معادله‌ی سطح تسلیم در فضای تنش مؤثر بیان می‌شود. با توجه به اسکالربودن خرابی، رابطه‌ی بین تنش مؤثر ($\bar{\boldsymbol{\sigma}}$) و تنش ($\boldsymbol{\sigma}$) به‌صورت رابطه‌ی ۵ است:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_0 : (\boldsymbol{\varepsilon} - \boldsymbol{\varepsilon}^p) = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{1 - d} \qquad (۵)$$

در این رابطه، $\mathbf{E}_0$، ε و ε^p به ترتیب تانسور سختی ارتجاعی اولیه، کرنش، و کرنش خمیری و d متغیر اسکالر خرابی است. متغیر d براساس دو متغیر خرابی تک‌محوره‌ی کششی d_t و فشاری d_c تعیین می‌شود (رابطه‌ی ۶).

$$d = 1 - \left[1 - d_c\left(\tilde{\varepsilon}_c^p\right)\right]\left[1 - r\left(\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}\right) d_t\left(\tilde{\varepsilon}_t^p\right)\right] \qquad (6)$$

تابع تسلیم مدل لی و فنوس اصلاح‌شده به‌صورت رابطه‌ی ۷ بیان می‌شود:[۱۳]

$$F\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right) = \frac{1}{1-\alpha}\left[\alpha \bar{I}_1 + \sqrt{3\bar{J}_2} + \beta\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right)\left\langle \hat{\bar{\sigma}}_{\max}\right\rangle - \gamma\left\langle -\hat{\bar{\sigma}}_{\max}\right\rangle\right] - c_c\left(\tilde{\varepsilon}_c^p\right) \qquad (7)$$

با درنظرگرفتن تنش تسلیم اولیه در حالت تک‌محوری فشاری f_{c0} و دومحوری فشاری f_{b0}، ثابت α از رابطه‌ی ۸ به‌دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{f_{b0} - f_{c0}}{2f_{b0} - f_{c0}} \qquad (8)$$

γ ثابت مدل است که از رابطه‌ی ۹ به‌دست می‌آید:

$$\gamma = \frac{3\left(1 - K_c\right)}{2K_c - 1} \qquad 0/5 < K_c \leq 1/0 \qquad (9)$$

اگر در هنگام تسلیم اولیه $\hat{\bar{\sigma}}_{\max} < 0$ و $\left(\sqrt{\bar{J}_2}\right)_{TM} < \left(\sqrt{\bar{J}_2}\right)_{CM}$ در نصف‌النهار کششی توسط K_c و در نصف النهار فشاری توسط $\left(\sqrt{\bar{J}_2}\right)_{CM}$ نمایش داده شود، در هر مقدار $\bar{I}_1$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ محاسبه می‌شود:[۱۸]

$$K_c = \frac{\left(\sqrt{\bar{J}_2}\right)_{TM}}{\left(\sqrt{\bar{J}_2}\right)_{CM}} \qquad (10)$$

$\bar{I}_1$ نامتغیر اول تانسور تنش مؤثر و $\bar{J}_2$ نامتغیر دوم تانسور تنش انحرافی مؤثر، و $\hat{\bar{\sigma}}_{\max}$ بزرگ‌ترین مقدار تنش اصلی مؤثر است. $\beta(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p)$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:

$$\beta\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^p\right) = \frac{\bar{\sigma}_c\left(\tilde{\varepsilon}_c^p\right)}{\bar{\sigma}_t\left(\tilde{\varepsilon}_t^p\right)}\left(1 - \alpha\right) - \left(1 + \alpha\right) \qquad (11)$$

در این رابطه، $\bar{\sigma}_c(\tilde{\varepsilon}_c^p)$ و $\bar{\sigma}_t(\tilde{\varepsilon}_t^p)$ به‌ترتیب برابر مقاومت کششی و فشاری مؤثر هستند که مقدار آن‌ها همواره مثبت است. در این مدل از تابع جریان غیروابسته[۱۰] استفاده شده است که به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ تعریف می‌شود:

$$\phi = \sqrt{3\bar{J}_2} + \alpha_p \frac{\bar{I}_1}{3} \qquad (12)$$

ثابت α_p باید به گونه‌یی انتخاب شود تا رفتار اتساعی[۱۱] مناسب به‌دست آید. با توجه به رابطه‌ی ۱۲، مقدار تانسور نرخ کرنش خمیری به‌صورت رابطه‌ی ۱۳ تعریف می‌شود:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\Upsilon}\frac{\partial \phi}{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}} = \dot{\Upsilon}\left(\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{\bar{\boldsymbol{s}}}{\|\bar{\boldsymbol{s}}\|} + \frac{\alpha_p \mathbf{I}}{3}\right) \qquad (13)$$

نحوه‌ی پیاده‌سازی این مدل خمیری ـخسارت در بخش پنجم ارائه شده است.

۵. پیاده‌سازی عددی

پیاده‌سازی مدل خمیری ـخسارت بتن براساس روش ارائه‌شده‌ی لی و فنوس[۱۹] انجام شده است. لی و فنوس[۱۹] یک الگوریتم نگاشت بازگردانده[۱۲] برای طیف گسترده‌یی از مدل‌های خمیری ـخسارت ارائه کرده‌اند. این روش برای محدوده‌ی کرنش‌های کوچک ارائه شده است. در این روش از تنش‌های اصلی برای روش‌های تکراری محاسبه‌ی متغیرهای داخلی مدل‌های خمیری ـخسارت استفاده می‌شود. بنابراین، در مدل‌هایی که در آن‌ها از تنش‌های اصلی استفاده شده است، دیگر نیازی نیست که مقادیر ویژه در هر تکرار محاسبه شوند. با استفاده از این روش، روابط موردنیاز جهت پیاده‌سازی عددی، برای مدل اصلاح‌شده‌ی لی و فنوس به‌دست می‌آیند. با استخراج این روابط، مدل خمیری ـخسارت بتن در یک نرم‌افزار اجزای محدودی پیاده‌سازی می‌شود. در قسمت بعد، نتایج به‌دست‌آمده برای یک المان در حالت‌های بارگذاری متفاوت با نتایج به‌دست آمده از نرم‌افزار آباکوس[۱۳] مقایسه می‌شوند.

۱.۵. مجزاکردن زمانی[۱۴] مدل خمیری ـخسارت

مراحل مجزاکردن زمانی و انتگرال‌گیری عددی در این بخش ارائه می‌شوند. اگر از روش کلی نقطه‌ی میانی[۱۵] و حالت غیرخطی روش α [۲۰] جهت انتگرال‌گیری معادله‌ی حرکت درگام زمانی t_{n+1} استفاده شود، نیروی داخلی $\mathbf{P}$ به‌عنوان تابعی از مقدار تغییرمکان $\mathbf{u}_{n+\varphi}$ بیان می‌شود.[۲۱]

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{u}}_{n+1} + \mathbf{P}(\mathbf{u}_{n+\varphi}) = \mathbf{F}_{n+\varphi} \qquad (14)$$

در این رابطه، $\ddot{\boldsymbol{u}}$ شتاب، $\mathbf{M}$ جرم، F نیروی خارجی، $0 < \varphi \leq 1$ و مقادیر میانی تغییرمکان و بار خارجی از رابطه‌ی ۱۵ تعیین می‌شوند:

$$\begin{aligned}\mathbf{u}_{n+\varphi} &= (1-\varphi)\,\mathbf{u}_n + \varphi \mathbf{u}_{n+1}\\ \mathbf{F}_{n+\varphi} &= (1-\varphi)\,\mathbf{F}_n + \varphi \mathbf{F}_{n+1}\end{aligned} \qquad (15)$$

میدان‌های سرعت و شتاب را می‌توان با استفاده از روابط نیومارک محاسبه کرد.

به‌دلیل آن که $\mathbf{P}$ در روش‌های اجزای محدود از میدان تنش محاسبه می‌شود، مسئله‌ی محاسبه‌ی تنش (لی و فنوس[۱۹]) به این صورت مطرح می‌شود.

برای مجموعه‌ی متغیرهای داده شده‌ی $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}_n^p, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_n^p\}$ در حالی‌که $\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi} = \nabla^{(s)}\mathbf{u}_{n+\varphi}$، مجموعه‌ی متغیرهای $\{\boldsymbol{\sigma}_{n+\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}_{n+1}^p\}$ باید محاسبه شوند. با توجه به رابطه‌ی ۵، تنش درگام $t_{n+\varphi}$ به‌صورت رابطه‌ی ۱۶ بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+\varphi} = \bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\varphi}\left(1 - d_{n+\varphi}\right) \qquad (16)$$

و تنش مؤثر به‌صورت رابطه‌ی ۱۷ بازنویسی می‌شود:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\varphi} =& \mathbf{E}_0 : \left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi}^p\right) = 2G\left(\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi} - \boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi}^p\right)\\ &+ \lambda\left(\theta_{n+\varphi} - \theta_{n+\varphi}^p\right)\mathbf{I}\end{aligned} \qquad (17)$$

در این رابطه، G مدول برشی و λ ثابت لمه[۱۶]، $\theta = tr\,\boldsymbol{\varepsilon}$ و $\mathbf{I}$ نشانگر تانسور یکه‌ی درجه‌ی دو است. با توجه به رابطه‌ی ۱۵، مقدار میانی کرنش خمیری از رابطه‌ی ۱۸ به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi}^p = (1-\varphi)\,\boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \varphi \boldsymbol{\varepsilon}_{n+1}^p = \boldsymbol{\varepsilon}_n^p + \varphi\left(\Delta \boldsymbol{\varepsilon}^p\right) \qquad (18)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۸ در رابطه‌ی ۱۷، رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\varphi} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+\varphi} - \varphi \mathbf{E}_{\circ} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+\varphi} - \varphi \left(2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} + \bar{\lambda}\,\Delta\bar{\theta}^{p}\mathbf{I} \right) \tag{۱۹}$$

در حالت سه‌بعدی و یا کرنش صفحه‌یی $\bar{\lambda} = \lambda$ و $\Delta\bar{\theta}^{p} = \Delta\theta^{p}$ می‌شود. در رابطه‌ی ۱۹، تنش آزمون[۱۷] به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ بیان می‌شود:

$$\boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+\varphi} = \mathbf{E}_{\circ} : (\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi} - \boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n}) \tag{۲۰}$$

با توجه به رابطه‌های ۱۶ الی ۲۰، محاسبه‌ی تنش را می‌توان در ۳ گام اساسی: پیش‌بینی ارتجاعی ($\boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+\varphi}$)، اصلاح خمیری ($-\varphi\mathbf{E}_{\circ} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$)، و اصلاح خرابی ($-d_{n+\varphi}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\varphi}$) نمایش داد. به دلیل آن که $d_{n+\varphi}$ تابعی از $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+\phi}$ و $\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_{n+\varphi}$ است که به‌طورکامل در مرحله‌ی اصلاح خمیری تعیین می‌شوند، اصلاح خرابی به‌صورت جداگانه از اصلاح خمیری انجام می‌پذیرد. برای محاسبه‌ی $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ در معادله‌ی ۱۸، از نرخ کرنش خمیری در معادله‌ی ۱۳، با استفاده از روش کلی نقطه ـمیانی، انتگرال‌گیری می‌شود (رابطه‌ی ۲۱).

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \Delta\Upsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+\varphi}} \tag{۲۱}$$

با توجه به رابطه‌ی ۱۸، مقدارکرنش خمیری در انتهای گام زمانی ($\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n+1}$) به‌صورت رابطه‌ی ۲۲ به‌دست می‌آید:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n+1} = \boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n+\varphi} + (1-\varphi)\,\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} \tag{۲۲}$$

به‌صورت مشابه، با استفاده از روش کلی نقطه ـمیانی و استفاده از رابطه‌ی ۳، $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+\phi}$ محاسبه می‌شود.

با توجه به آن که روش کلی نقطه ـمیانی برای حل معادله‌ی حرکت و مسئله‌ی محاسبه‌ی تنش بدون نقص نیست، از روش جابجاشده‌ی پس‌رونده‌ی اولر[۱۸] برای حل مسئله‌ی محاسبه‌ی تنش استفاده می‌شود.[۲۱] در این روش، به جای آن که کرنش خمیری و متغیرهای داخلی دیگر در زمان t_{n+1} محاسبه شوند، در $t_{n+\varphi}$ محاسبه می‌شوند. بنابراین، روش جابجاشده‌ی پس‌رونده‌ی اولر در بازه‌ی زمانی $[t_{n+\varphi-1}, t_{n+\varphi}]$ تبدیل به یک روش اصلی پس‌رونده‌ی اولر می‌شود که مسئله‌ی محاسبه‌ی تنش در آن به این صورت مطرح می‌شود:

برای مجموعه‌ی متغیرهای داده‌شده‌ی $\{\boldsymbol{\varepsilon}_{n+\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n+\varphi-1}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+\varphi-1}\}$، مجموعه‌ی متغیرهای $\{\boldsymbol{\sigma}_{n+\varphi}, \boldsymbol{\varepsilon}^{p}_{n+\varphi}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+\varphi}\}$ باید محاسبه شوند. به دلیل آن که روش پس‌رونده‌ی اولر در حل مسائل غیرخطی بدون هیچ قیدی پایدار است،[۲۲] و آن که هیچ تفاوت پایه‌یی بین روش‌های اصلی و جابجاشده‌ی پس‌رونده‌ی اولر نیست، انتظار می‌رود که روش جابجاشده‌ی پس‌رونده‌ی اولر نیز بدون هیچ قیدی پایدار باشد. جهت سهولت در استخراج روابط، از نحوه‌ی نگارش روش اصلی پس‌رونده‌ی اولر ($\varphi = 1$) برای هر دو روش اصلی و جابجاشده استفاده شده است. برای مثال، $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ بازنویسی می‌شود:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \Delta\Upsilon \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \tag{۲۳}$$

تنش مؤثر از رابطه‌ی ۲۴ به دست می‌آید:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+1} - \left(2G\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} + \bar{\lambda}\,\Delta\bar{\theta}^{p}\mathbf{I} \right) \tag{۲۴}$$

و با توجه به رابطه‌های ۱۳ و ۲۳، $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p}$ و $\Delta\theta^{p}$ به‌صورت رابطه‌ی ۲۵ تعیین می‌شوند:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{p} = \Delta\Upsilon \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\mathbf{s}}_{n+1}}{\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\|} + \frac{\alpha_p \mathbf{I}}{3} \right)$$
$$\Delta\bar{\theta}^{p} = \Delta\Upsilon\alpha_p \tag{۲۵}$$

در حالت سه‌بعدی و یا کرنش صفحه‌یی $\bar{\lambda} = \lambda$ و $\Delta\bar{\theta}^{p} = \Delta\theta^{p}$، می‌توان رابطه‌ی ۱۹ را به‌صورت رابطه‌ی ۲۶ بازنویسی کرد:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+1} - \Delta\Upsilon \left[2G \left(\sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\bar{\mathbf{s}}_{n+1}}{\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\|} + \frac{\alpha_p \mathbf{I}}{3} \right) + \lambda\alpha_p \mathbf{I} \right] \tag{۲۶}$$

با معرفی مدول حجمی $K = \lambda + 2G/3$، رابطه‌ی ۲۷ به دست می‌آید:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}^{tr}_{n+1} - \Delta\Upsilon \left(\sqrt{6} G \frac{\bar{\mathbf{s}}_{n+1}}{\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\|} + K\alpha_p \mathbf{I} \right) \tag{۲۷}$$

و با جداسازی بخش حجمی و انحرافی رابطه‌ی ۲۷، روابط ۲۸ به‌دست می‌آیند:

$$\frac{\bar{\mathbf{s}}_{n+1}}{\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\|} = \frac{\mathbf{s}^{tr}_{n+1}}{\|\mathbf{s}^{tr}_{n+1}\|}$$
$$\left(\bar{I}_1\right)_{n+1} = \left(I_1^{tr}\right)_{n+1} - 3K\Delta\Upsilon\alpha_p$$
$$\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\| = \|\mathbf{s}^{\,tr}_{n+1}\| - \sqrt{6} G\Delta\Upsilon \tag{۲۸}$$

در روابط ۲۸، $\mathbf{s}^{tr}$ و I_1^{tr} به ترتیب نمایانگر بخش انحرافی و نامتغیر اول تانسور تنش آزمون هستند. باید توجه داشت که روابط ۲۸ برای مسائل تنش صفحه‌یی معتبر نیست. با تکرار روندی که در پژوهش‌های پیشین[۲۳] توضیح داده شده است، مقادیر اصلی تنش مؤثر در گام جدید به‌صورت رابطه‌ی ۲۹ محاسبه می‌شوند:

$$\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_{n+1} = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^{tr}_{n+1} - \Delta\Upsilon \left[\frac{\sqrt{6} G \hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{tr}_{n+1}}{\|\mathbf{s}^{tr}_{n+1}\|} - \left(\sqrt{\frac{2}{3}} \frac{G\, I_1^{tr}}{\|\mathbf{s}^{tr}_{n+1}\|} - K\alpha_p \right) \mathbf{I} \right] \tag{۲۹}$$

۲.۵. خطی‌سازی[۱۹] معادله‌ی تغییرات متغیر سخت‌شوندگی

حالت مجزاشده‌ی رابطه‌ی تغییرات خرابی (رابطه‌ی ۳) به‌صورت روابط ۳۰ بازنویسی می‌شود:

$$\Delta\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} = \Delta\Upsilon \mathbf{H} \left(\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1} \right) \;\rightarrow\; \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1} = \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n} + \Delta\Upsilon \mathbf{H} \left(\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1} \right) \tag{۳۰}$$

در این رابطه، $\mathbf{H} = \mathbf{h}\cdot\boldsymbol{\nabla}_{\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}}\boldsymbol{\phi}$ متغیر سخت‌شوندگی $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$، طی یک عملیات تکراری و از حل یک معادله‌ی غیرخطی (رابطه‌ی ۳۰) که تابعی از $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$، $\Delta\Upsilon$ و $\hat{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}$ است، محاسبه می‌شود. در طول این عملیات تکراری، حالت مجزای شرط سازگاری خمیری[۲۰] به‌عنوان یک قید اعمال می‌شود (رابطه‌ی ۳۱):

$$F\left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}, \tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1} \right) = 0 \tag{۳۱}$$

جهت پیشگیری از پیچیدگی‌های نگارشی در روابط، از Υ به جای $\Delta\Upsilon$ استفاده شده است. به دلیل آن که رابطه‌ی ۳۰ یک معادله‌ی غیرخطی است، برای محاسبه‌ی Υ و $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}$ تنش مؤثر، یک عملیات تکراری باید انجام شود. روش نیوتون ـرافسن

به‌عنوان روش حل این معادله‌ی غیرخطی استفاده شده است. باقیمانده‌ی معادله‌ی ۳۰، $\mathbf{Q}$، از رابطه‌ی ۳۲ تعیین می‌شود:

$$\mathbf{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1},\Upsilon_{n+1}\right)=-\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}+\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n}+\Upsilon_{n+1}\mathbf{H}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}\right) \quad (۳۲)$$

عملیات تکراری بر روی متغیر $\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}$ از طریق روش نیوتون ـرافسن صورت می‌پذیرد. برای این منظور ابتدا باید ماتریس ژاکوبین، $\mathbf{K}$، محاسبه شود (رابطه‌ی ۳۳):

$$\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1},\Upsilon_{n+1}\right)=\frac{d\,\mathbf{Q}}{d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}} \quad (۳۳)$$

برای محاسبه‌ی $\mathbf{K}$، ابتدا $d\mathbf{Q}$ محاسبه می‌شود (رابطه‌ی ۳۴):

$$d\,\mathbf{Q}=\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}+\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}d\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\Upsilon_{n+1}}d\,\Upsilon_{n+1} \quad (۳۴)$$

رابطه‌ی ۳۴ را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۳۵ بازنویسی کرد:

$$d\mathbf{Q}=\left(\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}+\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}+\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\Upsilon_{n+1}}\frac{d\,\Upsilon_{n+1}}{d\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}\right)d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1} \quad (۳۵)$$

ماتریس ژاکوبین نیز از رابطه‌ی ۳۶ محاسبه می‌شود:

$$\mathbf{K}=\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}+\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}+\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\Upsilon_{n+1}}\frac{d\,\Upsilon_{n+1}}{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}\frac{d\,\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}} \quad (۳۶)$$

مشتقات موجود در رابطه‌ی ۳۶ عبارت‌اند از (رابطه‌های ۳۷ الی ۴۱):

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}=\Upsilon_{n+1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}-\mathbf{I} \quad (۳۷)$$

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}=\Upsilon_{n+1}\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}} \quad (۳۸)$$

$$\frac{\partial\mathbf{Q}}{\partial\Upsilon_{n+1}}=\mathbf{H} \quad (۳۹)$$

$$d\hat{F}=\nabla_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}\hat{F}\,d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}+\nabla_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}}\hat{F}\,d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}=0\;\rightarrow\;\frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}}=-\frac{\nabla_{\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}}\hat{F}}{\nabla_{\hat{\boldsymbol{\sigma}}}\hat{F}} \quad (۴۰)$$

$$\frac{d\Upsilon_{n+1}}{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}=\frac{1}{\frac{d\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1}}{d\Upsilon_{n+1}}} \quad (۴۱)$$

پس از محاسبه‌ی $\mathbf{Q}$ و $\mathbf{K}$، متغیر سخت‌شوندگی به‌صورت رابطه‌ی ۴۲ اصلاح می‌شود:

$$\delta\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}=-\left[\mathbf{K}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1},\Upsilon_{n+1}\right)\right]^{-1}\mathbf{Q}\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1},\Upsilon_{n+1}\right)$$
$$\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p(j+1)}_{n+1}=\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p(j)}_{n+1}+\delta\,\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p} \quad (۴۲)$$

۳.۵. محاسبه‌ی تنش برای حالت سه‌بعدی و یا کرنش صفحه‌یی

با توجه به آن که رابطه‌ی ۲۸ برای حالت‌های سه‌بعدی و یا کرنش صفحه‌یی معتبر است، با استفاده از حالت طیفی[۲۱] تنش مؤثر اصلی در رابطه‌ی ۲۹، در مسائل سه‌بعدی و یا کرنش صفحه‌یی یک رابطه‌ی نگاشت بازگرداننده صریح برای محاسبه‌ی Υ به‌دست می‌آید. در نتیجه، در حالت سه‌بعدی و یا کرنش صفحه‌یی، یگانه متغیری است که در حل معادله‌ی غیرخطی باید عملیات تکرار بر روی آن انجام شود.

برای یک متغیر سخت‌شوندگی مفروض، تنش مؤثر به گونه‌یی محاسبه می‌شود که شرط سازگاری خمیری ۳۱ را ارضا کند. حالت مجزاشده‌ی تابع تسلیم (رابطه‌ی ۷) به‌صورت رابطه‌ی ۴۳ بیان می‌شود:

$$F\left(\hat{\boldsymbol{\sigma}}_{n+1},\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}\right)=\alpha\left(\bar{I}_{1}\right)_{n+1}+\sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\bar{\mathbf{s}}_{n+1}\right\|+\left[\beta\left(\tilde{\boldsymbol{\varepsilon}}^{p}_{n+1}\right)H\left(\hat{\bar{\sigma}}_{\max}\right)+\gamma H\left(-\hat{\bar{\sigma}}_{\max}\right)\right]\left(\hat{\bar{\sigma}}_{\max}\right)_{n+1}-\left(1-\alpha\right)\left(c_{c}\right)_{n+1} \quad (۴۳)$$

در این رابطه H تابع هویساید[۲۲] است. با جای‌گذاری روابط ۲۸ و ۲۹ در رابطه‌ی ۴۳، مقدار Υ به‌صورت رابطه‌ی ۴۴ تعیین می‌شود:

$$\Upsilon=\frac{\alpha\left(I^{tr}_{1}\right)_{n+1}+\sqrt{\frac{3}{2}}\left\|\mathbf{s}^{tr}_{n+1}\right\|+\left(\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)\left(\hat{\sigma}^{tr}_{\max}\right)_{n+1}-\left(1-\alpha\right)\left(c_{c}\right)_{n+1}}{3K\alpha_{p}\alpha+3G+\left(\bar{\beta}+\bar{\gamma}\right)\left[\frac{\sqrt{6}G\left(\hat{\sigma}^{tr}_{\max}\right)_{n+1}}{\left\|\mathbf{s}^{tr}_{n+1}\right\|}-\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{GI^{tr}_{1}}{\left\|\mathbf{s}^{tr}_{n+1}\right\|}+K\alpha_{p}\right]} \quad (۴۴)$$

در این رابطه $\bar{\beta}=\beta_{n+1}H((\hat{\bar{\sigma}}_{\max})_{n+1})$ و $\bar{\gamma}=\gamma H((-\hat{\bar{\sigma}}_{\max})_{n+1})$. شکل ۶، فلوچارت نحوه‌ی انجام محاسبات را نمایش می‌دهد.

۶. صحت‌سنجی

در این قسمت، به‌منظور صحت‌سنجی پیاده‌سازی مدل خمیری ـخسارت در حالت سه‌بعدی، نتایج به‌دست‌آمده از برنامه‌ی تهیه‌شده و نرم‌افزار آباکوس در یک المان ۸ گره‌یی مکعبی (با ۸ نقطه‌ی گوسی) تحت بارگذاری‌های مختلف با یکدیگر مقایسه می‌شوند. خصوصیات بتن، مشابه خصوصیات تعریف‌شده در مثال دوم نوشتار لی و فنوس[۱۲] در نظرگرفته شده و به‌منظور رسم منحنی‌های تک‌محوره‌ی کششی و فشاری از روابط و مقادیر ارائه‌شده در آن نوشتار استفاده شده است (جدول ۴). در این جدول، E_{0} مدول ارتجاعی اولیه، f_{t0} و f_{c0} به‌ترتیب تنش تسلیم اولیه در حالت کششی و فشاری، f'_{c} مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن، G_{t} انرژی شکست در حالت تک‌محوری کششی و l_{t} طول مشخصه[۲۳] است. علاوه بر مشخصات ارائه‌شده که برای نمایش نمودارهای تک‌محوره موردنیاز هستند، سایر خصوصیات ماده در جدول ۵ ارائه شده‌اند.

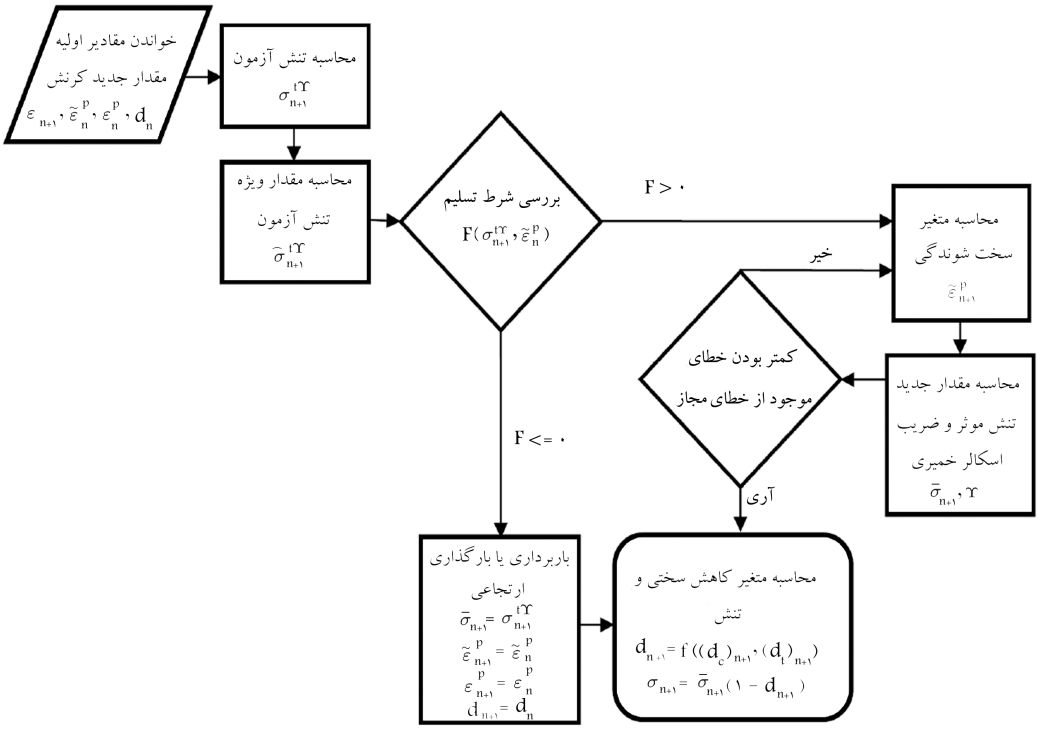
جهت مشاهده‌ی بخش نرم‌شونده (پس از مقاومت بیشینه)، بار به‌صورت تغییرمکان به المان وارد می‌شود. شکل‌های ۷ و ۸ به ترتیب منحنی تک‌محوره‌ی

جدول ۴. مشخصات بتن جهت رسم منحنی‌های تک‌محوره‌ی فشاری و کششی بتن.

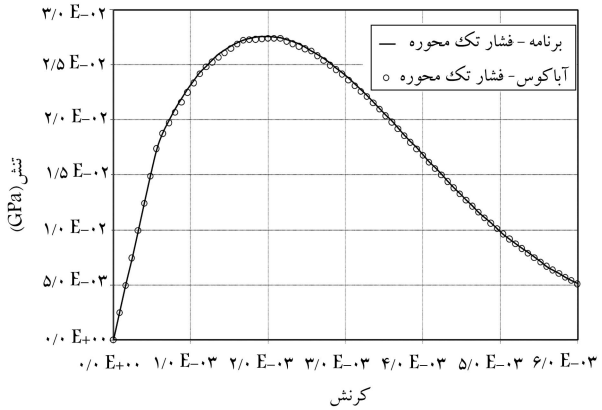
E_{0} (GPa)	f_{t0} (MPa)	f_{c0} (MPa)	f'_{c} (MPa)	G_{t} (N/m)	l_{t} (mm)
۳۱	۳٫۴۸	۱۸	۲۷٫۶	۴۰	۸۲٫۶

جدول ۵. مشخصات مکانیکی بتن.

ν	α	α_{p}	W_{t}	W_{c}	K_{c}
۰٫۱۵	۰٫۱۱	۰٫۶	۰	۱	۱



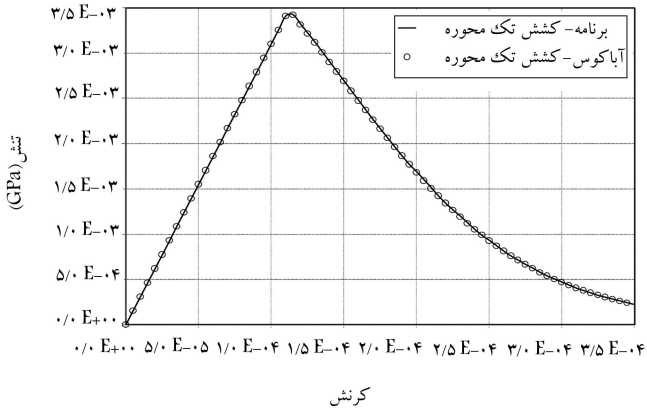
شکل ۶. فلوچارت پیاده‌سازی عددی مدل خمیری ـ خسارت.



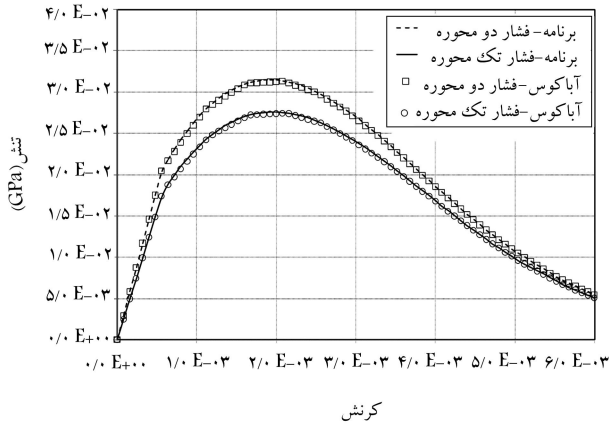
شکل ۷. منحنی تک‌محوره‌ی فشاری.

فشاری و کششی را در برنامه‌ی تهیه‌شده و آباکوس با یکدیگر مقایسه می‌کنند. در شکل‌های ۹ و ۱۰ به‌ترتیب منحنی دومحوره‌ی فشاری و کششی، با مقدار فشار و کشش یکسان در ۲ جهت بررسی شده‌اند. شکل ۱۱، منحنی سه‌محوره‌ی فشاری را مورد بررسی قرار می‌دهد که در آن المان از ۲ جهت بسته‌شده و در جهت سوم تغییرمکان محوری فشاری به آن وارد می‌شود. شکل ۱۲، شرایطی مشابه شکل ۱۱ دارد، با این تفاوت که تغییرمکان به‌صورت کششی به آن وارد می‌شود. اگر به جای $K_c = ۱$ از $K_c = ۲/۳$ استفاده کنیم، γ به جای صفر برابر ۳ می‌شود. نتایج بارگذاری سه‌محوره (محصورشده) فشاری برای این حالت در شکل ۱۳ نمایش داده شده است.

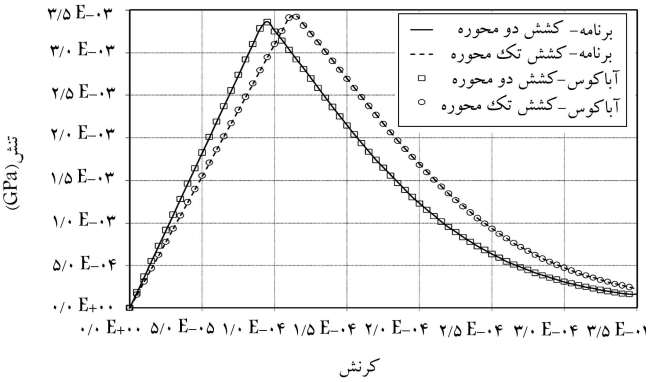
حال با توجه به آن که صحت پیاده‌سازی مدل خمیری ـ خسارت در حالت سه‌بعدی تأیید شده است، در تحلیل‌های موردنیاز از نرم‌افزار تهیه‌شده استفاده می‌شود.



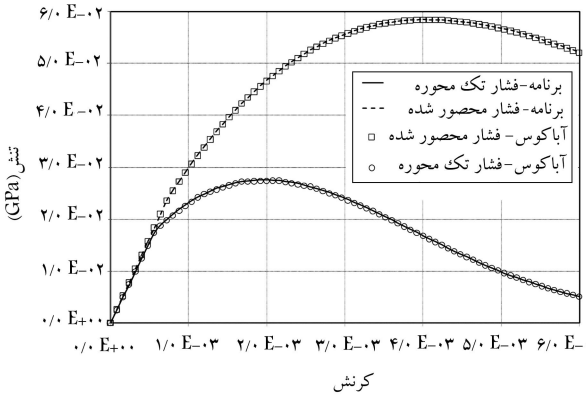
شکل ۸. منحنی تک‌محوره‌ی کششی.



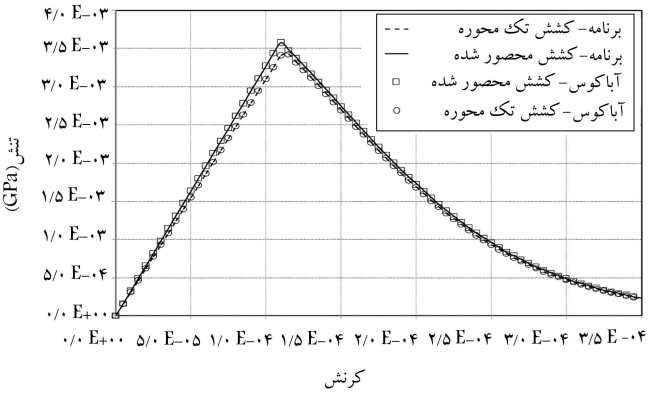
شکل ۹. منحنی دومحوره‌ی فشاری.



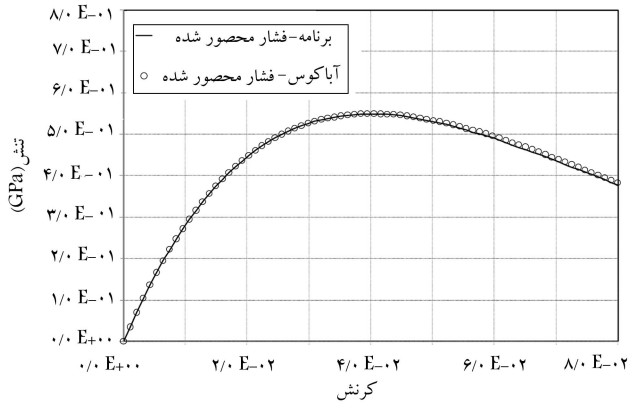
شکل ۱۰. منحنی دومحوره‌ی کششی.



شکل ۱۱. منحنی سه‌محوره‌ی (محصورشده) فشاری.



شکل ۱۲. منحنی سه‌محوره‌ی (محصورشده) کششی.



شکل ۱۳. منحنی سه‌محوره‌ی (محصورشده) فشاری برای $K_c = ۲/۳$.

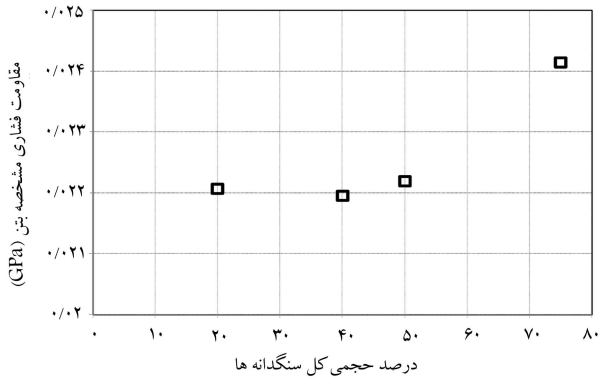
۷. نتایج

۱.۷. اثر درصد حجمی کل سنگدانه‌ها بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن

اثر درصد حجمی کل سنگدانه‌ها در مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن بررسی شده است. هندسه و شبکه‌بندی اجزای محدود نمونه‌های مورداستفاده، در قسمت دوم ارائه شده‌اند. مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن تا درصد حجمی در حدود ۵۰٪ دارای تغییرات اندکی است. با افزایش درصد حجمی کل سنگدانه‌ها از مقداری در حدود ۵۰٪، مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن به مقدار قابل‌توجهی افزایش می‌یابد (شکل ۱۴). این نتایج با نتایج گزارش‌شده در پژوهش‌های پیشین[۹و۲۲] مطابقت دارد.

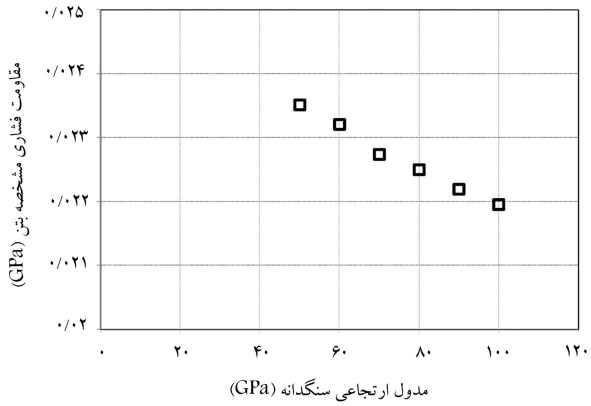
۲.۷. اثر اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن

در این قسمت، اثر اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن بررسی می‌شود. هندسه‌ی این نمونه‌ها در قسمت دوم نمایش داده شده‌اند. تغییرات مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن با اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه در شکل ۱۵ نشان داده شده است. نتایج نشان می‌دهند که این پارامتر تأثیر اندکی در مقدار مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن می‌گذارد. این نتایج با نتایج ارائه‌شده در پژوهش‌های پیشین[۹و۲۵] تطابق خوبی دارد.



شکل ۱۴. اثر درصد حجمی کل سنگدانه‌ها بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن.

شکل ۱۵. اثر اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن.



شکل ۱۶. اثر مقدار مدول ارتجاعی سنگدانه در مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن.

۳.۷. اثر مقدار مدول ارتجاعی سنگدانه در مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن

جهت بررسی اثر مدول ارتجاعی سنگدانه در مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن، نمونه با درصد حجمی کل سنگدانه برابر ۷۰٪ انتخاب شده است. شکل ۱۶، مقادیر مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن در برابر مدول ارتجاعی سنگدانه‌ها را نمایش می‌دهد. مشاهده می‌شود که افزایش مدول ارتجاعی سنگدانه باعث کاهش مقدار مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن می‌شود. افزایش مدول ارتجاعی سنگدانه باعث افزایش تمرکز تنش در اطراف سنگدانه می‌شود. با توجه به آن‌که در بتن، خسارت در ملات رخ می‌دهد، این تمرکز تنش منجر به کاهش مقدار مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن می‌شود. باید توجه کرد که مدول ارتجاعی بتن متأثر از مدول ارتجاعی سنگدانه‌هاست. به‌عبارت دیگر با افزایش مدول ارتجاعی سنگدانه، مدول ارتجاعی بتن نیز افزایش می‌یابد.

۸. نتیجه‌گیری

در این تحقیق، ریزساختار بتن توسط یک مدل دوفازی اجزای محدود شامل ملات و سنگدانه‌های درشت شبیه‌سازی شده است. الک شماره‌ی ۴ (با قطر سوراخ‌های برابر ۴/۷۵ میلی‌متر) به‌عنوان مرز بین سنگدانه‌های درشت و ریز فرض شده است، بنابراین سنگدانه‌های با قطرکوچک‌تر از ۴/۷۵ میلی‌متر به‌عنوان قسمتی از فاز ملات همگن‌شده در نظر گرفته می‌شوند. حد بالای اندازه‌ی سنگدانه‌ی ۱۹ میلی‌متر و منحنی دانه‌بندی فولر فرض شده است. روش آکندن بازدارنده‌ی متوالی ساده[۱۷] برای چیدن سنگدانه‌ها در فضای نمونه‌های به‌کار رفته است. درنهایت، مدل‌های دو فازی با استفاده از المان‌های ۴ گره‌یی هرمی‌شکل مش‌بندی شده‌اند. رفتار سنگدانه‌ها به‌صورت ارتجاعی خطی در نظرگرفته شده است و از مدل خمیری ـ خسارت برای بیان رفتار ملات استفاده می‌شود. نحوه‌ی پیاده‌سازی مدل خمیری ـ خسارت ارائه و برای یک المان صحت‌سنجی انجام شده است.

درگام نهایی اثر درصد حجمی سنگدانه، اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه و مدول ارتجاعی سنگدانه بر روی مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن مطالعه شده است. مشاهده می‌شود که مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن تا درصد حجمی در حدود ۵۰٪ دارای تغییرات اندکی است. با افزایش درصد حجمی کل سنگدانه‌ها از مقداری در حدود ۵۰٪، مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن به مقدار قابل توجهی افزایش می‌یابد. علاوه بر این نتایج نشان می‌دهند که اندازه‌ی بزرگ‌ترین سنگدانه، تأثیر اندکی در مقدار مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن می‌گذارد. در نهایت مشاهده می‌شود که افزایش مدول ارتجاعی سنگدانه باعث کاهش مقدار مقاومت فشاری مشخصه‌ی بتن می‌شود. این نتایج با مشاهدات عددی و تجربی سایر پژوهشگران مطابقت دارد.

پانوشت‌ها

1. plastic-damage
2. interfacial transition zone (ITZ)
3. interface elements
4. matrix
5. discretize
6. lattice
7. microplane
8. representative volume element (RVE)
9. simple sequential inhibition
10. non-associated
11. dilatancy
12. return-mapping
13. ABAQUS
14. time discretization
15. mid-point
16. Lamé's constant
17. trial stress
18. shifted backward-Euler
19. linearization
20. plastic consistency condition
21. spectral form
22. Heaviside
23. characteristic length

منابع (References)

1. Caballero, A., Lopez, C.M. and Carol, I. "3D meso-structural analysis of concrete specimens under uniaxial tension", *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, **195**(52), pp. 7182-7195 (2006).

2. Lopez, C.M., Carol, I. and Aguado, A. "Meso-structural study of concrete fracture using interface elements. I: Numerical model and tensile behavior", *Materials and Structures*, **41**(3), pp. 583-599 (2008).

3. Bazant, Z.P., Tabbara, M.R., Kazemi, M.T. and Pijaudier-Cabot, G. "Random particle model for frac-

ture of aggregate or fiber composites", *J. of Eng. Mechanics*, **116**(8), pp. 1686-1705 (1990).

4. Schlangen, E. and van Mier, J.G.M. "Simple lattice model for numerical simulation of fracture of concrete materials and structures", *Materials and Structures*, **25**(9), pp. 534-542 (1992).
5. Cusatis, G., Bazant, Z.P. and Cedolin, L. "Confinement-shear lattice model for concrete damage in tension and compression: II. Computation and validation", *J. of Eng. Mechanics,* **129**(12), pp. 1449-1458 (2003).
6. Wittmann, F.H., Roelfstra, P.E. and Sadouki, H. "Simulation and analysis of composite structures", *Materials Science and Eng.*, **68**(2), pp. 239-248 (1984).
7. Grassl, P. and Rempling, R. "A damage-plasticity interface approach to the meso-scale modelling of concrete subjected to cyclic compressive loading", *Eng. Fracture Mechanics*, **75**(16), pp. 4804-4818 (2008).
8. Skarzynski, L. and Tejchman, J. "Calculations of fracture process zones on meso-scale in notched concrete beams subjected to three-point bending", *European J. of Mechanics A/Solids*, **29**(4), pp. 746-760 (2010).
9. Comby-Peyrot, I., Bernard, F., Bouchard, P., Bay, F. and Garcia-Diaz, E. "Development and validation of a 3D computational tool to describe concrete behaviour at mesoscale. Application to the alkali-silica reaction", *Computational Materials Science,* **46**, pp. 1163-1177 (2009).
10. Dupray, F., Malecot, Y., Daudeville, L. and Buzaud, E. "A mesoscopic model for the behaviour of concrete under high confinement", *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **33**(11), pp. 1407-1423 (2009).
11. Wriggers, P. and Moftah, S.O. "Mesoscale models for concrete: Homogenisation and damage behaviour", *Finite Elements in Analysis and Design*, **42**, pp. 623-636 (2006).
12. Lee, J. and Fenves, G.L. "Plastic-damage model for cyclic loading of concrete structures", *J. of Eng. Mechanics*, **124**(8), pp. 892-900 (1998).
13. Hibbitt, D., Karlsson, B. and Sorensen, P., *ABAQUS Analysis User's Manual Version 6.9*, Hibbitt, Karlsson & Sorensen Inc., USA (2009).
14. Cusatis, G., Bazant, Z.P. and Cedolin, L. "Confinement-shear lattice CSL model for fracture propagation in concrete", *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, **195**, pp. 7154-7171 (2006).
15. Zhou, X.Q. and Hao, H. "Mesoscale modelling and analysis of damage and fragmentation of concrete slab under contact detonation", *Int. J. of Impact Eng.*, **36**, pp. 1315-1326 (2009).
16. Grassl, P. and Jirasek, M. "Meso-scale approach to modelling the fracture process zone of concrete subjected to uniaxial tension", *Int. J. of Solids and Structures*, **47**(7-8), pp. 957-968 (2010).
17. Bagi, K. "An algorithm to generate random dense arrangements for discrete element simulations of granular assemblies", *Granular Matter*, **7**(1), pp. 31-43 (2005).
18. Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. and Onate, E. "A plastic-damage model for concrete", *Int. J. of Solids and Structures,* **25**(3), pp. 299-326 (1989).
19. Lee, J. and Fenves, G.L. "A return-mapping algorithm for plastic-damage models: 3-D and plane stress formulation", *Int. J. for Numerical Methods in Eng.*, **50**(2), pp. 487-506 (2001).
20. Hilber, H.M., Hughes, T.J.R. and Taylor, R.L. "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Earthquake Eng. and Structural Dynamics*, **5**(3), pp. 283-292 (1977).
21. Simo, J.C. "Algorithms for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory", *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, **99**(1), pp. 61-112 (1992).
22. Simo, J.C. "Nonlinear stability of the time-discrete variational problem of evolution in nonlinear heat conduction, plasticity and viscoplasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Eng.*, **88**(1), pp. 111-131 (1991).
23. Yaghobi, M., "Simulation of concerte meso-structure within FEM/CDM frame work", MSc thesis, sharif University of Technology, Tehran, Iran, (In Persain)(2011).
24. Stock, A.F., Hannant, D.J. and Williams, R.I.T. "The effect of aggregate concentration upon the strength and modulus of elasticity of concrete", *Magazine of Concrete Research*, **31**, pp. 225-234 (1979).
25. Cordon, W.A. and Gillepsie, H.A. "Variables in concrete aggregates and portland cement paste which influence the strength of concrete", *J. of the American Concrete Institute*, **60**(8), pp. 1029-1052 (1963).

NUMERICAL STUDY OF MESOSTRUCTURE EFFECTS ON CONCRETE COMPRESSIVE STRENGTH

M.R. Yaghoobi
mohammadreza.yaghoobi@gmail.com
Dept. of Civil Engineering
Sharif University of Technology

S. Shahbeyk(corresponding author)
shahbeyk@modares.ac.ir
Faculty of Civil and Environmental Engineering
Tarbiat Modares University
A. Vafai
vafai@sharif.edu
Dept. of Civil Engineering
Sharif University of Technology

Sharif Civil Engineering Journal
Volume 29, Issue 2, Page 61-70, Original Article

© Sharif University of Technology

- Received 15 March 2011; received in revised form 12 December 2011; accepted 24 December 2011.

Abstract

In the present paper, the detailed mesostructure of concrete is geometrically generated and its compressive strength is numerically estimated using the 3D finite element method. The models contain two phases of mortar and coarse aggregates. The FE models of concrete are cubic in shape, with a side length of 80 mm. Aggregates are assumed to be spherical and behave in a linear elastic manner. The famous Fuller formula is utilized for the aggregate grading curve, and the simple sequential inhibition (SSI) technique is employed to fill the concrete cubes with the particles. Only aggregates bigger than 4.75 mm in diameter (gravel) are modeled, i.e., the particles smaller than 4.75 mm in diameter (sand) are not considered individually and assumed to be part of the homogenized nonlinear cement paste. A modified version of the plastic-damage model, proposed by Lee and Fenves [J. Lee, G.L. Fenves, International Journal for Numerical Methods in Engineering 50 (2001) 487-506], has been adopted to simulate the inelastic response of the mortar. This constitutive model incorporates two independent hardening variables, namely; equivalent tensile and compressive plastic strains, and, thus, is capable of tracing damage evolution due to both tensile cracking and compressive crushing. In the first stage, the numerical implementation of the plastic-damage model is presented and then its validity is examined in a 3D FE element. Next, the effects of aggregate volume fraction, aggregate maximum diameter, and aggregate elastic modulus on concrete compressive strength are studied. It is shown that: (1) compressive strength remains constant for specimens with aggregate volume fractions of up to 50%, and then increases significantly with grain content, (2) for the range of aggregate volume fractions studied in this paper, the maximum aggregate size has little influence on compressive strength, and (3) any increase in the elastic modulus of aggregates accentuates stress concentration near the aggregates, and, thus, reduces the compressive strength of concrete samples. Finally, the results are satisfactorily compared with those presented by other researchers.

Key Words: Mesostructure, compressive strength, concrete, finite element method, plastic-damage.