

# مدل سازی جریان گذرای مختلط در مجاری بسته

وحید مهران (دانشجوی کوشناسی ارشد)

محمد هادی افشار (دانشیار)

دانشکده مهندسی عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران

احمد ملک پور (کوشناس ارشد)

شرکت مهندسی مشاور لار

مجله علمی و پژوهشی شریف  
شماره چهارم و دوم، ص. ۲۳-۲۷

tvmeهران@yahoo.com  
mhafshar@iust.ac.ir  
amalekpour@lar-co.com

پدیده جریان‌های مختلط تحت شرایط خاص در مجاری بسته به وجود می‌آید، که طی آن «جریان سطح آزاد» و «جریان تحت فشار» به طور هم‌زمان رخ می‌دهد. سیستم‌هایی که این پدیده را تجربه می‌کنند، بسته به محل ایجاد جریان‌های مختلط، نحوه گذار جریان و... ممکن است دچار مشکلات متفاوتی شوند؛ لذا تحلیل جریان‌های مختلط به منظور طراحی و کنترل صحیح مؤلفه‌های مختلف چنین سیستم‌هایی ضروری به نظر می‌رسد. برای تحلیل جریان‌های مختلط، براساس نحوه تشکیل و چگونگی تعقیب موقعیت سطح مشترک بین دو جریان و فرضیات ساده‌کننده رفتار جریان، روش‌های متفاوتی پیشنهاد شده است. در این تحقیق جریان‌های مختلط در مجاری بسته با استفاده از روش شکاف مجازی و به کمک یک الگوی عددی مناسب تحلیل شده است. مدل پیشنهادی با استفاده از نتایج حاصل از یک مدل فیزیکی ارزیابی و نتایج حاصله ارائه شده است.

واژگان کلیدی: جریان مختلط، معادلات سنت ونان، شکاف مجازی، الگوی پرایزن.

## ۱. مقدمه

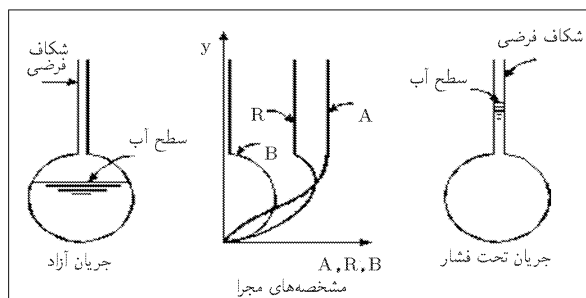
همزمان عهده‌دار دفع و انتقال سیلاب و فاضلاب خانگی‌اند، پدیده‌ی جریان مختلط هنگام وقوع سیلاب‌های بیش از سیلاب طرح مشاهده می‌شود. در این حالت جریان ورودی از طریق آدمروها<sup>۴</sup> مجرا را در محل مورد نظر از حالت آزاد به تحت فشار تبدیل کرده و با تداوم سیلاب این تغییر حالت را به سایر قسمت‌های سیستم منتقل می‌کند. در خطوط انتقال آب وقتی که سازه‌های کنترل‌کننده به دلیل محدودیت فضا در بالادست خط قرار می‌گیرند، احتمال وقوع جریان مختلط بیشتر می‌شود. در نیروگاه‌های برقابی مجرا<sup>۵</sup> که در آنها مقدار تولید برق توربین تابعی از مقدار مصرف شبکه است، نیاز فوری شبکه به تولید برق باعث می‌شود تا درچه‌های تنظیم‌کننده‌ی آب ورودی به توربین به سرعت باز شده و منجر به تشکیل سیلابی در تونل پایاب شود. در صورتی که تونل پایاب یک مجرای بسته باشد، وقوع چنین سیلابی ممکن است منجر به فشرده‌شدن آن شود. تونل‌های انحراف سدها نیز بسته به شکل هیدروگراف و شدت سیلاب طرح، ممکن است در حین عبور سیل به تدریج از حالت آزاد به حالت تحت فشار، و مجدداً به حالت آزاد تغییر وضعیت دهد.

اهمیت تحلیل دقیق جریان‌های مختلط از دو منظر طراحی و پیش‌بینی مشکلات حین بهره‌برداری (کنترل) است. از آنجا که میانی طراحی مجاری تحت فشار و سطح آزاد متفاوت است، طراحی مجاری بسته‌یی که جریان مختلط را از خود عبور می‌دهند

مجاری بسته در مواجهه با جریان‌های گذرا ممکن است تحت شرایطی خاص به طور هم‌زمان ترکیبی از جریان سطح آزاد و جریان تحت فشار را از خود عبور دهند. در چنین حالتی ممکن است جریان سطح آزاد و جریان تحت فشار، بر اثر گذار جریان و نیز در حین فرایندهای کنترل‌شدن<sup>۱</sup> و فشرده‌شدن<sup>۲</sup> تغییر وضعیت دهد. چنین جریانی را «جریان مختلط<sup>۳</sup>» می‌نامند.

با توجه به شرایط اولیه‌ی جریان، وضعیت عمومی مجرا، محل کنترل جریان، چگونگی تغییر شرایط عمومی جریان و مجرا، جریان مختلط در موارد متعدد و متفاوتی رخ می‌دهد. بدیهی است چگونگی وقوع، زمان و مکان گذار جریان و همچنین نحوه پیشرفت آن در یک سیستم، عواقب خاصی خواهند داشت که اطلاع از آنها برای طراحی و بهره‌برداری از مجاری بسته‌ی انتقال آب مفید و ضروری است. در چنین شرایطی نظریه‌های مربوط به جریان‌های آزاد و تحت فشار به صورت مجزا قابل استفاده نیستند و باید از روش‌های پیشرفته به منظور بررسی وضعیت این نوع جریان استفاده کرد. جریان مختلط را می‌توان در شبکه‌های جمع‌آوری و دفع فاضلاب یا آب‌های سطحی، خطوط انتقال آب تحت شرایط خاص، تونل‌های پایاب نیروگاه‌های برقابی، تونل‌های انحراف در فراز بند و... مشاهده کرد.

در شبکه‌های ترکیبی جمع‌آوری و دفع فاضلاب یا آب‌های سطحی که به طور



شکل ۱. مقطع عرضی مجرا در روش شکاف مجازی.

۲. روش برازش شوک: در این روش، برخلاف روش شکاف مجازی که مرز مشترک بین جریان تحت فشار و سطح آزاد را نادیده می‌گیرد، فصل مشترک جریان سطح آزاد و تحت فشار توسط قوانین بقای جرم و بقای اندازه حرکت خطی تعقیب، و سرعت و موقعیت آن محاسبه می‌شود. با معلوم بودن موقعیت مرز مشترک می‌توان جریان‌های سطح آزاد و تحت فشار را که در دو طرف این مرز قرار دارند، به‌طور جداگانه توسط نظریه‌های مربوط به هر یک تحلیل و بدین ترتیب رفتار هیدرولیکی سیستم را در زمان‌های مختلف پیش‌بینی کرد.<sup>[۱۷]</sup>

۳. روش ستون صلب آب: در این روش که برای تحلیل جریان گذاری مختلط پیشنهاد شده، گذار جریان از حالت سطح آزاد به تحت فشار در شش مرحله پیش‌بینی شده است.<sup>[۱۸]</sup> با استفاده از روش ستون صلب آب فاز آب و نظریه‌ی جریان تراکم‌ناپذیر برای فاز هوا، معادلات پیوستگی و اندازه حرکت به‌صورت معادلات دیفرانسیلی معمولی برای مراحل که در آنها تغییر وضعیت جریان رخ می‌دهد به دست می‌آید. معادلات دیفرانسیل معمولی هر مرحله به کمک الگوریتم رانج‌کوئی مرتبه پنج<sup>[۱۹]</sup> حل می‌شود.<sup>[۲۰]</sup>

#### ۴. مدل پیشنهادی

در این تحقیق از روش شکاف مجازی به دلیل سادگی و قابلیت بالای آن در مدل‌سازی یک‌پارچه‌ی جریان‌های مختلط استفاده شده است. لازم به ذکر است که در جریان‌های تحت فشار با پایین افتادن خط هیدرولیکی از تراز خط لوله، فشار منفی در سیستم ایجاد شده ولی جریان همچنان تحت فشار باقی می‌ماند. در روش شکاف مجازی فرض بر این است که با افت خط تراز هیدرولیکی از تاج لوله، مجرا از حالت تحت فشار به حالت سطح آزاد تبدیل شده و سیستم به راحتی قابلیت تنفس و ارتباط دائمی با هوا را دارد.<sup>[۲۱]</sup>

روش شکاف مجازی بر این فرض استوار است که سطح مقطع شعاع هیدرولیکی مجرا با افزایش عمق آب در ستون شکاف فرضی، افزایش نمی‌یابد (شکل ۱). با استفاده از این روش، می‌توان جریان گذرا را به‌طور همزمان در مجاری سطح آزاد و تحت فشار، و با استفاده از یک نظریه واحد شبیه‌سازی کرد. بر این اساس، جریان در تمامی شرایط به‌صورت سطح آزاد فرض می‌شود.

با حل دستگاه معادلات غیرخطی حاکم بر جریان سطح آزاد می‌توان تغییرات عمق و سرعت جریان را در زمان‌های مختلف و در طول مجرا به دست آورد. چنانچه عمق‌های محاسبه شده بیش از ارتفاع مجرا باشند جریان تحت فشار منظور می‌شود و لذا عمق محاسبه شده نشان‌دهنده ارتفاع پیزومتریک جریان، و در صورتی که عمق محاسبه شده کم‌تر از ارتفاع مجرا باشد جریان سطح آزاد منظور شده و عمق محاسبه شده بیانگر عمق سطح آب خواهد بود. در حین حل دستگاه معادلات هرگاه

مستلزم تحلیل جریان مختلط برای تعیین وضعیت دقیق جریان است. همچنین در مواردی که سیستم جریان آزاد برای دبی معینی طراحی شده و با گذشت زمان دبی عبوری از آن — به دلیل افزایش تولید یا مصرف — افزایش می‌یابد، کنترل پاسخ‌گویی سیستم در برابر شرایط جدید که در آن احتمال وقوع جریان مختلط فراهم می‌شود، از طریق تحلیل دقیق چنین جریان‌هایی میسر می‌شود.

#### ۲. پیشینه‌ی تحقیقاتی جریان‌های مختلط

اولین بررسی بر روی جریان‌های گذرای مختلط<sup>[۶]</sup> در سال ۱۹۳۲ انجام شده است.<sup>[۲۲]</sup> سپس در سال ۱۹۶۱ مطالعاتی در مورد جریان‌های تحت فشار انجام شد. در این بررسی جریان تحت فشار با در نظر گرفتن یک شکاف بسیار باریک در تاج لوله، به‌صورت سطح آزاد تحلیل شد.<sup>[۳]</sup> در سال ۱۹۸۳ با استفاده از معادلات مربوط به دو جریان سطح آزاد و تحت فشار و نیز معادلات سطح مشترک بین این دو جریان، جریان‌های مختلط مورد تحلیل و بررسی قرار گرفت. استفاده کردند. طرح عددی مورد استفاده در این رهیافت روش خطوط مشخصه بود.<sup>[۴]</sup> پس از آن روش ستون صلب را برای شبیه‌سازی جریان‌های مختلط پیشنهاد کردند. در این مدل یک حباب فرضی ساکن در حین پدیده‌های مختلف انقباض و انبساط جریان در مجرا در نظر گرفته می‌شود.<sup>[۵]</sup> در سال ۱۹۹۹ نیز روش ستون صلب به‌گونه‌ی گسترش یافت تا در نظر گرفتن جابه‌جایی و انتقال حباب هوای محبوس در مجرا میسر باشد.<sup>[۴]</sup> در سال ۲۰۰۲ یکی از جدیدترین تحقیقات بر روی جریان‌های مختلط انجام شد که در آن نتایج حاصل از سه الگوی عددی مختلف در تحلیل جریان‌های مختلط به کمک «مدل برازش شوک»<sup>[۷]</sup> مقایسه و نتایج حاصل با مقادیر اندازه‌گیری شده در یک نمونه‌ی آزمایشگاهی ارزیابی شده است.<sup>[۲]</sup>

#### ۳. مدل‌های تحلیل جریان‌های مختلط

یکی از نکات مهم در تحلیل جریان‌های مختلط، پیش‌بینی تشکیل جریان مختلط و چگونگی تعقیب موقعیت فصل مشترک<sup>[۸]</sup> بین دو جریان، و نیز فرضیات ساده‌کننده‌ی مورد استفاده در تحلیل این‌گونه جریان‌ها است. بر این اساس، روش‌های متفاوتی برای تحلیل جریان‌های مختلط پیشنهاد شده است:

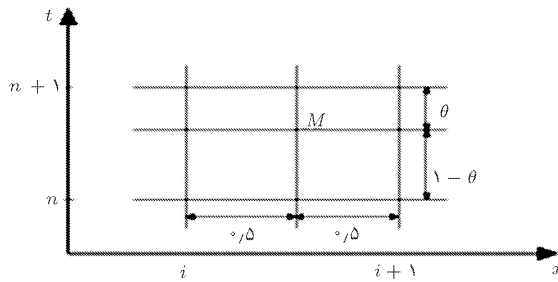
۱. روش شکاف مجازی<sup>[۹]</sup>

۲. روش برازش شوک<sup>[۱۰]</sup>

۳. روش ستون صلب آب<sup>[۱۱]</sup>

در ادامه به شرح مختصر این روش‌ها می‌پردازیم.

۱. روش شکاف مجازی: برای احتراز از مشکلات ناشی از دنبال کردن موج فشاری، محققین — پزیرمن، کوئر و گنر — روش جالبی پیشنهاد کردند که در آن، جریان مختلط با استفاده از نظریه‌ی واحد و به‌صورت یک‌پارچه مدل‌سازی می‌شود. در این روش یک شکاف مجازی و فرضی در بالای تاج لوله در نظر گرفته شده و فرض می‌شود که افزایش ارتفاع آب در داخل این شکاف به افزایش سطح مقطع شعاع هیدرولیکی جریان منجر نمی‌شود. به کمک این روش می‌توان هر دو جریان سطح آزاد و تحت فشار را با استفاده از معادلات حاکم بر جریان‌های سطح آزاد تحلیل کرد.<sup>[۱۲]</sup>



شکل ۲. موقعیت نقاط در شبکه‌ی گسسته‌سازی شده.

## ۶. الگوی عددی حل معادلات حاکم

معادلات سنت ونان علی‌رغم سادگی ظاهری، به دلیل طبیعت غیرخطی فاقد حل تحلیلی‌اند و برای حل آنها باید از روش‌های عددی کمک گرفت. روش‌های متفاوتی برای حل این معادلات وجود دارد. در این تحقیق به دلیل سادگی و انعطاف‌پذیری از «روش تفاضل محدود»<sup>۱۳</sup> برای حل معادلات حاکم بر جریان استفاده شده است.<sup>۱۸</sup> از آنجا که روش شکاف مجازی جریان تحت فشار را از طریق معادلات حاکم بر جریان سطح آزاد مدل‌سازی می‌کند، تغییرات ناگهانی فشار در بخش تحت فشار جریان متناظر با تغییرات سریع عمق در جریان سطح آزاد خواهد بود. همچنین از آنجا که معادلات سنت ونان به دلیل نادیده گرفتن شتاب‌های قائم در واقع بیان‌گر معادلات حاکم بر جریان‌های متغیر تدریجی‌اند، تغییرات سریع عمق جریان یا فشار مجرا، سبب بروز اغتشاشاتی با فرکانس بالا در سطح آب گشته که نهایتاً می‌تواند علی‌رغم استفاده از الگوی عددی پایدار منجر به ناپایداری عددی شود. به همین منظور استفاده از یک الگوی عددی مناسب به منظور مستهلک‌کردن این‌گونه اغتشاشات لازم و ضروری به نظر می‌رسد.

در این تحقیق از «الگوی چهارنقطه‌یی پرایزم» که توسط پایه‌گذاران روش شکاف مجازی پیشنهاد شده استفاده شده است. الگوی چهارنقطه‌یی پرایزم یک الگوی ضمنی و صورتی خاص از «الگو θ» است. در این روش مقادیر تابع و مشتقات جزئی آنها در نقطه نمونه‌ی M از شبکه شکل ۲ به صورت زیر تقریب زده می‌شوند:

$$\left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_M = \frac{(f_i^{n+1} + f_{i+1}^{n+1}) - (f_i^n + f_{i+1}^n)}{2\Delta t} \quad (5)$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_M = \theta \frac{(f_{i+1}^{n+1} - f_i^{n+1})}{\Delta x} + (1 - \theta) \frac{(f_{i+1}^n - f_i^n)}{\Delta x} \quad (6)$$

$$f(x, t)|_M = \theta \frac{(f_{i+1}^{n+1} + f_i^{n+1})}{2} + (1 - \theta) \frac{(f_{i+1}^n + f_i^n)}{2} \quad (7)$$

در اینجا  $1 \leq \theta \leq 0.5$  ضریب وزنی زمان است. این الگو با تنظیم ضریب وزنی زمان می‌تواند به یک الگوی استهلاکی تبدیل شود. پرایزم بهترین مقدار  $\theta$  را در این الگو برابر ۰.۶۵ معرفی کرده است.

بدین ترتیب صورت گسسته‌سازی شده‌ی معادله‌ی بیوستگی ۱ و معادله اندازه حرکت ۲ بر روی شبکه تفاضل‌های محدودی متشکل از n نقطه و n-۱ سلول

عمق جریان بیش از ارتفاع مجرا به دست آید، مشخصه‌های هیدرولیکی مربوط به جریان در مجرای پر (از جمله سرعت انتقال موج فشاری، شعاع هیدرولیکی و سطح مقطع مجرای پر و...) جایگزین مشخصه‌های جریان در مجرای سطح آزاد می‌شود.<sup>۱۹</sup>

## ۵. معادلات حاکم بر جریان‌های مختلط

معادلات سنت ونان بیان‌گر معادلات حاکم بر جریان گذرای سطح آزادند. معادلات سنت ونان با استفاده از دو معادله دیفرانسیل نسبی بیوستگی و اندازه حرکت بیان و چنین نوشته می‌شود:

$$\text{معادله بیوستگی} \quad (1) \quad \frac{\partial y}{\partial t} + V \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{c^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\text{معادله اندازه حرکت} \quad (2) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial y}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0$$

در اینجا y عمق آب، V سرعت جریان، S<sub>۰</sub> شیب بستر، S<sub>f</sub> شیب اصطکاکی و c سرعت انتشار موج ثقلی است، که از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{T}}$$

A سطح مقطع جریان و T عرض سطح آزاد آب است. معادلات حاکم بر جریان غیردائمی در مجاری تحت فشار نیز توسط معادلات دیفرانسیل با مشتقات جزئی بیان می‌شود:

$$\text{معادله بیوستگی} \quad (3) \quad \frac{\partial H}{\partial t} + V \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{a^2}{g} \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\text{معادله اندازه حرکت} \quad (4) \quad \frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial H}{\partial x} - g(S_0 - S_f) = 0$$

a سرعت موج فشاری، H ارتفاع پیزومتریک، و V سرعت جریان است. مقایسه‌ی معادلات ۱ و ۳ و معادلات ۲ و ۴ نشان می‌دهد که معادلات حاکم بر جریان سطح آزاد در صورتی که عمق جریان (y) با ارتفاع پیزومتریک (H) و سرعت موج ثقلی (c) با سرعت موج فشاری (a) جایگزین شود، به دستگاه معادلات حاکم بر جریان تحت فشار تبدیل خواهد شد. بدین ترتیب در صورتی که بتوان تفاوت سرعت موج ثقلی (c) و موج فشاری (a) را در این معادلات منظور کرد، امکان تحلیل جریان تحت فشار از طریق معادلات جریان سطح آزاد فراهم خواهد شد. این هدف را می‌توان با به‌کارگیری روش شکاف مجازی و محاسبه‌ی عرض شکاف فرضی به‌منزله‌ی عرض سطح آزاد آب از طریق رابطه زیر محقق کرد:

$$c = \sqrt{g \frac{A}{T}} \Rightarrow T = g \frac{A}{c^2}$$

با استفاده از این رابطه، سرعت موج ثقلی جریان سطح آزاد برابر سرعت موج فشاری خواهد شد.

چنین نمایش داده می شود:

$$\frac{\partial F_{\lambda}}{\partial y_{i+\lambda}^{n+\lambda}} = \lambda + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta \frac{\partial D_{i+\lambda}^{n+\lambda}}{\partial y_{i+\lambda}^{n+\lambda}} \right]$$

$$\left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} - V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n - V_i^n \right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta] \left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} + V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n + V_i^n \right) \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda$$

$$\frac{\partial F_{\lambda}}{\partial V_{i+\lambda}^{n+\lambda}} =$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta] \left[ \theta \left( D_{i+\lambda}^{n+\lambda} + D_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( D_{i+\lambda}^n + D_i^n \right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta] \left[ \theta \left( y_{i+\lambda}^{n+\lambda} - y_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( y_{i+\lambda}^n - y_i^n \right) \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda$$

$$\frac{\partial F_{\lambda}}{\partial y_i^{n+\lambda}} = \frac{\gamma g \Delta t}{\Delta x} [-\theta] + g \Delta t [\theta] \left[ \frac{\partial S_{f_{\lambda}}^{n+\lambda}}{\partial y_i^{n+\lambda}} \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda$$

$$\frac{\partial F_{\gamma}}{\partial V_i^{n+\lambda}} = \lambda + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta]$$

$$\left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} - V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n - V_i^n \right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [-\theta] \left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} + V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n + V_i^n \right) \right] +$$

$$g \Delta t [\theta] \left[ \frac{\partial S_{f_{\lambda}}^{n+\lambda}}{\partial V_i^{n+\lambda}} \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda$$

$$\frac{\partial F_{\gamma}}{\partial y_{i+\lambda}^{n+\lambda}} = \gamma g \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta] + g \Delta t [\theta] \left[ \frac{\partial S_{f_{\lambda+1}}^{n+\lambda}}{\partial y_{i+\lambda}^{n+\lambda}} \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda$$

$$\frac{\partial F_{\gamma}}{\partial V_{i+\lambda}^{n+\lambda}} = \lambda + \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta]$$

$$\left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} - V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n - V_i^n \right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta] \left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} + V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n + V_i^n \right) \right] +$$

$$g \Delta t [\theta] \left[ \frac{\partial S_{f_{\lambda+1}}^{n+\lambda}}{\partial V_{i+\lambda}^{n+\lambda}} \right]$$

معادلات فوق نشانگر دستگاهی متشکل از  $2n - 2$  معادله و  $2n$  مجهول گرهی است. حل این معادلات مستلزم تعریف ۲ معادله‌ی اضافی است که از طریق شرایط مرزی مسئله تأمین می‌شود. با حل دستگاه معادلات حاصل می‌توان مقادیر عمق و سرعت را در گره‌های مختلف شبکه به دست آورد.

## ۷. ارزیابی مدل

برای ارزیابی نتایج مدل پیشنهادی از نتایج حاصل از یک مدل فیزیکی استفاده شده است.<sup>[۸]</sup> مدل فیزیکی مورد نظر یک نمونه‌ی آزمایشگاهی در ابعاد کوچک

$$F_{\lambda} \left( y_i^{n+\lambda}, V_i^{n+\lambda}, y_{i+\lambda}^{n+\lambda}, V_{i+\lambda}^{n+\lambda} \right) =$$

$$\left( y_i^{n+\lambda} + y_{i+\lambda}^{n+\lambda} \right) - \left( y_i^n + y_{i+\lambda}^n \right) +$$

$$(۱۲) \quad \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta \left( D_{i+\lambda}^{n+\lambda} + D_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( D_{i+\lambda}^n + D_i^n \right) \right] \times$$

$$\left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} - V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n - V_i^n \right) \right] +$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} + V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n + V_i^n \right) \right] \times$$

$$\left[ \theta \left( y_{i+\lambda}^{n+\lambda} - y_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( y_{i+\lambda}^n - y_i^n \right) \right] = 0 \quad (۱۳)$$

$$F_{\gamma} \left( y_i^{n+\lambda}, V_i^{n+\lambda}, y_{i+\lambda}^{n+\lambda}, V_{i+\lambda}^{n+\lambda} \right) =$$

$$\gamma g \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta \left( y_{i+\lambda}^{n+\lambda} - y_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( y_{i+\lambda}^n - y_i^n \right) \right] +$$

$$\left( V_i^{n+\lambda} + V_{i+\lambda}^{n+\lambda} \right) - \left( V_i^n + V_{i+\lambda}^n \right) +$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta \left( V_i^{n+\lambda} + V_{i+\lambda}^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_i^n + V_{i+\lambda}^n \right) \right] \times$$

$$\left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} - V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n - V_i^n \right) \right] -$$

$$\gamma g \Delta t S + g \Delta t [\theta] \left( S_{f_{\lambda+1}}^{n+\lambda} + S_{f_{\lambda}}^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta)$$

$$(۱۴) \quad \left( S_{f_{\lambda+1}}^n + S_{f_{\lambda}}^n \right) = 0 \quad (۱۵)$$

در اینجا  $i = \lambda, \dots, n - \lambda$  نشانگر تعداد گره‌های شبکه است.

معادلات بالا نشانگر دستگاه معادلاتی غیرخطی اند که حل آنها مستلزم استفاده از روش‌های تکراری است. در اینجا برای منظور کردن طبیعت شدیداً غیرخطی این معادلات از روش نیوتن-رافسون برای حل آنها استفاده شده است. استفاده از روش نیوتن-رافسون مستلزم محاسبه‌ی مشتقات توابع  $F_{\lambda}$  و  $F_{\gamma}$  و نسبت به متغیرهای مجهول مسئله، یعنی  $y_i^{n+\lambda}, y_{i+\lambda}^{n+\lambda}, V_i^{n+\lambda}, V_{i+\lambda}^{n+\lambda}$  است:

$$\frac{\partial F_{\lambda}}{\partial y_i^{n+\lambda}} = \lambda + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left[ \theta \frac{\partial D_i^{n+\lambda}}{\partial y_i^{n+\lambda}} \right]$$

$$\left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} - V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n - V_i^n \right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [-\theta] \left[ \theta \left( V_{i+\lambda}^{n+\lambda} + V_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( V_{i+\lambda}^n + V_i^n \right) \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda \quad (۱۶)$$

$$\frac{\partial F_{\lambda}}{\partial V_i^{n+\lambda}} =$$

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} [-\theta] \left[ \theta \left( D_{i+\lambda}^{n+\lambda} + D_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( D_{i+\lambda}^n + D_i^n \right) \right]$$

$$+ \frac{\Delta t}{\Delta x} [\theta] \left[ \theta \left( y_{i+\lambda}^{n+\lambda} - y_i^{n+\lambda} \right) + (\lambda - \theta) \left( y_{i+\lambda}^n - y_i^n \right) \right]$$

$$i = \lambda, \dots, n - \lambda \quad (۱۷)$$

در نظر گرفتن افت موضعی در مقطع ورودی، به صورت زیر تعریف شده است:

$$H_{res} = y_1 + \frac{V_1^2}{2g}$$

شرط مرزی پایین دست نیز، براساس رابطه‌ی ۱۸ برای سرریز لبه‌ی تیز اعمال خواهد شد.

### ۱.۷. مدل‌سازی جریان دائمی با سطح آزاد

در این حالت تراز سطح آب در مخزن بالادست به اندازه‌ی ۱ سانتی‌متر افزایش داده می‌شود تا جریان به صورت سطح آزاد از روی سرریز عبور کند. نتایج مدل به خوبی نشانگر افزایش تدریجی عمق جریان در سراسر مجرا و رسیدن به حالت ماندگار است (شکل ۵). در چنین شرایطی سرعت جریان به میزان تقریباً ثابت ۰/۱۶۷ متر بر ثانیه افزایش می‌یابد.

### ۲.۷. مدل‌سازی جریان در حالت تحت فشار

در این مورد فرض می‌شود که هیدروگراف ورودی پس از رسیدن به نقطه‌ی انتهایی ثابت مانده و سطح آب در مخزن بالادست در تراز ۱۲/۷m باقی بماند. در چنین شرایطی، مجرا پس از عبور هیدروگراف ورودی و ماندگار شدن جریان به صورت تحت فشار خواهد بود (شکل ۶). در این وضعیت ارتفاع پیزومتریک در بالاترین نقطه‌ی مجرا ۱۱/۶ سانتی‌متر و در پایین‌ترین نقطه‌ی آن ۱۰/۴ سانتی‌متر است. سرعت جریان در طول مجرا نیز ثابت و برابر ۰/۴۶۳ m/s خواهد بود.

### ۳.۷. مدل‌سازی جریان تحت اثر هیدروگراف ورودی

چنانچه تراز سطح آب در داخل مخزن براساس هیدروگراف معرفی شده در شکل ۴ تغییر کند، جریان داخل مجرا ابتدا از سطح آزاد به تحت فشار تغییر وضعیت می‌دهد و در صورتی که مجدداً تراز سطح آب مخزن به اندازه‌ی کافی کاهش یابد، جریان دوباره به وضعیت سطح آزاد باز خواهد گشت.

مشخصات هیدرولیکی جریان توسط یک مدل فیزیکی  $M_1$  برای عبور هیدروگراف مذکور در مقاطع مختلف اندازه‌گیری، و توسط مدل‌های ریاضی دیگری نیز محاسبه شده است. در ادامه نتایج حاصل از این محاسبات با نتایج مدل پیشنهادی مقایسه خواهد شد. در مدل‌های ارائه شده موجود  $M_2$  ضریب اصطکاک جریان با استفاده از فرمول دارسی - ویسباخ محاسبه می‌شود:

$$\frac{\lambda}{\sqrt{f}} = -2 \log_{10} \left( \frac{2.75 \Delta}{Re \sqrt{f}} + \frac{3.71 \times 10^{-3}}{10.77 D} \right)$$

از آنجا که در مدل پیشنهادی، برای اعمال افت اصطکاک از رابطه‌ی مانینگ استفاده شده است، برای کالیبره کردن ضریب  $n$  در روابط مانینگ با آزمون‌های مکرر، بهترین مقدار برای نزدیک شدن پاسخ‌های مدل به نتایج اندازه‌گیری برابر  $n = 0.0106$  به دست آمد.

نتایج حاصل از مدل ریاضی و فیزیکی ارائه شده در این نوشتار برای موقعیت شماره ۵ از شکل ۳ که به فاصله‌ی ۲/۵ متری بالادست قرار دارد نشان داده شده است. شکل ۷ نمایشگر تراز سطح آب از سطح مبنایی است که ۲۸/۵ سانتی‌متر پایین تر از کف مجرا در موقعیت شماره ۵ قرار گرفته است. زمان رسیدن موج فشاری به موقعیت شماره ۵ (زمان فشرده شدن موقعیت شماره ۵) براساس نتایج اندازه‌گیری شده تقریباً ۲/۵ ثانیه پس از آغاز هیدروگراف ورودی گزارش شده است. براساس

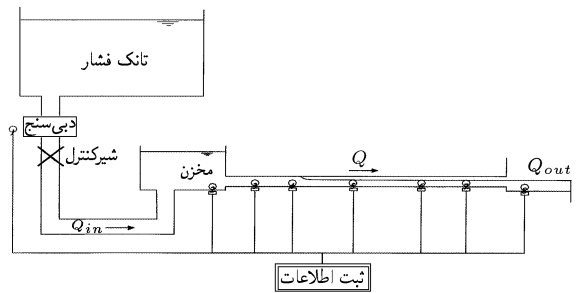
است که مقادیر عمق، ارتفاع پیزومتریک و سایر خصوصیات جریان در آن اندازه‌گیری می‌شود. شکل ۳ نمایشگر مدل فیزیکی مورد نظر است که در آن مخزن بالادست توسط یک تانک بزرگ تأمین‌کننده‌ی فشار تغذیه و تراز آب داخل مخزن با شیر کنترلی که در مسیر تانک به مخزن قرار داده تنظیم می‌شود. مجرای مورد بررسی لوله‌ی از جنس PVC، به طول ۶ متر و قطر ۱۰۰ میلی‌متر است. دبی جریان نیز توسط یک سرریز لبه‌تیز در پایین دست براساس رابطه‌ی ۱۸ کنترل می‌شود:

$$Q_{out} = C_d \sqrt{2g(y_1 - h_m^*)} (y_1 - h_m^*) B_r \quad (19)$$

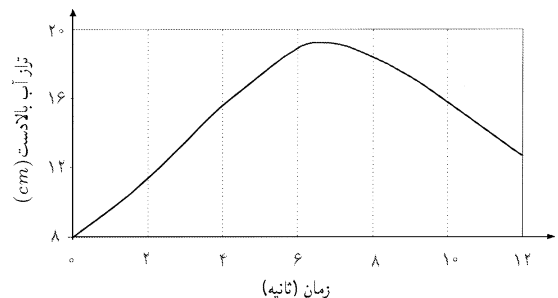
که در آن  $y_1$  عمق جریان روی سرریز،  $h_m^* = 0.185 C_m$  ارتفاع سرریز،  $C_d = 0.48$  ضریب بدون بعد دبی،  $B_r = 65 \text{ cm}$  عرض سرریز و  $Q_{out}$  دبی خروجی است. در آغاز بهره‌برداری و با شروع از شرایط سکون کامل (شرایط اولیه)، شیر کنترل به آرامی باز شده که در نتیجه عمق آب در بالادست به آرامی افزایش می‌یابد. چنان که در شکل ۳ مشاهده می‌شود عمق جریان و ارتفاع پیزومتریک در ۶ نقطه از لوله و با فواصل تقریبی ۱ متر از یکدیگر اندازه‌گیری می‌شود. روند افزایش عمق در مخزن بالادست در شکل ۴ نشان داده شده است. با افزایش ارتفاع آب داخل مخزن، مجرا از مقطع بالادست شروع به پر شدن کرده و مستغرق می‌شود. با تشکیل یک موج فشاری و حرکت آن به سمت پایین دست، همگی مقاطع واقع در بالادست جبهه‌ی موج تحت فشار قرار می‌گیرد. با رسیدن موج فشاری به انتهای پایین دست، سراسر مجرا پر شده و به صورت تحت فشار جریان را منتقل خواهد کرد.

شیب مجرای مورد بررسی  $S_0 = 0.013$  و گام مکانی و زمانی محاسبات به ترتیب برابر  $\Delta x = 0.3 \text{ m}$  و  $\Delta t = 0.09 \text{ s}$  در نظر گرفته شده است. سرعت پیش‌روی موج فشاری نیز برای قسمت‌های تحت فشار برابر  $0.575 \text{ m/s}$  در نظر گرفته شده است. پیش از آغاز فرایند و باز شدن دریچه‌ی بالادست، آب در پشت سرریز و با عمق ۰/۸ متر کاملاً ساکن بوده و سرعت جریان نیز در تمامی مقاطع برابر صفر است.

شرط مرزی بالادست مجرا در مدل مورد بررسی، براساس رابطه‌ی برنولی و بدون



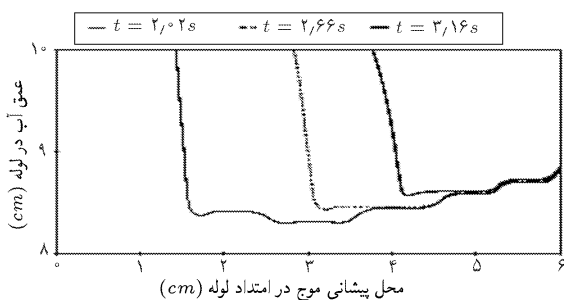
شکل ۳. مدل فیزیکی مورد بررسی.



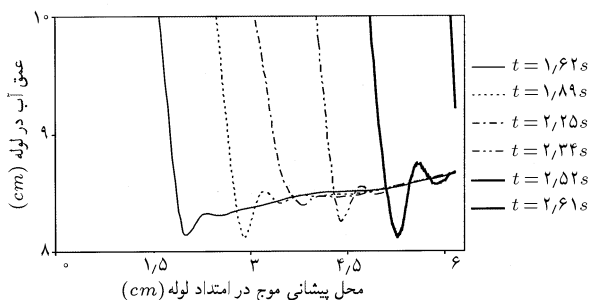
شکل ۴. روند تغییرات سطح آب در مخزن بالادست.

در مدل پیشنهادی و مدل فیزیکی با هم برابر و تقریباً معادل  $43/3$  سانتی‌متر به دست آمده است. همچنین لازم به ذکر است که براساس نتایج مدل فیزیکی زمان فشرده‌شدن اولین نقطه‌ی مجرا (زمان فاز جریان سطح آزاد)  $1/35$  ثانیه و زمان فشرده‌شدن تمام مجرا (زمان فاز جریان تحت فشار)  $2/58$  ثانیه گزارش شده است. به این ترتیب از لحظه‌ی شروع هیدروگراف ورودی حدوداً  $4$  ثانیه طول می‌کشد تا کل مجرا به حالت تحت فشار درآید. نتایج حاصل از مدل پیشنهادی زمان فشرده‌شدن اولین نقطه‌ی مجرا را  $1/3$  ثانیه، و زمان فشرده‌شدن کل مجرا را از لحظه‌ی آغاز فرایند  $4/5$  ثانیه نشان می‌دهد. به این ترتیب اختلاف زمان لازم برای فشرده‌شدن کل مجرا در مدل پیشنهادی و فیزیکی تنها برابر  $11\%$  است.

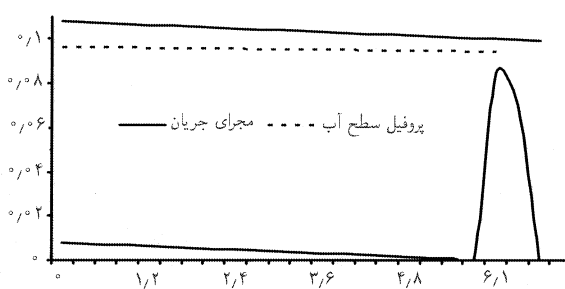
شکل ۸ تغییرات پروفیل سطح آب در زمان‌های  $2/2$ ،  $2/66$  و  $3/16$  ثانیه براساس نتایج مدل ریاضی ارائه شده<sup>[۷]</sup> نشان می‌دهد. هرچند زمان فشرده‌شدن اولین نقطه از مجرا در مدل مذکور و مدل پیشنهادی یکسان و حدود  $1/3$  ثانیه است، مقایسه‌ی نتایج نشان می‌دهد که سرعت پیش‌روی موج فشاری در مدل پیشنهادی بیش از سرعت پیش‌روی آن در مدل مذکور است. به همین دلیل تغییرات پروفیل سطح آب حاصل از مدل پیشنهادی در زمان‌های کوتاه‌تری در شکل ۹ نشان داده شده است. افزایش عمق آب پس از پیشانی پیش‌رونده‌ی موج فشاری (شکل‌های ۸ و ۹) به علت اثرات فشرده‌شدن مجرای جریان است. به این معنا که با افزایش عمق آب در مخزن بالادست، مجرای جریان تمایل به عبور جریان بیشتری خواهد داشت که بیشتر توسط پیشانی موج فشاری ایجاد شده منتقل می‌شود. اما در عین حال بخش سطح آزاد جریان نیز نسبت به شرایط پیشین، جریان بیشتری را عبور خواهد داد که باعث افزایش عمق سطح آزاد جریان خواهد شد. لازم به ذکر است که به دلیل حساسیت الگوی عددی به کار گرفته شده برای حل مدل پیشنهادی، وجود کوچک‌ترین نوسان در سطح آب منجر به ناپایداری غیرخطی خواهد شد. این امر در شرایط مسئله‌ی مورد بررسی بسیار حساس‌تر است، چرا که قطر کم مجرا و کوچک بودن نسبت نوسانات به عمق جریان سبب می‌شود تا علی‌رغم ضمنی بودن الگو، نوسانات کوچک نیز به ناپایداری روش منجر شود. در اینجا برای مستحکم کردن نوسانات به وجود آمده در



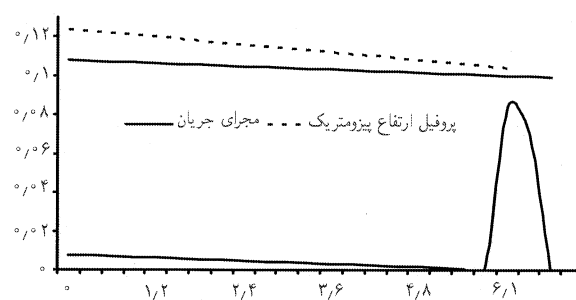
شکل ۸. وضعیت پیشروی موج براساس نتایج مدل ارائه شده.<sup>[۷]</sup>



شکل ۹. وضعیت پیشروی موج براساس نتایج مدل پیشنهادی.



شکل ۵. پروفیل سطح آب جریان دائمی با سطح آزاد.

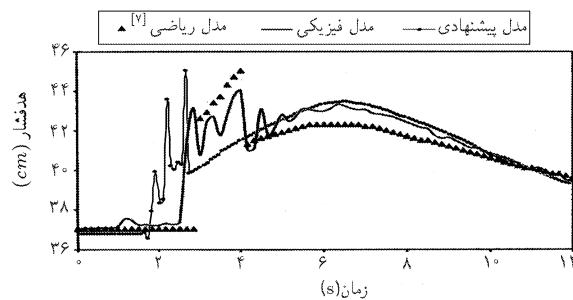


شکل ۶. ارتفاع پیزومتریک مجرا در حالت ماندگار نهایی.

نتایج مدل پیشنهادی موقعیت شماره ۵ پس از  $2$  ثانیه به حالت تحت فشار درمی‌آید. هرچند تفاوت موجود بین نتایج حاصل از مدل پیشنهادی و مدل فیزیکی زیاد نیست، بیان‌گر این نکته است که در روش شکاف مجازی سرعت پیش‌روی موج کمی بیش از سرعت پیش‌روی واقعی موج است. البته علت اختلاف زمان فشرده‌شدن موقعیت شماره ۵، احتمالاً ناشی از عدم قابلیت رابطه‌ی مانینگ در مدل‌سازی شرایط واقعی است.

مطابق شکل ۷، نتایج مدل فیزیکی پس از فشرده‌شدن موقعیت شماره ۵ نوساناتی را نشان می‌دهد. این نوسانات دارای سه قله‌ی متفاوت‌اند. نتایج مدل عددی ارائه شده<sup>[۷]</sup> نوسانات پس از فشرده‌شدن را تنها با یک قله نشان می‌دهد، در صورتی که نتایج مدل پیشنهادی همانند مدل فیزیکی این نوسانات را با سه قله‌ی مجزا نشان می‌دهد. اختلاف موجود بین بیشترین ارتفاع پیزومتریک گزارش شده در نتایج مدل پیشنهادی و مدل فیزیکی تنها  $0/4$  سانتی‌متر و معادل  $2/5\%$  است. همچنین اختلاف زمانی موجود بین قله‌های تغییر فشار در مدل پیشنهادی و مدل فیزیکی به دلیل زودتر فشرده‌شدن این نقطه در مدل پیشنهادی است که پیش‌تر به آن اشاره شد.

در بخش هموار منحنی تغییرات ارتفاع پیزومتریک، حداکثر ارتفاع پیزومتریک



شکل ۷. مقایسه نتایج مدل پیشنهادی، مدل فیزیکی و مدل ریاضی.<sup>[۷]</sup>

۳. علی‌رغم اغلب مدل‌های تحلیل جریان‌های مختلط (حتی برنامه‌هایی مثل SWMM) که برای فرار از مشکلات عدم هم‌گرایی، سرعت جریان موج فشاری را در جریان‌های تحت فشار بسیار کم در نظر می‌گیرند، در مدل‌سازی فوق به‌راحتی می‌توان به مقادیر واقعی آن نزدیک شد. این امر در مسائل کاربردی که ابعاد مجاری جریان بیش از نمونه‌های آزمایشگاهی است، به وضوح مشاهده می‌شود و حتی می‌توان این میزان را تا ۱۰۰۰ متر بر ثانیه نیز افزایش داد.
۴. پیشنهاد می‌شود در صورت امکان از الگوهای صریحی که خاصیت استهلاکی مناسبی دارند به‌منظور حل عددی روش شکاف مجازی استفاده شود؛ زیرا الگوهای ضمنی مستلزم حل دستگاه معادلات غیرخطی با استفاده از روش‌های تکراری‌انده و زمان محاسبات نسبتاً زیادی را صرف خواهد کرد.
۵. پیشنهاد می‌شود به‌منظور تکمیل تحلیل جریان مختلط به این روش، شبیه‌سازی پرش هیدرولیکی نیز به الگوریتم برنامه اضافه شود. چراکه روش شکاف مجازی ابتدائاً فقط قابلیت مدل‌سازی جریان‌های زیر بحرانی را دارد، در حالی که ممکن است عمق ثانویه‌ی یک پرش هیدرولیکی منجر به فشرده‌شدن مجرای جریان شود.
۸. نتیجه‌گیری
۱. روش شکاف مجازی پرایزمن به دور از پیچیدگی‌های سایر روش‌ها، به‌راحتی و با استفاده از معادلات جریان سطح آزاد، به تحلیل جریان مختلط می‌پردازد. همچنین علی‌رغم فرض‌های ساده‌کننده‌ی این روش، روش شکاف مجازی در تحلیل جریان‌های مختلط کاربردی ساده و نتایجی با دقت مناسب دارد.
۲. نتایج مدل پیشنهادی تا حد قابل قبولی با نتایج حاصل از مدل فیزیکی تطابق داشته و نسبت به مدل عددی ارائه شده<sup>[۱]</sup> که مبتنی بر روش برزش شوک است، به نتایج اندازه‌گیری بسیار نزدیک‌تر است. به‌طورکلی روش شکاف مجازی نسبت به روش برزش شوک — علی‌رغم قابلیت‌های این روش — در این مدل دقیق‌تر و کارآمدتر است.

## پانویس

1. depressurization
2. pressurization
3. mixed flow
4. manhole
5. isolated system
6. transient mixed flow
7. shock fitting
8. interface
9. slot method
10. shock fitting method
11. rigid water column approach
12. fifth-order runge-kutta algorithm
13. finite difference method

## منابع

1. Calame, J. "Calcul de l'onde translation dans les canaux d'usines", Editions la Concorde, Lausanne, Switzerland (1932).
2. Meyer-Peter, E. and Favre, H. "Ueber die eigenschaften

von schwallen und die berechnung von unterwasserstollen", *Schweizerische Bauzeitung*, **100**(4-5), pp. 43-50, 61-66 (1932).

3. Preissmann, A. and Cunge, J.A. "Calcul des intumescences sur machines électroniques", IX Meeting, International Assoc. for Hydraulic Research, Dubrovnik (1961).
4. Song, C.S.; Carle, J.A. and Leung, K.S. "Transient mixed flow models for storm sewers", *Jour., Hyde. Div., Amer. Soc. Of Civil Engrs.*, **109**, pp. 1487-1504 (1983).
5. McCorquodale, J.A. and Hamam, M.A. "Modelling surcharged flow in sewers", Proc. Int. Symp. On Urban Hydr., Hydr. And Sediment Control, University of Kentucky, Lexington, Ky., pp. 331-338 (1983).
6. Li, J. and McCorquodale, J.A. "Modelling mixed flow in storm sewers", *Journal of Hydraulic Engineering*, ASCE, **125**(11), pp. 1170-1180 (1999).
7. Musandji Fuamba, M. "Contribution on transient flow modelling in storm sewers", *Journal of Hydraulic Research*, **40**(6), pp. 685-693 (2002).
8. Chaudhry, M.H. "Applied hydraulic transient", 2d Ed, Van Nostrand Reinhold Company, New York. N.Y. (1987).