

ملاحظات در باره روش انتگرال گیری ضمنی مدل خمیری منطری - دافالیس

عباس گنجی (کارشناس ارشد)

محمد کاظم جعفری (استاد)

محسن کامالیان (دانشیار)

جعفر نجفی زاده* (دانشجوی دکتری)

پژوهشگاه بین المللی زلزله شناسی و مهندسی زلزله

مهندسی عمران شریف، (تابستان ۱۳۹۳)
دوری ۲-۳، شماره ۲، ص. ۱۰۷-۱۱۶، (یادداشت شی)

در این نوشتار، تشریح و مقایسه عملکرد دو روش انتگرال گیری روش های ضمنی، یعنی روش CPPM (نزدیک ترین نقطه ی تصویر شده) و روش CPM (صفحات کاهشی)، مورد واکاوی قرار گرفته است. به منظور عددی سازی، مدل خمیری منطری - دافالیس (۱۹۹۷-۲۰۰۴) به کار گرفته شده است. بر اساس نتایج این پژوهش، روش CPPM از پایداری قدرتمندی برای انتگرال گیری روابط مورد نظر در شرایط تغییر شکل های بزرگ و به طور خاص، پدیده ی روان گرایی، بهره می برد. در مقابل روش CPM از دقت بالاتر، زمان محاسباتی کمتر و از سادگی غیر قابل انکاری سود می برد. نهایتاً، این پژوهش قصد دارد با ارائه ی هم زمان مزایا و معایب هر یک از روش های مذکور و در محدوده ی مشخص، پژوهشگران را در انتخاب الگوریتم مناسب برای انتگرال گیری از روابط مدل های رفتاری با توجه به شرایط خاص پژوهش مورد نظر یاری کند.

abbasganji@gmail.com
jafari@iiees.ac.ir
kamalian@iiees.ac.ir
j.najafizadeh@iiees.ac.ir

واژگان کلیدی: نزدیک ترین نقطه ی تصویر شده، صفحات کاهشی، انتگرال گیری صریح، انتگرال گیری ضمنی، مدل رفتاری.

۱. مقدمه

شرط تسلیم را در یک تفرانس مشخص و تعیین شده ارضاء می کنند. علاوه بر این، روش های مذکور به جداسازی سهم کشسان و خمیری در یک نمو کرنش احتیاج ندارند. در آثار اورتیز - سیمو (۱۹۸۶) و همچنین کریسفیلد (۱۹۹۱ و ۱۹۹۷) می توان تشریح کاملی از روش های به کار برده شده در روش ضمنی را یافت.^[۱-۵] یکی از مشهورترین این رویه ها، الگوریتم برگشتی اوپلر است، که در ادبیات فنی اغلب با عنوان Return Mapping Algorithm شناخته می شود. در این الگوریتم، مقادیر تنش در نقطه ی هدف به کمک شیب مدول کشسان و یا شیب سکانتی حدس زده می شود. سپس به کمک یک الگوریتم، تکرار و اصلاح مثل الگوریتم نزدیک ترین نقطه به سطح تسلیم بازگردانده می شود. با ارضاء شرط تسلیم، نقطه ی تنش پذیرفته و گام بعد آغاز می شود. الگوریتم برگشتی نیوتن در مطالعات خمیری به طور گسترده یی مورد استفاده بوده است، چرا که این روش همه ی داده های مورد نیاز برای تشکیل ماتریس سختی را ارائه می دهد. این ماتریس که اولین بار در سال ۱۹۸۵ ارائه شد، شامل ترم دوم بسط تیلور معادلات مدل های رفتاری، که معمولاً حذف می شد، بود.^[۶] این موفقیت زمانی به یک دستاورد چشمگیر تبدیل شد که توانست هم گرایی مرتبه ی دوم را برای پژوهشگران به ارمغان آورد.^[۷، ۸] با این تفصیل، این الگوریتم قوی به هر حال دشواری های بیشتری نسبت به الگوریتم های صریح دارد. چرا که در این روش، مشتقات دوم سطوح تسلیم، توابع پتانسیل خمیری و

یکی از مراحل کلیدی در تحلیل مسائل ژئوتکنیکی به روش اجزاء محدود یا تفاضل محدود، انتگرال گیری از روابط تنش کرنش و مدل رفتاری در محاسبه ی نمو های تنش در نقاط گوسی است. این روابط، یک دستگاه معادلات دیفرانسیل معمولی را تعریف می کند. برای حل این دستگاه، روش های عددی به کار گرفته می شود که می توان آن ها را در دو دسته ی کلی صریح^۱ و ضمنی^۲ تقسیم بندی کرد. در روش های انتگرال گیری صریح، برای حل مسئله نیاز به الگوریتم های تکراری است؛ اما هیچ شرط کنترلی وجود ندارد که الزام به بازگرداندن تنش های نهایی و پارامترهای سخت شونده یی به سطح تسلیم شود.^[۱، ۲]

در انتگرال گیری ضمنی، گرادیان و قوانین سخت شونده یی در تنش های مجهول، در الگوریتم های تکراری، محاسبه صورت می گیرد، که باعث افزایش حجم محاسبات عددی در مدل های رفتاری پیچیده می شود. اما عملاً هر دو روش برای انتگرال گیری از روابط مدل های رفتاری پیشرفته در مکانیک خاک به مقدار زیاد مورد استفاده قرار گرفته است، که به ندرت این روش ها و جزئیات محاسباتی شان به طور کامل تشریح شده اند. روش های ضمنی واقعاً جذاب هستند، چون تنش ها به طور خودکار

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۳/۳، اصلاحیه ۱۳۹۱/۱۱/۲، پذیرش ۱۳۹۱/۱۱/۱۷

۲. روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی

روش‌های ضمنی مورد استفاده در عددی‌سازی مدل‌های رفتاری، اساساً برگرفته از الگوریتم برگشتی هستند. در پژوهشی در سال ۱۹۸۵، این الگوریتم برای عددی‌سازی رفتار خاک به‌کار گرفته شد.^[۱۹] روش‌های مبتنی بر الگوریتم برگشتی از رابطه‌ی کلی $\Delta \varepsilon : D^e = \sigma_{n+1}^{tr,i} - \sigma_n$ تبعیت می‌کنند. این رابطه، نحوه‌ی تعیین تنش را محاسبه می‌کند؛ اما از آنجا که برای محاسبه‌ی تنش، هر گام نیازمند تخمین هم‌زمان کرنش خمیری است، بنابراین روش ضمنی نامیده می‌شود. این بدان معناست که در هر گام، با اصلاح (افزایش) مقدار کرنش خمیری از مقدار اولیه‌ی صفر، تنش نیز محاسبه و سپس با شرط پیوستگی کنترل می‌شود و در صورت سازگاری پذیرفته و در غیر این صورت مجدداً اصلاح انجام می‌شود. در حالی‌که در روش‌های صریح، در صورت وجود تغییرشکل‌های خمیری، فقط به تقسیم و کوچک‌سازی تنش‌های همان گام و نه تنش‌های خمیری پرداخته می‌شود. از نظر تئوری، تفاوت روش‌های صریح و ضمنی را می‌توان به‌سادگی در روش‌های اویلر پیشرو و اویلر پسرو مشاهده کرد.

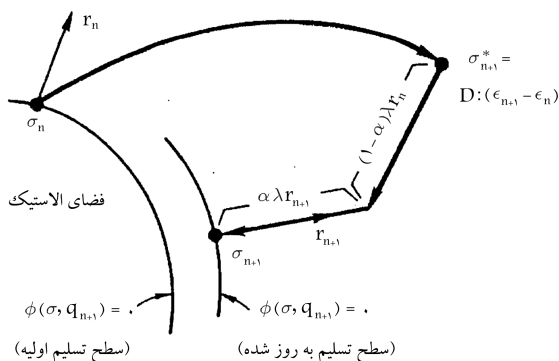
به‌دلیل ویژگی‌های ممتاز و توانایی بالای الگوریتم برگشتی، روش‌های مختلفی با این رویکرد توسط پژوهشگران ارائه شده‌اند. یک رابطه‌ی کلی برای ویژگی این روش‌ها برگرفته از رابطه‌ی کلی محاسبه‌ی تنش خمیری است، که به‌صورت رابطه‌ی ۱ تعریف می‌شود:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_{n+1}^{tr,i} - \langle L \rangle D^e ((1 - \alpha)R_n + \alpha R_{n+1}) \quad (1)$$

که در آن، تعیین مقدار α می‌تواند این روش‌ها را تبیین کند. شکل ۱، تأثیر α را نشان می‌دهد.

مقادیر α تعیین‌کننده‌ی روش‌های مختلفی هستند که بر اساس این الگوریتم عمل می‌کنند. دو نمونه از این روش‌ها، روش نزدیک‌ترین نقطه‌ی تصویر که به ازاء $\alpha = 1$ و روش صفحات برشی که به ازاء $\alpha = 0$ قابل حصول است. روش صفحات برشی، جهت بردار برگشت را بر مسیر عمود بر تابع تسلیمی، که بر روی آن قرار گرفته است، بر می‌گزیند (شکل ۲ب)، حال آنکه روش نزدیک‌ترین نقطه‌ی تصویر، مسیر برگشت را در جهتی می‌پیماید که بر تابع تسلیمی که بر آن فرود می‌آید عمود باشد (شکل ۲الف).

در روش‌های الگوریتم ضمنی، به‌جز این دو روش روش‌های دیگری نیز از این الگوریتم استخراج و مورد توجه بوده است، که از مهم‌ترین آن‌ها می‌توان به روش‌های Radial Return Mapping و Central Return Mapping اشاره کرد.^[۲۰]



شکل ۱. طرح شماتیک الگوریتم برگشتی در روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی.^[۲۰]

سخت‌شوندگی‌های همسان یا سینماتیکی مورد نیاز است. در سال‌های ۱۹۹۰ و ۱۹۹۱، یک بحث منسجم در انواع رویه‌های به‌کار گرفته‌شده در روش‌های ضمنی ارائه شد.^[۹، ۲۰] در سال ۲۰۰۹، نیز با استفاده از الگوریتم نزدیک‌ترین نقطه‌ی تصویر، مدل رفتاری موه‌ر کلمب^۳ با دقت بسیار بالایی نسبت به روش‌های عددی دیگر شبیه‌سازی شد.^[۱۱] در مقایسه با روش‌های ضمنی، روش‌های صریح، به این دلیل که از مشتقات مرتبه‌ی اول قوانین کشسان خمیری استفاده می‌کنند، مزیت‌های سادگی و فهم آسان عددی‌سازی را دارند. این روش‌ها در ژئوتکنیک در سال‌های ۱۹۸۳ و ۱۹۸۷ مورد بحث و بازبینی قرار گرفته‌اند.^[۱۳، ۱۲] دقت و کارایی این روش‌ها توسط برخی پژوهشگران با استفاده از روش‌های کنترل خطای تنش محاسباتی بهبود پیدا کرده است. برخلاف روش‌های ضمنی، روش‌های صریح به حل معادلات غیرخطی محاسبات تنش نیازی ندارد.

در سال‌های گذشته، چند پژوهش روی مقایسه‌ی این دو دسته روش‌ها انجام شده است. در مطالعاتی در سال‌های ۱۹۹۲ و ۱۹۹۴، عملکرد الگوریتم برگشتی اورتیز و سیمو (۱۹۸۶) با روش صریح ارائه‌شده‌ی اسلوان (۱۹۸۷) مقایسه شد.^[۱۴، ۱۵] این مطالعه که روی مدل Modified Cam Clay انجام شده بود، به‌عنوان نتیجه‌ی این مقایسه، روش اسلوان را کارا تر معرفی کرد. در مطالعه‌ی دیگری در سال ۱۹۹۳، الگوریتم‌های صریح رانج کوتا^۴ و اویلر پیش‌رونده با الگوریتم اورتیز و سیمو مقایسه شد.^[۱۶] طبق این مقایسه، روش رانج کوتا مزایای بیشتری نسبت به روش‌های ضمنی دارد. اما یک مطالعه مهم و تعیین‌کننده‌ی منظری و پراچانانویتک (۲۰۰۱) روی مدل‌های دوسطحی، به‌طور کل و به‌طور خاص روی مدل رفتاری مدل منظری - دافالیاس (۱۹۹۷) انجام شد.^[۱۷] به‌عنوان نتیجه‌ی این مطالعه، اولاً روش اویلر اصلاح‌شده با کنترل خطای ارائه‌شده در سال ۱۹۸۷ دارای سادگی و سرعت بالایی است. ثانیاً، روش صفحات برشی^۵، که یکی از روش‌های چارچوب بازگشتی است، علاوه بر سادگی از خطاهای پایین هم بهره‌مند است. و نهایتاً، روش نزدیک‌ترین نقطه، که یکی دیگر از روش‌های الگوریتم بازگشتی است، یگانه روش پایدار در شرایط ویژه، نظیر روان‌گرایی، است.

همچنین پژوهشگرانی در سال ۲۰۱۲ به مقایسه و بررسی دقت و پایداری روش‌های عددی ضمنی و صریح بر روی مدل رفتاری بارسلونا پرداختند و به این نتیجه رسیدند که روش الگوریتم صریح، پیچیدگی کمتر محاسباتی و دقت بالاتری نسبت به روش ضمنی دارد و در استفاده از الگوریتم ضمنی به هم‌گرایی سریع و زمان محاسباتی بیشتری نسبت به روش صریح دست یافتند.^[۱۸]

هدف این نوشتار، بررسی عملکرد دو روش انتگرال‌گیری ضمنی نزدیک‌ترین نقطه‌ی تصویر و صفحات برشی و ارائه‌ی معیارهایی جهت کار بردی کردن آن‌ها، به پژوهشگران در انتخاب روش مناسب است (در پژوهش‌هایی که نیازمند عددی‌سازی یک مدل رفتاری است). به منظور رسیدن به این هدف، به بررسی این موارد در حل این روش‌های انتگرال‌گیری می‌پردازیم:

۱. عملکرد پایداری دو روش انتگرال‌گیری ضمنی ناشی از افزایش اندازه‌ی گام؛

۲. عملکرد دینامیکی؛

۳. بررسی سرعت هم‌گرایی و درجه‌ی آن در روش‌های ضمنی؛

۴. بررسی میزان خطا و زمان مورد نیاز حل روش انتگرال‌گیری‌های ضمنی.

Algorithm CPM

- شرایط آغازین

$$\mathbf{k} = \mathbf{0}, \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(0)} = \mathbf{0}, \Delta \mathbf{e}_{n+1}^{p(0)} = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{m}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0}, \mathbf{L}_{n+1}^{(0)} = \mathbf{0}$$

- پیشگویی کشسانی

$$\mathbf{p}_{n+1}^{(k)} = \left[\mathbf{p}_n^{(1-b)} + \frac{\mathbf{K}_o(1-b)}{P_{atm}^b} (\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1} - \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(k)}) \right]^{1/(1-b)}$$

$$\mathbf{s}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{s}_n + 2\mathbf{G}(\Delta \mathbf{e}_{n+1} - \Delta \mathbf{e}_{n+1}^{p(k)})$$

- کنترل وجود تغییر شکل های خمیری

$$\mathbf{f}_{n+1}^{(k)} = \left[(\mathbf{s}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{p}_{n+1}^{(k)} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}) : (\mathbf{s}_{n+1}^{(k)} - \mathbf{p}_{n+1}^{(k)} \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)}) \right]^{1/2} - \sqrt{3/2} \mathbf{m}_{n+1}^{(k)} \mathbf{p}_{n+1}^{(k)}$$

$$\text{If } \mathbf{f}_{n+1}^{(k)} < \text{Tel}_1, \text{ then Exit}$$

Else:

محاسبه شاخص بارگذاری که از معادله پیوستگی بدست می آید

$$\mathbf{L}_{n+1}^{(k)} = \mathbf{f}_{n+1}^{(k)} / (\mathbf{L}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{E}_{n+1}^{(k)} : \mathbf{R}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{K}_p^{(k)})$$

$$\mathbf{K}_p = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} : \bar{\boldsymbol{\alpha}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{m}} \bar{\mathbf{m}}$$

- به روز کردن کرنش های خمیری و سخت شوندگی ها

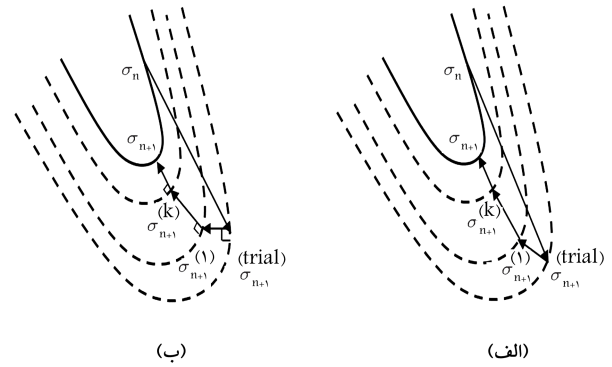
$$\Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(k+1)} = \Delta \boldsymbol{\varepsilon}_{v,n+1}^{p(k)} + \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \mathbf{D}_{n+1}^{(k)}$$

$$\Delta \mathbf{e}_{n+1}^{p(k+1)} = \Delta \mathbf{e}_{n+1}^{p(k)} + \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \mathbf{n}_{n+1}^{(k)}$$

$$\mathbf{m}_{n+1}^{(k+1)} = \mathbf{m}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \bar{\mathbf{m}}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k+1)} = \boldsymbol{\alpha}_{n+1}^{(k)} + \mathbf{L}_{n+1}^{(k)} \bar{\boldsymbol{\alpha}}$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{k} + 1, \text{ Go to III}$$



شکل ۲. تصویر روش انتگرال گیری ضمنی نزدیک ترین نقطه‌ی تصویر و صفحات برشی. [۲۱]

در این پژوهش، میانی و عملکرد دو روش نزدیک ترین نقطه‌ی تصویر (CPPM) و صفحات برشی (CPM) در حوزه‌های مختلف مورد بررسی قرار گرفته است. این تذکر لازم است که این دو روش به‌طور اجمالی در نوشتاری در سال ۲۰۰۱، [۱۷] معرفی شده‌اند. این پژوهش، این دو روش را به‌طور جامع و همه جانبه مورد مقایسه قرار داده است.

در شکل های ۳ و ۴، به‌طور خلاصه الگوریتم هر یک از روش های نزدیک ترین نقطه‌ی تصویر (CPPM) و صفحات برشی (CPM) نشان داده شده است.

۳. مدل رفتاری منظری - دافالیس

۳.۱. فرمولاسیون مدل رفتاری منظری و دافالیس [۲۲، ۲۳]

مدل رفتاری ارائه شده توسط منظری و دافالیس (۱۹۹۷) و مدل دافالیس - منظری (۲۰۰۴) یک مدل خمیری حالت بحرانی برای خاک های دانه بی است. شکل ۵، توصیف شماتیک مدل خمیری دو سطحی حالت بحرانی را در صفحه‌ی π نشان می دهد. فرمولاسیون مدل بر اساس مفهوم کلی خمیری دو سطحی و تئوری خمیری سطح حدی استوار است. در ادامه، به طور مختصر به فرمولاسیون مدل می پردازیم. برای توضیحات بیشتر به منابع [۲۳، ۲۲، ۱۷] رجوع شود.

۳.۱.۱. مدول های کشسان

مدول های کشسان، K و G ، با روابط استاندارد ۲ با فرض رفتار کشسان همسان، تعریف می شوند:

$$\dot{\varepsilon}^e = \frac{\dot{S}}{2G} \quad \text{and} \quad \dot{\varepsilon}_v^e = \frac{\dot{P}}{K} \quad (2)$$

که در آن ها، $\dot{\varepsilon}_v^e$ و $\dot{\varepsilon}^e$ به ترتیب مؤلفه های کشسان نمو های کرنش انحرافی و حجمی، \dot{S} و \dot{P} تانسور نمو تنش انحرافی و حجمی هستند. K و G از روابط ۳ به دست می آیند:

$$G = G_o \left(\frac{P}{P_{atm}} \right)^b$$

$$K = K_o \left(\frac{P}{P_{atm}} \right)^b \quad (3)$$

که در آن ها، G_o و K_o به ترتیب مدول حجمی و برشی در شروع، P_{atm} برابر با فشار اتمسفر هستند. b پارامتر مدل است که بسته به نوع خاک ها از ۰/۵ تا ۱ متغیر است.

شکل ۳. الگوریتم روش صفحات برشی (CPM).

Algorithm CPPM

• حل معادله نیوتن و محاسبه ΔU

• شرایط آغازین

$$k = 0, \Delta \varepsilon_{v,n+1}^{p(0)} = 0, \Delta e_{n+1}^{p(0)} = 0,$$

$$m_{n+1}^{(0)} = 0, L_{n+1}^{(0)} = 0$$

• پیشگویی کشسانی

$$p_{n+1}^{(k)} = \left[p_n^{(1-b)} + \frac{K_0(1-b)}{p_{atm}^b} (\Delta \varepsilon_{v,n+1} - \Delta \varepsilon_{v,n+1}^{p(k)}) \right]^{1/(1-b)}$$

$$s_{n+1}^{(k)} = s_n + 2G(\Delta e_{n+1} - \Delta e_{n+1}^{p(k)})$$

• کنترل وجود تغییر شکل های خمیری

$$f_{n+1}^{(k)} = \left[(s_{n+1}^{(k)} - p_{n+1}^{(k)} \alpha_{n+1}^{(k)}) : (s_{n+1}^{(k)} - p_{n+1}^{(k)} \alpha_{n+1}^{(k)}) \right]^{1/2} - \sqrt{3/2} m_{n+1}^{(k)} p_{n+1}^{(k)}$$

If $f_{n+1}^{(k)} < Tol_1$, then Exit

Else:

• محاسبه بردار باقیمانده

$$R_1 = p_{n+1}^{(k)} - \left[p_n^{(1-b)} + \frac{K_0(1-b)}{p_{atm}^b} (\Delta \varepsilon_{v,n+1} - \Delta \varepsilon_{v,n+1}^{p(k)}) \right]^{1/(1-b)}$$

$$R_2 = \Delta \varepsilon_{v,n+1}^{p(k)} - L_{n+1}^{(k)} D_{n+1}^{(k)}$$

$$R_{3-7} = s_{n+1}^{(k)} - s_n - 2G(\Delta e_{n+1} - \Delta e_{n+1}^{p(k)})$$

$$R_{8-12} = \Delta e_{n+1}^{p(k+1)} - \Delta e_{n+1}^{p(k)} - L_{n+1}^{(k)} n_{n+1}^{(k)}$$

$$R_{13} = m_{n+1}^{(k+1)} - m_{n+1}^{(k)} - L_{n+1}^{(k)} \bar{m}$$

$$R_{14-18} = \alpha_{n+1}^{(k+1)} - \alpha_{n+1}^{(k)} - L_{n+1}^{(k)} \bar{\alpha}$$

$$R_{19} = f_{n+1}^{(k)}$$

$$T_{n+1}^{(k)} \Delta U_{n+1}^{(k)} = -R_{n+1}^{(k)}$$

ΔU شامل ۱۹ مقدار مجهول می باشد.

$$\Delta p_{n+1}^{(k)}, \Delta^2 \varepsilon_{v,n+1}^{(k)}, \Delta S_{n+1}^{(k)},$$

$$\Delta^2 e_{n+1}^{(k)}, \Delta m_{n+1}^{(k)}, \Delta \alpha_{n+1}^{(k)}, L_{n+1}^{(k)}$$

T براساس روش تکرار نیوتن قابل محاسبه است:

$$T_{n+1}^{(k)} = \partial R_{n+1}^{(k)} / \partial U_{n+1}^{(k)}$$

• به روز کردن تنش ها، کرنش های خمیری و

سخت شوندگی ها

$$p_{n+1}^{(k+1)} = p_{n+1}^{(k)} + \Delta p_{n+1}^{(k)}$$

$$\Delta \varepsilon_{v,n+1}^{p(k)} = \Delta \varepsilon_{v,n+1}^{p(k)} + \Delta^2 \varepsilon_{v,n+1}^{(k)}$$

$$S_{n+1}^{(k+1)} = S_{n+1}^{(k)} + \Delta S_{n+1}^{(k)}$$

$$\Delta e_{n+1}^{p(k+1)} = \Delta e_{n+1}^{p(k)} + \Delta^2 e_{n+1}^{(k)}$$

$$m_{n+1}^{(k+1)} = m_{n+1}^{(k)} + \Delta m_{n+1}^{(k)}$$

$$\alpha_{n+1}^{(k+1)} = \alpha_{n+1}^{(k)} + \Delta \alpha_{n+1}^{(k)}$$

$$k = k + 1$$

Go to III

شکل ۴. الگوریتم روش نزدیک ترین نقطه ی تصویر (CPPM).

$$\begin{aligned} \alpha_{\theta}^b &= g(\theta, c)M_c + g(\theta, c_b)K_c^b < -\Psi > -m \\ \alpha_{\theta}^d &= g(\theta, c)M_c + g(\theta, c_d)K_c^d < -\Psi > -m \\ \alpha_{\theta}^c &= g(\theta, c)M_c - m \end{aligned} \quad (6)$$

اندیس a در α_{θ}^a با سه مقدار b (برای سطح حدی)، c (برای سطح بحرانی) و d (برای سطح اتساعی) جایگزین می‌شود. همچنین، منظور از $< A >$ براکت ماکولی است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$< A > = \begin{cases} A & \text{if } A > 0 \\ 0 & \text{if } A \leq 0 \end{cases}$$

این معادلات شامل M_c (نسبت تنش بحرانی) و دو پارامتر ثابت مدل K_c^d و K_c^b است، که از آن‌ها برای تعیین سطوح حدی و اتساعی در فشار استفاده می‌شود. به منظور تکمیل تعریف این سطوح، تعیین M_c ، K_c^b و K_c^d ضروری است که مقادیر متناظر در کشش این سطوح هستند. پارامترهای c ، c_b و c_d نسبت‌های کشش به فشار در سطوح بحرانی، حدی و اتساعی هستند که به صورت رابطه‌ی ۷ تعریف می‌شوند:

$$\begin{aligned} c &= M_c/M_c, \quad c_b = K_c^b/K_c^b, \quad c_d = K_c^d/K_c^d \\ g(\theta, c) &= \frac{2c}{(1+c) - (1-c)\cos 3\theta} \end{aligned} \quad (7)$$

۴.۱.۳. قانون جریان^۹

نمونه‌های کرنش خمیری از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$\varepsilon^p = < L > R \quad (8)$$

که در آن، L شاخص بارگذاری است، و تانسور R (معرف جهت کرنش خمیری) به صورت رابطه‌ی ۹ تعریف می‌شود:

$$R = n + \frac{1}{3}DI \quad (9)$$

که در آن، D ضریب اتساعی است که در ادامه تعریف می‌شود.

۵.۱.۳. قوانین سخت‌شوندگی^{۱۰}

در این مدل سخت‌شوندگی همسان و سینماتیکی به صورت رابطه‌ی ۱۰ در نظر گرفته می‌شوند:

$$\begin{aligned} \dot{m} &= < L > \dot{m} = < L > C_m(1 + e_s)D \\ \dot{\alpha} &= < L > h(\alpha_{\theta}^b - \alpha) = < L > hb \end{aligned} \quad (10)$$

که در آن، C_m یکی دیگر از ثابت‌های مدل است و پارامتر اسکالر مثبت h برای مدل‌های دو سطحی به صورت رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:

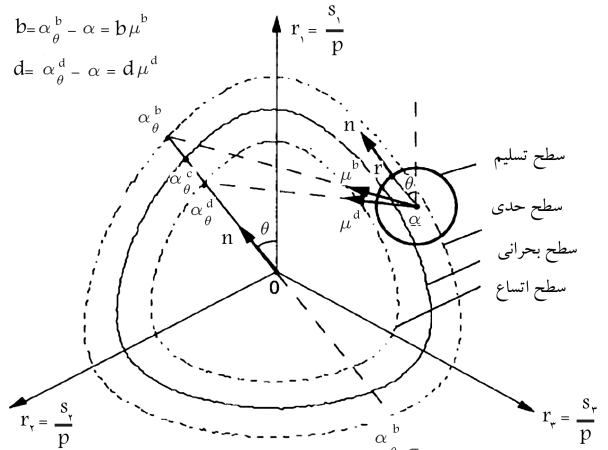
$$h = h_0 \frac{|b : n|}{b_{ref} - |b : n|} \quad (11)$$

در این روابط، h_0 مقدار ثابت مدل و b در شکل ۴ به عنوان بردار هادی تغییرات α تعریف شده است، یعنی:

$$b = \alpha_{\theta}^b - \alpha, \quad \alpha_{\theta}^b = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{\theta}^b n$$

که در آن، b_{ref} فاصله‌ی مرجع است که به این صورت تعریف می‌شود:

$$b_{ref} = 2\sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_c^b$$



شکل ۵. طرح شماتیک مدل خمیری دو سطحی در صفحه‌ی π . [۱۶]

۲.۱.۳. تابع تسلیم^۷

تابع تسلیم به صورت رابطه‌ی ۴ بیان می‌شود:

$$f(\sigma, \alpha, m) = \sqrt{(r : r)} - \sqrt{2/3}mp \quad (4)$$

که در آن، p به عنوان تنش مؤثر میانگین، m شعاع سطح تسلیم (سخت‌شوندگی همسان) و $r = S - p\alpha$ است، S تانسور تنش انحرافی و α تانسور انحرافی (سخت‌شوندگی سینماتیکی) نشان‌دهنده‌ی موقعیت مرکز سطح تسلیم است. سطح تسلیم، یک مخروط با سطح مقطع دایره‌ی در صفحه‌ی π است. بردار عمود بر سطح تسلیم، به صورت بردارهای تابع تسلیم در نقطه‌ی تنش به صورت $n = r/\sqrt{r : r}$ تعریف می‌شود، که در آن $L = \partial f / \partial \sigma = n - 1/3NI$ تانسور مرتبه‌ی دوم همسان، $N = \alpha : n + 2/3m$ است. ضرب ماتریسی به کار برده شده در روابط مذکور از رابطه‌ی $A : B = A_{ij}B_{ji}$ به دست می‌آید.

۳.۱.۳. سطوح حدی و اتساعی^۸

رفتار خاک‌های دانه‌ی، روابط و پارامترهای مدل‌های رفتاری به جهت مسیر تنش وابستگی دارند. نامتغیر سوم تانسور تنش این امکان را فراهم می‌سازد که بتوان این تأثیر را در مدل‌های رفتاری تبیین کرد. امروزه در ادبیات فنی مدل‌سازی رفتار خاک این پارامتر به کمک زاویه‌ی لود (θ) در مدل‌های پیشرفته اعمال می‌شود (رابطه‌ی ۵):

$$\begin{aligned} \cos(3\theta) &= \frac{3\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\bar{S}}{\bar{J}} \right)^2 \\ \bar{J} &= \left[\frac{1}{2} tr(\bar{r}^2) \right]^{1/2} \\ \bar{S} &= \left[\frac{1}{3} tr(\bar{r}^2) \right]^{1/2} \\ \bar{r} &= r/p \end{aligned} \quad (5)$$

سطوح حدی، اتساعی و بحرانی به صورت رابطه‌ی ۶ تعریف می‌شوند، که به وابسته‌اند:

$$\alpha_{\theta}^a = \sqrt{\frac{2}{3}} \alpha_{\theta}^a n, \quad a = b, c, d$$

۶.۱.۳. ضریب اتساعی^{۱۱}

ضریب اتساعی D ، طبق رابطه‌ی ۱۲ به دست می‌آید:

$$D = A(\alpha_{\theta}^d - \alpha) : n = Ad : n = Ad\mu^d : n \quad (12)$$

که در آن، A پارامتر مثبت، تانسور α_{θ}^d تصویر حالت تنش جاری بر روی سطح اتساعی است. تانسور μ^d ، تانسور واحد در جهت $d = (\alpha_{\theta}^d - \alpha)$ و n تانسور انحرافی یکه است.

شکل ۷، مقایسه‌ی منحنی عددی مدل با نتایج مدل منظری و نتایج آزمایشگاهی سه محوری بر روی ماسه‌ی نوادا (آزمایش‌های انجام‌شده‌ی آرومولولی و همکاران (۱۹۹۴)) را نشان می‌دهد. در شکل ۷، تشابه مناسبی بین نتایج به‌دست‌آمده از حاصل عددی‌سازی روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی با نمودارهای مدل منظری و آزمایش‌های آزمایشگاهی مشاهده می‌شود. بنابراین همان‌طور که در شکل‌های ۶ و ۷ نشان داده شده است، برنامه‌نویسی انجام‌شده در خصوص عددی‌سازی الگوریتم، روش‌های ضمنی دارای دقت و صحت مناسبی هستند.

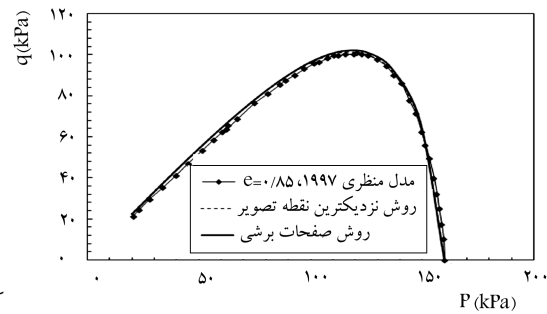
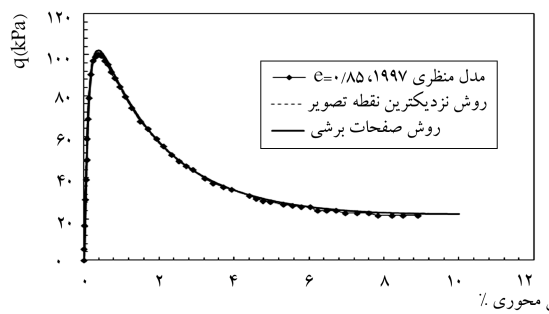
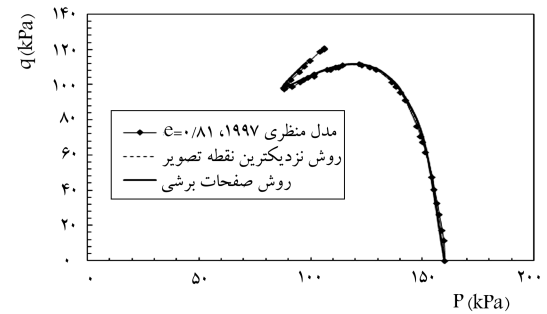
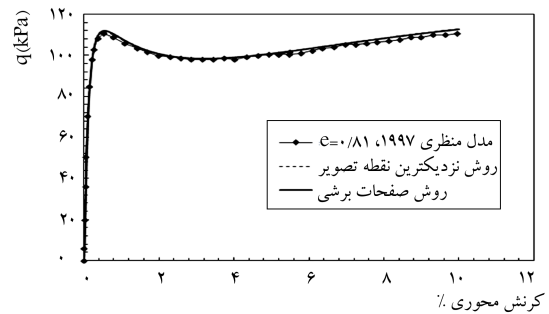
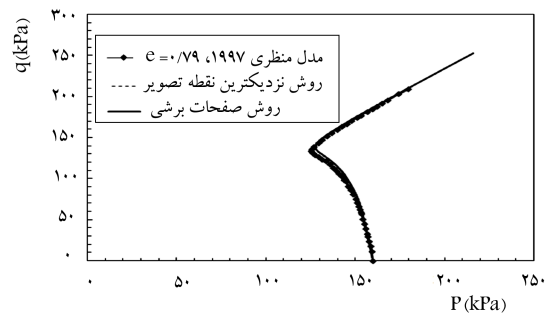
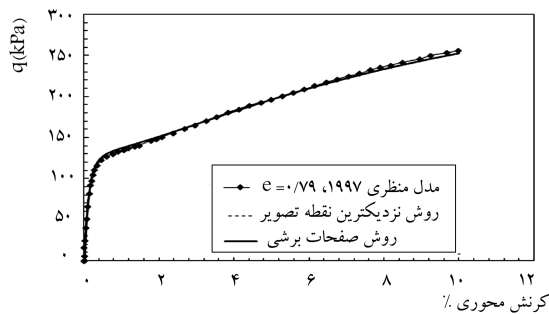
۴. صحت‌سنجی برنامه

ابتدا الگوریتم مدل رفتاری منظری با روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی نزدیک‌ترین نقطه‌ی تصویر، صفحات برشی، با استفاده از زبان برنامه‌نویسی فورتن در حالت کنترل کرنش برای بارگذاری استاتیکی و دینامیکی، عددی‌سازی شد. سپس جهت صحت‌سنجی عددی‌سازی روش‌های به‌کار برده‌شده، مثال‌های ذکرشده در مقاله‌ی منظری (۱۹۹۷) با روش‌های مذکور مقایسه شد. شکل ۶، نتایج حاصل از عددی‌سازی روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی را با مدل رفتاری منظری نشان می‌دهد. در این مثال، پارامترهای مورد استفاده در مدل رفتاری عیناً مطابق مثال عددی مدل رفتاری منظری (۱۹۹۷) است. مطابق شکل ۶، منحنی‌های به‌دست‌آمده کاملاً مشابه منحنی‌هایی است که در نوشتار منظری (۱۹۹۷) ارائه شده است.

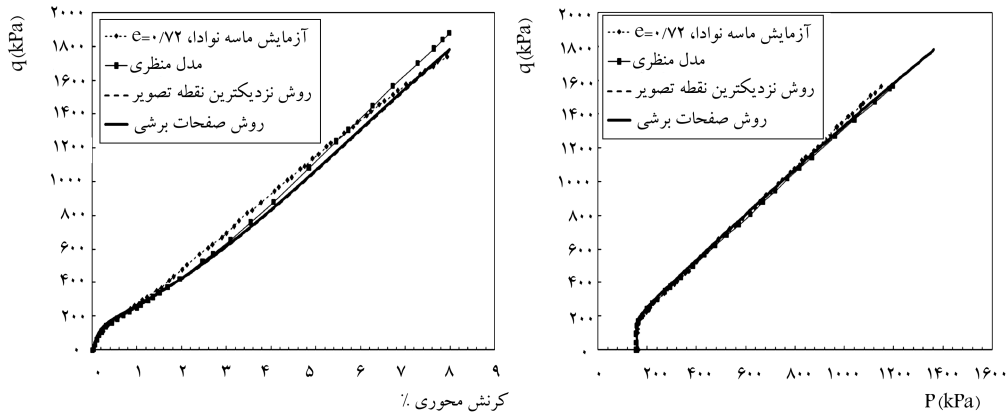
۵. تحلیل و آنالیز روش‌های عددی

۱.۵. پایداری

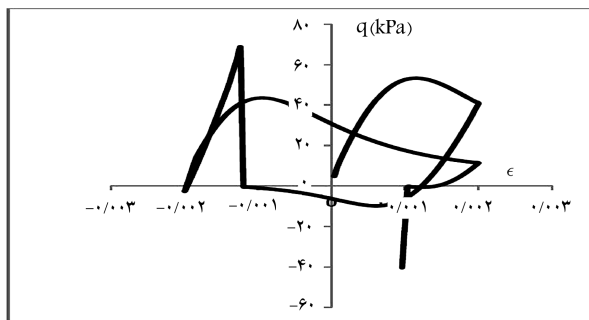
پایداری روش‌های عددی یکی از پارامترهای مؤثر در کارایی و دامنه‌ی استفاده‌ی آنهاست. در این بخش، پایداری روش‌های عددی مورد استفاده از دو منظر بررسی شده‌اند. مسئله‌ی اول، میزان پایداری این روش‌ها در برابر اندازه‌ی هرگام است که تأثیر غیرقابل انکاری در کارایی روش‌ها می‌گذارد. بدیهی است روش‌هایی که پایداری آن‌ها کمتر از تابع اندازه‌ی گام باشد، ارزشمندتر تلقی می‌شوند. در این نوشتار، این مسئله برای چندین مسیر بارگذاری استاتیکی و دینامیکی مورد مطالعه و بررسی قرار گرفته است. یک حل معادله به کمک روش عددی وقتی پایدار است که خطای گردکردن



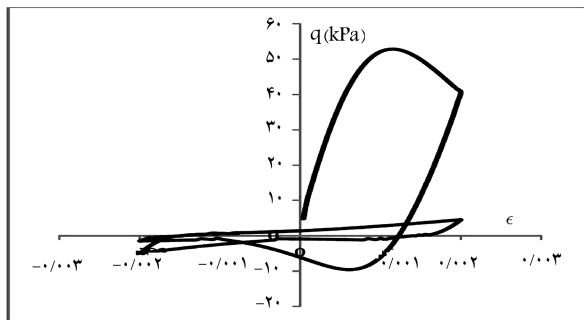
شکل ۶. مقایسه‌ی عددی‌سازی روش‌های انتگرال‌گیری ضمنی با مثال نوشتار منظری (۱۹۹۷) ($e_c = 0.8$ & $P = 160$ KPa).



شکل ۷. مقایسه‌ی منحنی عددی‌سازی با نتایج مثال نوشتار منظری (۱۹۹۷) و نتایج آزمایشگاهی سه محوری بر روی ماسه‌ی نوادا (۱۹۹۴).



CPM ($P=160 \text{ kPa}$ & $e=0.85$)



CPPM ($P=160 \text{ kPa}$ & $e=0.85$)

شکل ۸. ناپایداری تحلیل عددی روش CPM و پایداری روش CPPM در شرایط روان‌گرایی.

بزرگ و پدیده‌ی روان‌گرایی، ($P \rightarrow 0$)، در روش CPPM پایدار و هم‌گرا باقی می‌ماند؛ در حالی که در روش CPM به سمت ناپایداری حرکت می‌کند. بنابراین برای حل و تحلیل مسائل روان‌گرایی لازم است از روش ضمنی CPPM استفاده شود.

۲.۵ هم‌گرایی

از دیگر فاکتورهای مهم و تأثیرگذار، روش عددی هم‌گرایی است. در هم‌گرایی هر روش عددی، دو سؤال مهم مطرح است: آیا این روش وقتی که اندازه‌ی گام‌ها به صفر نزدیک می‌شود، به جواب کامل هم‌گرا می‌شود؟ و اگر جواب

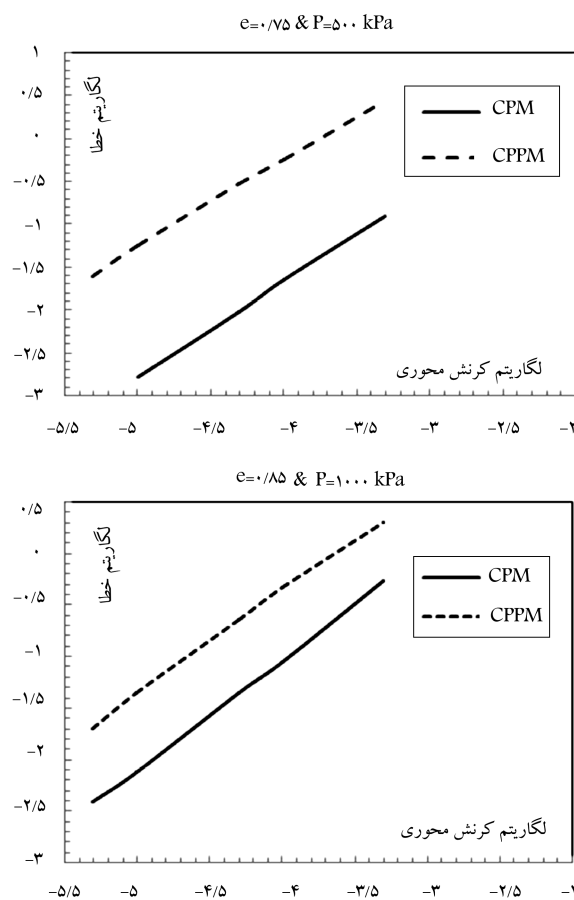
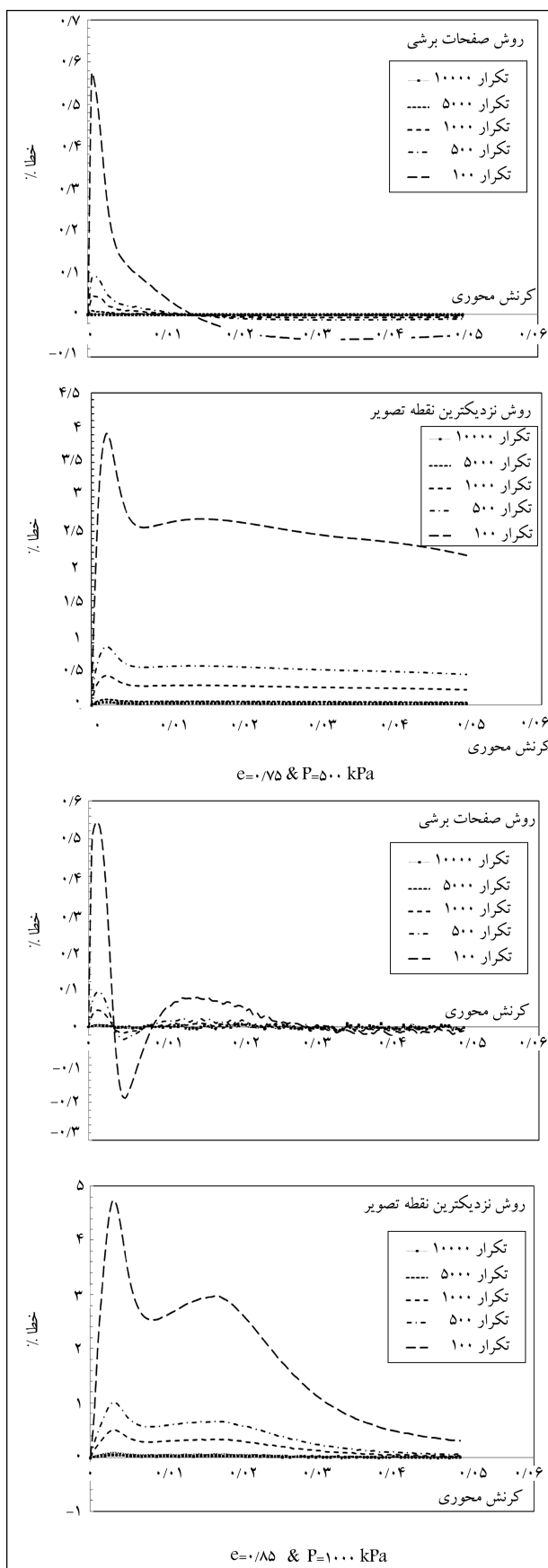
در مقایسه با جواب دقیق کوچک باقی بماند. بزرگ‌شدن اندازه‌ی گام باعث افزایش خطا و ناپایداری سیستم می‌شود. مسئله‌ی افزایش خطا در قسمت بعدی مورد بررسی قرار می‌گیرد. در روش‌های ضمنی ذاتاً مسئله‌ی مقدار اندازه‌ی گام موجب ناپایداری نخواهد شد. مطالعات انجام‌شده در این نوشتار، بر روی بارگذاری‌های کنترل کرنش، در حالت استاتیکی و دینامیکی در کلاس روش‌های ضمنی پایداری غیر قابل انکاری را نشان می‌دهد.

امروزه بخش زیادی از پژوهش‌های پژوهشگران ژئوتکنیکی بر روی مطالعه‌ی رفتار خاک و اندرکنش با سازه‌های مجاور در حضور پدیده‌ی روان‌گرایی متمرکز شده است. روان‌گرایی پدیده‌ی است ژئوتکنیکی که در بارگذاری‌های سیکنی و رفت و برگشتی همانند زلزله می‌تواند منجر به کرنش‌های بزرگی شود، این در حالی است که عمده‌ی روابط تئوری و روش‌های حل این روابط در شرایط تغییرات کوچک قابل کاربرد است. مطمئناً یکی از مهم‌ترین این روابط، الگوریتم‌های روش‌های عددی محاسبه‌ی رفتار خاک است. از این رو یک مزیت مهم برای هر روش عددی، پایدارماندن در شرایط روان‌گرایی است. همان‌طوری که در ادامه قابل مشاهده است، بقاء بر پایداری در شرایط روان‌گرایی به‌عنوان عاملی مهم در انتخاب یک روش عددی و میزان کارایی‌های آن مورد بررسی و کنکاش بوده است.

اورتز و پوپوف (۱۹۸۵) پایداری، دقت و سرعت هم‌گرایی روش‌های ضمنی مبتنی بر الگوریتم برگشتی را به‌طورکلی مورد بررسی قرار دادند. پایداری روش‌های عددی قبل از نوشتار مذکور، اغلب برای معادلات خطی قابل اثبات بوده است. لیکن در این نوشتار، روش جدیدی برای بررسی پایداری الگوریتم‌های معادلات رفتاری کسسان‌خمیری ارائه شده است. این بررسی تأثیر شکل صفحه‌ی بارگذاری و مقدار ضریب α را در پایداری الگوریتم‌های مشتق‌شده از روش برگشتی نشان می‌دهد. مطابق این بررسی، روش CPPM فقط در شرایط $\alpha = 1$ به پایداری غیرمشروط منجر می‌شود، که این نشان از قدرت و مزیت بالای این روش حکایت می‌کند. صرف‌نظر از نتایج با ارزش فوق، نتایج اجرای برنامه‌های هر یک از این دو روش به‌خوبی نشان می‌دهد، روش CPPM تنها الگوریتمی است که در برابر تغییرشکل‌های بسیار بزرگ و پدیده‌ی روان‌گرایی در مقابل روش CPM پایدار باقی می‌ماند. همین برتری، علت استفاده‌ی گسترده‌ی پژوهشگران از این روش را، علی‌رغم دشواری‌های بسیار بیشتر در برابر دیگر روش‌ها، نشان می‌دهد. شکل ۸، ناپایداری تحلیل عددی روش CPM و پایداری روش CPPM را در حالت روان‌گرایی نشان می‌دهد. مطابق این شکل، تحلیل عددی مسئله در شرایط تغییرشکل‌های بسیار

مثبت است، سرعت این هم‌گرایی چقدر است؟ منظور از هم‌گرایی این روش آن است که به ازاء هر مقدار ثابت x در بازه‌ی مورد نظر X با کوچک‌تر کردن اندازه‌ی گام‌ها، دنباله‌ی مقادیر y به جواب کامل $Y(x)$ میل کند. مقصود از سرعت هم‌گرایی آن است که اگر فرضاً اندازه‌ی پله‌ها را نصف کردیم، خطاها چه میزان کاهش می‌یابد. برای این منظور میزان خطا تابعی توانی از اندازه‌ی گام به صورت $Error = ch^p$ تعریف می‌شود، که مقدار p نشان‌دهنده‌ی سرعت هم‌گرایی یا درجه‌ی هم‌گرایی است. بنابراین افزایش سرعت هم‌گرایی، عامل تعیین‌کننده‌ی برای استفاده از روش‌های عددی است. ذکر این نکته خالی از لطف نیست که گاهی در نقاطی که مقدار تابع به صفر نزدیک می‌شود، نظم توصیف‌شده معشوش می‌شود؛ که به علت نوع تعریف خطا و گردکردن هر گام است.

برای به‌دست‌آوردن درجه‌ی هم‌گرایی یک روش عددی، دو استراتژی می‌تواند به‌کار گرفته شود: ۱. اثبات ریاضی به کمک سری تیلور، ۲. استفاده از روابط تجربی. در سال ۱۹۸۵، اورتیز و پیوو، درجات هم‌گرایی روش‌های برگرفته از الگوریتم برگشتی را متناسب با ضریب α محاسبه و اثبات کرده‌اند. بر اساس این پژوهش، به ازاء تمامی مقادیر α ، این الگوریتم از درجه‌ی اول هم‌گرایی برخوردار است، اما $\alpha = 1/2$ در این الگوریتم از هم‌گرایی مرتبه‌ی دوم برخوردار است و لذا هر دو روش ضمیمی، که در این پژوهش به‌کار گرفته شده‌اند، هم‌گرایی مرتبه‌ی اول دارند. همان‌طور که گفته شد، علاوه بر روش‌های تئوری می‌توان از روش تجربی برای محاسبه‌ی مرتبه‌ی هم‌گرایی هر یک از روش‌های فوق استفاده کرد. در این



جدول ۱. خلاصه‌ی نتایج روش CPM و CPPM.

روش	CPM	CPPM
پایداری در برابر اندازه‌ی گام	قوی	قوی
پایداری در برابر روان‌گرایی	ناپایدار	پایدار
هم‌گرایی و درجه‌ی هم‌گرایی	هم‌گرایی نامحدود (مرتبه‌ی یک)	هم‌گرایی نامحدود (مرتبه‌ی یک)
مقایسه‌ی خطا و دقت	E	(۲۰ - ۵) E
مقایسه‌ی زمان مورد نیاز	T	(۲۰ - ۵) T
میزان سادگی نوشتن برنامه	نسبتاً ساده	بسیار دشوار

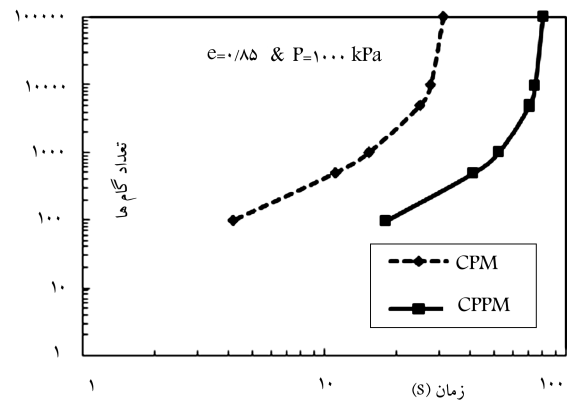
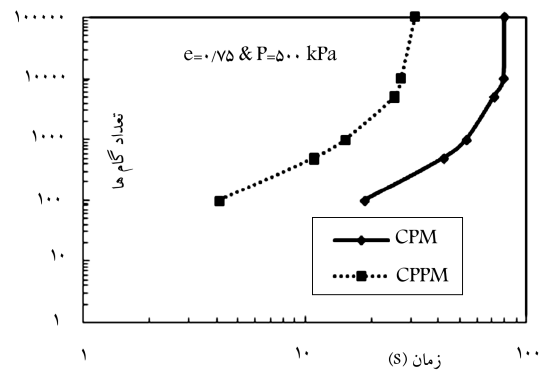
روش CPPM به ۵٪ می‌رسد. بنابراین دقت بسیار بالای این روش، پژوهشگران را به استفاده‌ی بیشتر و گسترده‌تر از این روش ترغیب کرده است.

۴.۵. زمان

زمان مورد نیاز برای اجرای هر برنامه، یکی دیگر از فاکتورهای مهم یک روش عددی است. در اینجا در چندین حالت متفاوت زمان مورد نیاز برای اجرای برنامه‌ها مورد بررسی قرار گرفته است. همان‌طور که در شکل ۱۱ مشاهده می‌شود، زمان مورد نیاز برای حل مسئله در روش CPPM برای خاک‌های متراکم کمتر از روش CPM است؛ در حالی که در خاک‌های سست شکل ۹، میزان خطا برحسب اندازه‌ی گام در هر دو روش انتگرال‌گیری عکس این قضیه صادق است و همچنین در هر دو روش با افزایش تعداد گام‌ها زمان حل مسئله افزایش می‌یابد.

۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، مدل رفتاری منطری - دافالیاس، که برای مدل‌سازی رفتار ماسه‌ها در سال ۱۹۹۷ ارائه شده است، به کمک دو الگوریتم نزدیک‌ترین نقطه‌ی تصویر (CPPM) و صفحات کاهش‌ی (CPM) عددی‌سازی شده است. بر اساس این پژوهش، از جایی که روش‌های مذکور در دسته‌ی روش‌های ضمنی قرار می‌گیرند، به‌عنوان یک مزیت ارزشمند، هر دو روش در برابر اندازه‌ی گام‌های بزرگ پایدار باقی می‌مانند. از ضعف‌های مشترک هر دو روش می‌توان به پیچیدگی عددی‌سازی این دسته از روش‌های انتگرال‌گیری در برابر دسته‌ی دیگر روش‌های انتگرال‌گیری (صریح) نام برد. با این حال، روش CPM در مقایسه با روش CPPM، که نیازمند محاسبه‌ی مشتقات مرتبه‌ی دوم از روابط مدل موردنظر دارد، از سادگی قابل ملاحظه‌ی بهره می‌برد و در مقابل روش CPPM در کرنش‌های بزرگ پایدار باقی می‌ماند، حال آنکه روش دیگر در این شرایط ناپایدار خواهد بود. همچنین روش CPM، دقت بالاتری همراه با زمان محاسباتی مورد نیاز کمتری دارد. در جدول ۱، خلاصه‌ی بی‌نقاط ضعف و قوت هر یک از روش‌های نامبرده را ارائه می‌کند. جدول ۱ می‌تواند به‌عنوان یک معیار جامع و دسته‌بندی‌شده در تحقیقاتی که نیازمند عددی‌سازی یک مدل رفتاری است، پژوهشگران را در انتخاب روش مناسب یاری کند. مثلاً می‌توان دریافت در مسائلی که تغییرشکل‌های بزرگ، به‌خصوص روان‌گرایی مورد بررسی قرار خواهد گرفت، روش CPPM راهگشا خواهد بود. همچنین نتایج این مطالعه، پژوهشگران را به استفاده از روش CPM در مسائلی که در محدوده‌ی تغییرشکل‌های کوچک قرار می‌گیرد، توصیه می‌کند.



شکل ۱۱. مقایسه‌ی زمان مورد نیاز در هر یک از روش‌ها.

روش، بنا بر این فرض که خطا از رابطه‌ی $Er = ch^p$ قابل محاسبه است، لذا می‌توان p را از رابطه‌ی $p = (\ln(Er_2/Er_1))/(\ln(h_2/h_1))$ به‌دست آورد. مقدار p را می‌توان برای یک نقطه، نرم اول کل بازه و یا نرم دوم کل بازه‌ی مورد نظر محاسبه و تعیین کرد. برای این منظور می‌توان از نمودار دو لگاریتمی h و p استفاده کرد. شیب این نمودار مقدار نرخ هم‌گرایی را نشان می‌دهد. در شکل ۹، میزان خطا برحسب اندازه‌ی گام در هر دو روش انتگرال‌گیری CPPM و CPM مشاهده می‌شود. لذا همان‌طور که از این شکل نتیجه می‌شود، شیب نمودار $(\log(Er_2/Er_1))/(\log(\varepsilon_2/\varepsilon_1))$ از مرتبه‌ی یک است. بنابراین درجه‌ی هم‌گرایی در هر دو روش CPPM و CPM در دو حالت شرایط متراکم و سست خاک برابر ۱ است.

۳.۵. خطا و دقت

میزان خطای هر روش در گزینش آن برای حل یک مسئله‌ی تأثیرگذار است. از آنجا که نشان داده شد هر دو روش در محدوده‌های گفته‌شده هم‌گرا هستند، یک مزیت مهم می‌تواند خطا و دقت هر روش باشد. این گزینه زمانی اهمیت بیشتری می‌یابد که دقت محاسبات بالایی موردنیاز باشد، که این غالباً منجر به استفاده از اندازه‌ی گام‌های بسیار کوچک و افزایش فزاینده‌ی هزینه محاسبات می‌شود. همان‌طور که در نمودارهای شکل ۱۰ قابل مشاهده است، روش CPM از دقت بسیار بالایی حتی در تعداد گام‌های کم و اندازه‌ی گام‌های بزرگ نسبت به روش CPPM، در دو حالت خاک متراکم و سست، از خود نشان می‌دهد و بیشینه‌ی خطا در اندازه‌ی گام‌های بزرگ زیر ۰٫۰۶٪ است. در حالی که در شرایط مشابه، بیشینه‌ی خطا در

پانوشتها

1. explicit
2. implicit
3. Mohr Coulomb
4. Runge-Kutta
5. cutting plane
6. closest point projection
7. yield function
8. bounding surface and dilatancy surface
9. flow rule
10. hardening laws
11. dilatancy coefficient

منابع (References)

1. Sloan, S.W., Abbo, A.J. and Sheng, D. "Refined explicit integration of elastoplastic models with automatic error control", *Engineering Computation*, **18**(1/2), pp. 121-194 (2001).
2. Hiley, R.A. and Rouainia, M. "Explicit runge-kutta methods for the integration of rate-type constitutive equations", *Computational Mechanics*, **42**(1), pp. 53-66 (2008).
3. Ortiz, M. and Simo, J.C. "An analysis of a new class of integration algorithm for elastoplastic constitutive relations", *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, **23**, pp. 353-366 (1986).
4. Crisfield, M.A., *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, **1**, John Wiley and Sons, Chichester (1991).
5. Crisfield, M.A., *Nonlinear Finite Element Analysis of Solids and Structures*, **2**, John Wiley and Sons, Chichester (1997).
6. Simo, J.C. and Taylor, R.L. "Consistent tangent operators for rate-independent elastoplasticity", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **2**, pp. 975-981 (1985).
7. Foster, C.D., Regueiro, R.A., Fossum, A.F. and Borja, R.I. "Implicit numerical integration of a three-invariant, isotropic/ kinematic hardening cap plasticity model for geomaterials", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **194**(50-52), pp. 5109-5138 (2005).
8. Rouainia, M. and Muir Wood, D. "Implicit numerical integration for a kinematic hardening soil plasticity model", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **25**(13), pp. 1305-1325 (2001).
9. Borja, R.I. and Lee, S.R. "Cam-clay plasticity. Part I: Implicit integration of elasto-plastic constitutive relations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **78**(1), pp. 49-72 (1990).
10. Borja, R.I. "Cam-clay plasticity. Part II: Implicit integration of constitutive equations based on a non-linear elastic stress predictor", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **88**(2), pp. 225-240 (1991).
11. Fotios, E.K. and Theodoros, C. "Implicit numerical integration of the mohr-coulomb surface in principal stress space", 2nd South-East European Conference on Computational Mechanics An IACM-ECCOMAS Special Interest Conference, Rhodes, Greece, pp. 22-24 (June 2009).
12. Sloan, S.W. "Substepping schemes for the numerical integration of elastoplastic stress strain relations", *Int. J. for Num. Methods in Eng.*, **24**(5), pp. 893-911 (1987).
13. Wissmann, J.W. and Hauck, C. "Efficient elastic-plastic finite element analysis with higher order stress point algorithms", *Computer and Structure*, **17**(1), pp. 89-95 (1983).
14. Potts, D.M. and Genandra, D. "A comparison of solution strategies for non-linear finite element analysis of geotechnical problems", *Proc. Of the 3rd Int. Conference On Computational Plasticity*, Barcelona, pp. 803-814 (1992).
15. Potts, D.M. and Genandra, D. "An evaluation of substepping and implicit stress point algorithms", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **119**(3-4), pp. 341-354 (1994).
16. Yamaguchi, E. "A comparative study of numerical methods for computing stress increments in elastic-plastic materials", *Proc. of the Asia-Pacific Symposium on Advances in Plasticity and Its Applications*, Hong Kong, pp. 625-630 (1993).
17. Manzari, M.T. and Prachathananukit, R. "On integration of cyclic soil plasticity model", *Int. J. Num. Anal. Methods Geomech.*, **25**(6), pp. 525-549 (2001).
18. Wojciech, T.S., Hofmann, M., Hofstetter, G., Sheng, D. and Sloan, S.W. "A comparative study of stress integration methods for the Barcelona Basic Model", *Computers and Geotechnics*, **44**, pp. 22-33 (2012).
19. Simo, J.C. and Ortiz, M. "A unified approach to finite deformation elastoplastic analysis based on the use of hyper-elastic constitutive equations", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **49**(2), pp. 221-245 (1985).
20. Ortiz, M. and Popov, E.P. "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", *Int. J. for Num. Methods in Engineering*, **21**(9), pp. 649-670 (1985).
21. Haug, J. and Griffiths, D.V. "Observations on return mapping algorithms for piecewise linear yield criteria", *International Journal of Geomechanics, ASCE*, **8**(4), pp. 253-265 (2008).
22. Manzari, M.T. and Dafalias, Y.F. "A two-surface critical plasticity model for sand", *Geotechnique*, **47**(2), pp. 255-272 (1997).
23. Dafalias, Y.F. and Manzari, M.T. "Simple plasticity sand model accounting for fabric change effects", *Journal of Engineering Mechanics*, **130**(6), pp. 622-634 (2004).