

## اصلاح مدل بزرگ‌مقیاس رانکین - هیل و الگوریتم حل آن برای تحلیل غیرخطی دیوارهای آجری

امیر یعقوبی فر (دانشجوی دکتری)

عباسعلی تسنیمی\* (استاد)

دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۳ (۲ - ۳، شماره ۴/۲، ص. ۳۱-۳۲)

استفاده از مدل‌سازی بزرگ‌مقیاس برای تحلیل سازه‌های آجری با ابعاد و اندازه‌ی بزرگ اجتناب‌ناپذیر است. در یک تحلیل دقیق بزرگ‌مقیاس سازه‌های آجری، ارائه‌ی مدلی که مشخصات مصالح برای تمامی وضعیت‌های تنش را به دقت برآورد کند، بسیار حائز اهمیت است، که به دلایلی مانند عدم وجود نتایج آزمایشگاهی گسترده و پیچیدگی ذاتی فرمول‌بندی ناهمسان‌گرد رفتار غیرکشسان، ارائه‌ی این مدل با مشکلاتی همراه است. تعداد پژوهشگرانی که موفق شده‌اند مدل‌های بزرگ‌مقیاس مناسبی برای تحلیل سازه‌های آجری ارائه دهند که در آن حالت کشسانی ناهمسان‌گرد با رفتار ناهمسان‌گرد غیرکشسان ترکیب شده باشد، بسیار اندک است. در این نوشتار، جزئیات به‌کارگیری مدل بزرگ‌مقیاس رانکین - هیل، که برای پیشگیری از تکیه‌گی در به‌کارگیری منحنی‌های تنش - کرنش معادل در کشش و فشار اصلاح شده است، با ارائه‌ی الگوریتم و برنامه‌ی روش حل سریع به منظور استفاده در تحلیل غیرخطی سازه‌های آجری تهیه و ارائه شده است.

واژگان کلیدی: دیوارهای آجری، تحلیل غیرخطی، مدل ناهمسان‌گرد، درشت - مدل، الگوریتم پیشنهادی.

amiryaghoubifar@yahoo.com  
tasnimi@modares.ac.ir

## ۱. مقدمه

بعد دوبرست و فینسترا و اشلنکنز و دوبرست به‌ترتیب معیارهای هیل و هافمن را به معیار کشسان - خمیری کامل توسعه دادند.<sup>[۵،۴]</sup> همچنین به منظور مدل‌سازی بزرگ‌مقیاس مصالح بنایی، پژوهشگرانی براساس کارگزار اقدام به ارائه‌ی مدل عددی خاص برای بنایی کردند. آنها سطوح تسلیم تقریباً پیچیده‌ی را پیشنهاد کردند که مانع از استفاده‌ی مفاهیم حالت خمیری مدرن و رفتار غیرکشسانی دقیق (سخت‌شدگی و نرم‌شدگی) بود.<sup>[۹-۶]</sup> علاوه بر این موارد مدل‌های درشت‌مقیاس دیگری بر مبنای روش ترک‌پخشی و روش‌های چندوجهی<sup>۱</sup> برای پیش‌بینی رفتار مصالح بنایی توسعه داده شد، که در اغلب آن‌ها ترکیب مصالح بنایی با مصالح مشابه معادل‌سازی می‌شود.<sup>[۱۲-۱۰]</sup> مطالعات دیگری نیز در زمینه‌ی تعیین مدل کلی درشت‌مقیاس از مدل ریزمقیاس در مصالح بنایی انجام شده است، که مدل‌های به‌دست‌آمده از این روش با تقریب همراه است.<sup>[۱۳-۱۸]</sup>

با در نظر گرفتن این نکته که نمایش یک سطح تسلیم ناهمسان‌گرد بر حسب تنش‌های اصلی یا تغییرناپذیرهای تنش ناممکن است، از دو رویکرد مختلف برای مدل‌سازی بزرگ‌مقیاس مصالح بنایی بر مبنای تئوری حالت خمیری می‌توان استفاده کرد: رویکرد اول، استفاده از یک سطح تسلیم ناهمسان‌گرد است، که معیار تسلیم هیل و هافمن از آن جمله است.<sup>[۱۹،۴]</sup> در این معیارها با وجود مدل‌سازی رفتار ناهمسان‌گرد، مشکلات متعددی وجود دارد. برای نمونه، معیار تسلیم هافمن در ارائه‌ی مقاومت کششی از رفتار کشش تک‌محوره ناتوان است و همچنین در وضعیت  $\sigma_1 = \sigma_2$

مدل‌سازی سازه‌های آجری به دو روش کلی ریزمقیاس و بزرگ‌مقیاس به ترتیب به‌صورت گسسته و پیوسته انجام می‌پذیرد. در روش اول، آسیب در نواحی ویژه‌ی سازه با شبیه‌سازی رفتار اندرکنش آجر به آجر و ملات متمرکز می‌شود، که اغلب به منظور بررسی دقیق رفتار نمونه‌های کوچک‌تر مورد استفاده قرار می‌گیرد.<sup>[۱]</sup> لیکن تحلیل سازه‌های آجری با ابعاد بزرگ، که دارای تعداد زیادی از اجزاء و اتصالات است و به‌عنوان مصالح مرکب شناخته می‌شوند، از طریق مدل‌سازی بزرگ‌مقیاس ممکن است. در این مدل‌سازی، رابطه‌ی بین متوسط تنش‌ها و کرنش‌ها در مصالح در نظر گرفته می‌شود. رفتار مؤثر المان‌های تشکیل‌دهنده از ترکیب آجر و ملات، که در حد قابل توجهی ناهمگن هستند، تعیین می‌شود.<sup>[۲]</sup> از این‌رو برای مدل‌سازی بزرگ‌مقیاس یک سازه‌ی آجری، شکل عددی توسعه‌یافته‌ی برگرفته از مدل‌های ناهمسان‌گرد مورد استفاده قرار می‌گیرد، که قادر به تصویرکردن تمام مودهای شکست ممکن در مصالح آجری باشد.<sup>[۳]</sup>

تاکنون مدل‌های متعددی بر مبنای روش‌های خمیری با استناد به روش‌های نظری و آزمایشگاهی پیشنهاد شده است. از جمله‌ی این مدل‌ها می‌توان به مدل‌های هیل (۱۹۴۸)، هافمن (۱۹۶۷) و سای و وو (۱۹۷۱) اشاره کرد، که در سال‌های

\* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۱۲/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۲/۳/۱۱، پذیرش ۱۳۹۲/۳/۲۵.

که در آن، ماتریس تصویر  $P_t$  و بردار تصویر  $\pi$  به صورت رابطه‌ی ۴ است:

$$P_t = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4\alpha_\tau \end{bmatrix}, \quad \pi = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

همچنین بردار تنش کاهش‌یافته‌ی  $\xi$  از رابطه‌ی ۵ به دست می‌آید:

$$\xi = \sigma - \eta \quad (5)$$

بردارهای تنش  $\sigma$  و تنش پسماند  $\eta$  نیز به صورت رابطه‌ی ۶ است:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix}, \quad \eta = \begin{bmatrix} \bar{\sigma}_{t1}(\kappa_t) \\ \bar{\sigma}_{t2}(\kappa_t) \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

برای رابطه‌ی نرم‌شدگی تنش معادل - کرنش معادل نمایی در کشش برای هر دو جهت مصالح، از انرژی‌های شکست مختلف ( $G_{ftx}, G_{fxy}$ ) به صورت رابطه‌ی ۷ استفاده شده است: [۲۳]

$$\bar{\sigma}_{t1} = f_{tx} e^{-\frac{h f_{tx}}{G_{ftx}} \kappa_t}, \quad \bar{\sigma}_{t2} = f_{ty} e^{-\frac{h f_{ty}}{G_{fxy}} \kappa_t} \quad (7)$$

در این رابطه، کمیت طول معادل  $h$  به منظور تأثیر شرایط موضعی بر کرنش از رابطه‌ی ۸ به دست می‌آید:

$$h = \alpha_h \sqrt{A_e} \quad (8)$$

که در این رابطه،  $A_e$  مساحت مؤثر هر المان و  $\alpha_h$  ضریب اصلاح است، که مقدار آن برای المان درجه‌ی دوم برابر با ۱ و برای المان‌های خطی  $\sqrt{2}$  است. باید توجه داشت که طول معادل  $h$  برای المان‌های بزرگ می‌تواند منجر به بازگشت سریع<sup>۲</sup> در سطح اجزاء تشکیل‌دهنده شود، که در چنین وضعیتی، محدوده‌ی مقاومت به منظور کسب انرژی شکست واقعی باید کاهش یابد. [۲۴]

کمیت نرم‌شدگی در ناحیه‌ی معیار رانکین با کرنش خمیری اصلی بیشینه مطابق رابطه‌ی ۹ تعیین می‌شود:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_t &= \dot{\varepsilon}_1^p = \frac{\dot{\varepsilon}_x^p + \dot{\varepsilon}_y^p}{\gamma} + \frac{1}{\gamma} \sqrt{(\dot{\varepsilon}_x^p - \dot{\varepsilon}_y^p)^2 + (\dot{\gamma}_{xy}^p)^2} \\ &= \left( \frac{1}{\gamma} (\dot{\varepsilon}^p)^T Q \dot{\varepsilon}^p \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\gamma} \pi^T \dot{\varepsilon}^p \end{aligned} \quad (9)$$

که در آن، ماتریس  $Q$  از رابطه‌ی ۱۰ به دست می‌آید:

$$Q = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (10)$$

برای تعیین بردار کرنش خمیری از تابع پتانسیل خمیری غیروابسته  $g_1$  به صورت رابطه‌ی ۱۱ استفاده شده است:

$$g_1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \xi^T P_g \xi} + \frac{1}{\gamma} \pi^T \xi \quad (11)$$

$\theta = 0$ ، تخمین دست بالایی برای مقاومت در ناحیه‌ی کشش - فشار را به دست می‌دهد. همین‌طور در معیار هیل رفتار مشابهی برای فشار و کشش در نظر می‌گیرد، که برای مصالح بنایی مناسب نیست. رویکرد دوم، توسعه‌ی سطوح تسلیم مصالح نیمه‌ترد همسان‌گرد به ناهمسان‌گرد است. [۲۰] این مدل‌سازی نتایج مناسب‌تری را برای رفتار کششی و فشاری به دست می‌دهد. مدل توسعه‌یافته‌ی رانکین - هیل، که اساساً توسعه‌ی مدل بتنی رانکین دراکر پراگر دبورست و فینسترا (۱۹۹۶) است، از این قبیل است. این مدل براساس حالت خمیری چندسطحی، از ترکیب معیار تسلیم ناهمگن رانکین برای کشش و معیار تسلیم هیل برای فشار توسعه داده شده است. [۶] از مزایای این سطح تسلیم ترکیبی، استفاده از مفاهیم حالت خمیری مدرن با نمایش قوی رفتار مواد ناهمسان‌گرد است، که در برگزیده‌ی رفتار مختلف نرم‌شدگی و سخت‌شدگی به موازات هر محور مصالح است.

در این نوشتار، جزئیات مربوط به فرمول‌بندی و به‌کارگیری مدل رانکین - هیل برای وضعیت تنش مسطح با برنامه‌نویسی عددی تشریح و روش سریع تحلیل غیرخطی در فرایند نگاشت بازگشتی<sup>۲</sup> با این مدل ارائه شده است. همچنین برای پیشگیری از تکیه‌نگی در به‌کارگیری منحنی‌های تنش - کرنش معادل در کشش و فشار، این منحنی‌ها اصلاح و رابطه‌ی آن‌ها بازنویسی شده و چند نمونه‌ی مدل برای کنترل و تأیید نتایج به دست آمده از کد نرم‌افزاری مورد راست‌آزمایی قرار گرفته است.

## ۲. مدل پیوسته‌ی ناهمسان‌گرد

همان‌طور که در مقدمه ذکر شد، در این نوشتار از مدل پیوسته‌ی ناهمسان‌گرد دو سطحی رانکین - هیل استفاده شده است، که به دلیل داشتن مشخصه‌های سخت‌شدگی و نرم‌شدگی در هر یک از سطوح تشکیل‌دهنده‌ی آن، برای مدل‌سازی رفتار مصالح آجری بسیار مناسب است. در این بخش با شرح مختصر مربوط به مدل مذکور، به اصلاح روش حل و به‌کارگیری آن در قالب روش‌های تکراری دوزنقه‌بی پرداخته شده است.

### ۱.۲. معیار رانکین

برای به‌کارگیری این معیار در مدل پیوسته‌ی ناهمسان‌گرد می‌توان با در نظر گرفتن نرم‌شدگی هم‌زمان در دو محور مصالح و استفاده از دو رابطه‌ی نرم‌شدگی با انرژی شکست مختلف، سطح تسلیم رانکین را برای یک ماده‌ی ناهمسان‌گرد، به همراه نیروهای کشش مختلف در مسیر  $x$  و  $y$  به صورت رابطه‌ی ۱ توسعه داد: [۲۲، ۲۱]

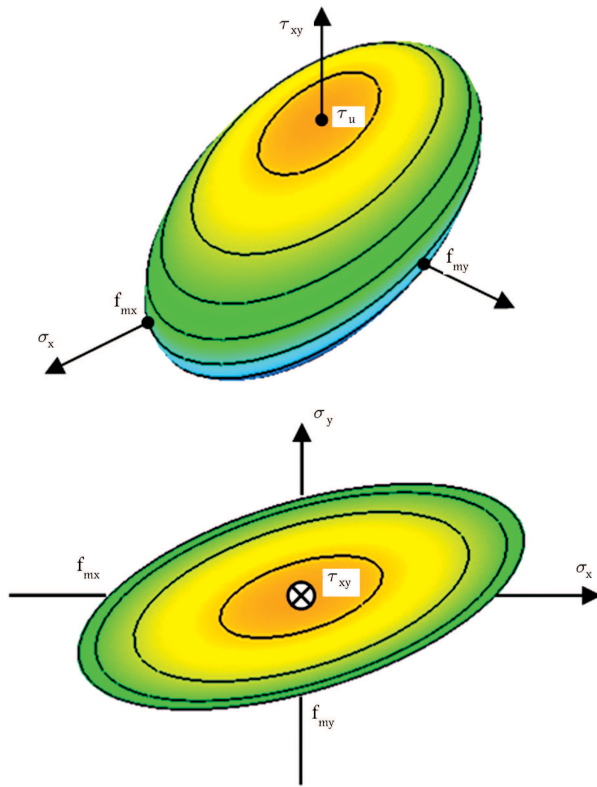
$$f_1 = \frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_{t1}(\kappa_t)) + (\sigma_y - \bar{\sigma}_{t2}(\kappa_t))}{\gamma} + \sqrt{\left( \frac{(\sigma_x - \bar{\sigma}_{t1}(\kappa_t)) - (\sigma_y - \bar{\sigma}_{t2}(\kappa_t))}{\gamma} \right)^2 + \alpha \tau_{xy}^2} \quad (1)$$

که در آن، پارامتر  $\alpha$  که مشارکت تنش برشی را برای شکست کنترل می‌کند، از رابطه‌ی ۲ به دست می‌آید:

$$\alpha = \frac{f_{tx} f_{ty}}{\tau_u^2} \quad (2)$$

در این رابطه،  $f_{tx}$ ،  $f_{ty}$  به ترتیب مقاومت کششی تک‌محوری در مسیرهای  $x$ ،  $y$  و مقدار  $\tau_u$  مقاومت برشی خالص است. با ساده‌سازی رابطه‌ی ۱ و تبدیل آن به فرمولاسیون ماتریسی رابطه‌ی ۳ را خواهیم داشت:

$$f_1 = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \xi^T P_t \xi} + \frac{1}{\gamma} \pi^T \xi \quad (3)$$



شکل ۱. سطح تسلیم هیل برای  $\tau_{xy} \geq 0$ .

## ۲.۲. معیار هیل

ساده‌ترین سطح تسلیم، که مشخصه‌های آن با مقاومت فشاری در طول محورهای مصالح متفاوت است، مطابق شکل ۱ به صورت بیضی از نقطه‌ی مرکز در فضای تنش صفحه‌ی کامل به چرخش در می‌آید  $(\sigma_y, \sigma_x, \tau_{xy})$ . رابطه‌ی درجه‌ی دوم برای این معیار مطابق رابطه‌ی ۲۰ است:

$$f_I = A\sigma_x^2 + B\sigma_x\sigma_y + C\sigma_y^2 + D\tau_{xy}^2 - 1 = 0 \quad (20)$$

در حالی که  $A, B, C, D$  پارامتر مصالح هستند و باید شرط  $B^2 - 4AC < 0$  به منظور اطمینان از ایجاد تحدب ارضاء شود.<sup>[۲۷]</sup> برای توسعه‌ی عددی سطح تسلیم هیل (رابطه‌ی ۲۰) با تعریف پارامترهای  $A, B$  و  $C$  به صورت ماتریسی مطابق رابطه‌ی ۲۱ بازنویسی می‌شود:

$$f_I = \sqrt{\frac{1}{\gamma} \sigma^T P_c \sigma} - \bar{\sigma}_c(\kappa_c) \quad (21)$$

در این رابطه، ماتریس تصویر  $P_c$  و مقادیر تسلیم  $\bar{\sigma}_c$  به صورت رابطه‌ی ۲۲ است:

$$P_c = \begin{bmatrix} \frac{2\bar{\sigma}_{cT}(\kappa_c)}{\bar{\sigma}_{c1}(\kappa_c)} & \beta & 0 \\ \beta & \frac{2\bar{\sigma}_{c1}(\kappa_c)}{\bar{\sigma}_{cT}(\kappa_c)} & 0 \\ 0 & 0 & 2\gamma \end{bmatrix}, \quad \bar{\sigma}_c = \sqrt{\bar{\sigma}_{c1}\bar{\sigma}_{cT}} \quad (22)$$

در این رابطه،  $\sigma_{c1}(\kappa_c)$  و  $\sigma_{cT}(\kappa_c)$  به ترتیب مقادیر تسلیم در راستای محورهای  $x$  و  $y$  هستند و کمیت اسکالر  $\kappa_c$  مقادیر سخت‌شدگی و نرم‌شدگی را کنترل می‌کند. مقادیر  $\beta$  و  $\gamma$  در رابطه‌ی ۲۲ پارامترهای اضافه‌ی مواد هستند، که شکل سطح تسلیم را مشخص می‌کنند. پارامتر  $\beta$  رابطه‌ی بین مقادیر تنش‌های نرمال

که در آن، ماتریسی  $P_g$  نشان‌دهنده‌ی جریان خمیری رانکین به صورت رابطه‌ی ۱۲ است:

$$P_g = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad (12)$$

در رابطه‌ی ۱۱، رفتار غیرکشسان توسط فرضیه‌ی نرم‌شدگی کرنش با توجه به کرنش پیشینه‌ی اصلی خمیری  $\bar{\epsilon}_p^p$  (رابطه‌ی ۹) تعیین می‌شود و کمیت اسکالر خمیری از رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$\dot{\kappa}_t = \dot{\lambda}_t \quad (13)$$

به منظور حل غیرخطی مدل رانکین از الگوریتم نگاشت بازگشت و رابطه‌ی ۱۴ که شامل ۴ مجهول وابسته به اجزاء  $\sigma_{n+1}$  و  $\kappa_{t,n+1} = \Delta \kappa_{t,n+1}$  است، استفاده شده است:

$$\begin{cases} D^{-1}(\sigma_{n+1} - \sigma^{trial}) + \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} = 0 \\ f_{1,n+1} = \left( \frac{1}{\gamma} \xi_{n+1}^T P_t \xi_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{\gamma} \pi^T \xi_{n+1} = 0 \end{cases} \quad (14)$$

در این رابطه،  $D$  نشان‌دهنده‌ی تانسور ارتجاعی ناهمسان‌گرد است و به دلیل ارتباط مقادیر مجهول  $(\kappa_{t,n+1}$  و  $\sigma_{n+1})$  حل آن توسط یک معادله‌ی غیرخطی یک متغیره‌ی صریح ممکن نیست. بنابراین برای روش تکرار محلی نیوتن - رافسون، ژاکوبین آن از رابطه‌ی ۱۵ به دست می‌آید:

$$J_{n+1} = \begin{bmatrix} D^{-1} + \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \sigma^2} & \vdots & \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} + \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \sigma \partial \kappa_t} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \left( \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right)^T & \vdots & \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_t} \end{bmatrix} \quad (15)$$

این الگوریتم عددی برای تمامی حوزه‌ی تنش، پایدار نیست. در قسمت نوک سطح تسلیم، گرادینان پتانسیل خمیری تعریف نشده است. حتی اگر تابع پتانسیل خمیری مطابق رابطه‌ی ۱۶ به صورت درجه‌ی دوم نوشته شود، مشکل گرادینان تعریف نشده در قسمت نوک برطرف نمی‌شود:

$$g_1 = \frac{1}{\gamma} \xi^T P_g \xi + \frac{1}{\gamma} \xi^T \pi \Big| \xi^T \pi \Big| \quad (16)$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial \sigma} = P_g \xi + \frac{1}{\gamma} \pi \Big| \xi^T \pi \Big| \quad (17)$$

به علت نکین بودن سطح تسلیم در نقطه‌ی نوک، در تراز  $\tau_{xy} = 0$ ،  $\partial g_1 / \partial \sigma = 0$  می‌شود، که در این وضعیت تنش به هنگامام شده توسط الگوریتم سعی و خطا از رابطه‌ی ۱۸ به دست می‌آید:

$$\sigma_{n+1} = \eta_{n+1} \quad (18)$$

که در آن، کمیت نرم‌شدگی طبق رابطه‌ی ۶ به هنگام می‌شود و بردار کرنش خمیری  $\Delta \epsilon_{n+1}^p$  از طریق رابطه‌ی ۱۹ محاسبه می‌شود:

$$\Delta \epsilon_{n+1}^p = D^{-1}(\sigma^{trial} - \sigma_{n+1}) \quad (19)$$

و برای حل آن از روش سکانتی به جای روش معمولی نیوتن - رافسون استفاده می‌شود.<sup>[۲۴، ۲۵]</sup> ماتریس سختی مماسی سازگار مستقیماً برای روش استاندارد از ژاکوبین به هنگامام شده به دست می‌آید و برای قسمت نوک، تغییرات جزئی در معادله‌های تسلیم به هنگامام شده صورت می‌پذیرد.

مجهول وابسته به اجزاء  $\sigma_{n+1}$  و  $\Delta\lambda_{c,n+1} = \Delta\lambda_{c,n+1}$  است، استفاده می‌شود:

$$\begin{cases} D^{-1}(\sigma_{n+1} - \sigma^{trial}) + \Delta\lambda_{c,n+1} \frac{\partial f_t}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} = 0 \\ f_{t,n+1} = \left( \frac{1}{\gamma} \sigma_{n+1}^T P_{c,n+1} \sigma_{n+1} \right)^{\frac{1}{\gamma}} - \bar{\sigma}_{c,n+1} = 0 \end{cases} \quad (25)$$

با تعیین ژاکوبین رابطه‌ی ۲۵ از رابطه‌ی ۲۶ می‌توان این معادلات را در روش تکرار محلی نیوتن - رافسون حل کرد:

$$J_{n+1} = \begin{bmatrix} D^{-1} + \Delta\lambda_{c,n+1} \frac{\partial^2 f_t}{\partial \sigma^2} & \cdots & \frac{\partial f_t}{\partial \sigma} + \Delta\lambda_{c,n+1} \frac{\partial^2 f_t}{\partial \sigma \partial \kappa_c} \\ \vdots & & \vdots \\ \left( \frac{\partial f_t}{\partial \sigma} \right)^T & \cdots & \frac{\partial f_t}{\partial \kappa_c} \end{bmatrix} \quad (26)$$

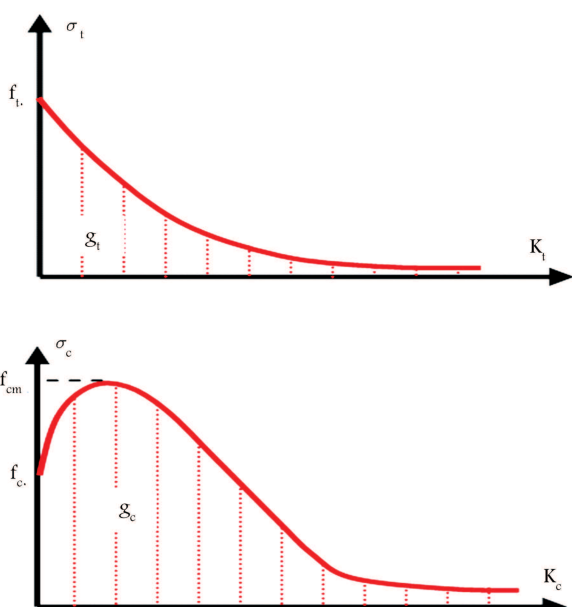
ماتریس سختی مماسی سازگار مستقیماً مشابه بخش مربوط به معیار رانکین، از ژاکوبین به‌هنگام شده به‌دست می‌آید.

### ۱.۲.۲. اصلاح منحنی‌های تنش - کرنش معادل

به‌منظور اصلاح منحنی‌های تنش - کرنش معادل برای برطرف ساختن مشکلات تکنیکی در مشتق روابط ۷ و ۲۳ این روابط براساس مدل توسعه‌یافته‌ی «لوبلینر»، برای رفتار کشش و فشار برای هر دو راستای  $x$  و  $y$  براساس رابطه‌ی ۲۷ اصلاح شد: [۲۹، ۲۸]

$$\sigma = f_c \cdot [(\lambda + a) \exp(-b\kappa) - a \exp(-2b\kappa)] \quad (27)$$

در این رابطه،  $f_c$  تنش تسلیم اولیه‌ی کششی یا فشاری است، که براساس بیشینه‌ی تنش کشسان در مرحله‌ی اولیه‌ی بارگذاری تعریف می‌شود.  $a$  و  $b$  نیز مقادیر ثابتی هستند که برای کشش یا فشار مستقلاً تعریف می‌شوند. مقدار  $g$  به‌عنوان چگالی انرژی تلف شده در فرایند ترک‌خوردگی برای کشش و فشار به‌صورت رابطه‌ی ۲۸ محاسبه می‌شود (شکل ۳) و ارتباط آن با انرژی شکست  $G$  (از مشخصات مصالح)



شکل ۳. رفتار نرم - سخت‌شوندگی برای کشش و فشار در مدل لوبلینر. [۲۹، ۲۸]

را کنترل می‌کند، یعنی سطح تسلیم را حول محور تنش برشی می‌چرخاند و از یک آزمایش اضافی (آزمایش دو محوری فشاری با نسبت تنش‌های اصلی واحد) به‌دست آید و پارامتر  $\gamma$  مشارکت تنش برشی را برای شکست کنترل می‌کند. [۶]

رابطه‌ی تنش - کرنش معادل در سخت‌شدگی سهموی و نرم‌شدگی سهموی/نمایی با انرژی‌های شکست فشاری مختلف ( $G_{fcy}$ ,  $G_{fcx}$ ) براساس «فینسترا» به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ به‌دست می‌آید:

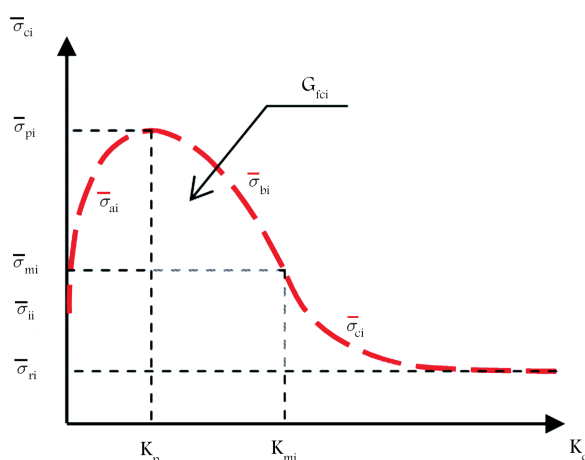
$$\begin{aligned} \bar{\sigma}_{ai}(\kappa_c) &= \bar{\sigma}_{ii} + (\bar{\sigma}_{pi} - \bar{\sigma}_{ii}) \sqrt{\frac{2\kappa_c - \kappa_c^2}{\kappa_p - \kappa_p^2}} \\ \bar{\sigma}_{bi}(\kappa_c) &= \bar{\sigma}_{pi} + (\bar{\sigma}_{mi} - \bar{\sigma}_{pi}) \left( \frac{\kappa_c - \kappa_p}{\kappa_{mi} - \kappa_p} \right)^2 \\ \bar{\sigma}_{ci}(\kappa_c) &= \bar{\sigma}_{ri} + (\bar{\sigma}_{mi} - \bar{\sigma}_{ri}) \exp\left( m_i \left( \frac{\kappa_c - \kappa_{mi}}{\bar{\sigma}_{mi} - \bar{\sigma}_{ri}} \right) \right) \\ m_i &= 2 \left( \frac{\bar{\sigma}_{mi} - \bar{\sigma}_{pi}}{\kappa_{mi} - \kappa_p} \right) \end{aligned} \quad (23)$$

در این روابط، مقادیر تنش برای حالت غیرخطی از مقدار بیشینه‌ی  $f_{mi}$   $\sigma_{pi} = 0.1 f_{mi}$  و  $\sigma_{mi} = 0.5 f_{mi}$ ،  $\sigma_{ii} = 0.33 f_{mi}$  به‌صورت (شکل ۲). کرنش خمیری معادل متناظر با مقاومت فشاری بیشینه‌ی  $\kappa_p$  به‌عنوان یک پارامتر اضافی ماده از آزمایش به‌دست می‌آید و در موردی که نتایج آزمایشگاهی در دسترس نیست، این پارامتر مواد می‌تواند برابر  $0.702$  فرض شود. در این رابطه نیز کمیت طول معادل  $h$  به منظور تأثیر شرایط موضعی در کرنش فشاری از رابطه‌ی ۸ به‌دست می‌آید و برای تعیین انرژی تلف شده، پارامتر  $\kappa_{mi}$  برای اجتناب از احتمال بازگشت منحنی در سطح اجزاء تشکیل‌دهنده باید محدود شود.

به‌منظور تعیین بردار کرنش خمیری، تابع پتانسیل براساس قانون جریان وابسته مشابه سطح تسلیم در نظر گرفته می‌شود و کمیت سخت‌و نرم‌شدگی به‌صورت رابطه‌ی ۲۴ محاسبه می‌شود:

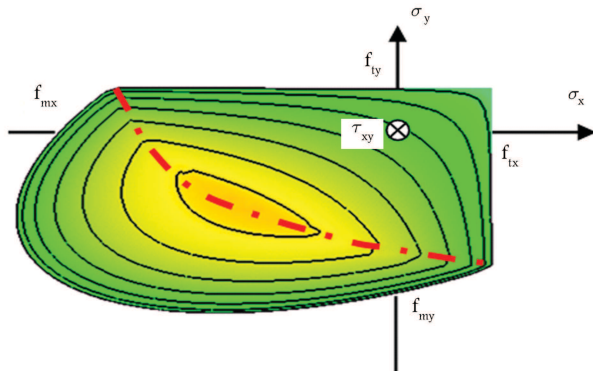
$$\kappa_c = \frac{1}{\bar{\sigma}_c} \sigma^T \dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda}_c \quad (24)$$

برای حل غیرخطی مدل هیل از الگوریتم نگاشت بازگشت و رابطه‌ی ۲۵، که شامل ۴



شکل ۲. رفتار نرم - سخت‌شوندگی برای فشار.

از رابطه‌ی ۲۹ به دست می‌آید. [۲۹، ۲۸]



شکل ۴. معیار دو سطحی رانکین - هیل.

$$g = \int_0^{\infty} \sigma d\varepsilon^p \quad (28)$$

$$G = g \times l \quad (29)$$

در این رابطه،  $l$  طول مشخصه است و با جای‌گذاری رابطه‌ی ۲۷ در رابطه‌ی ۲۸، رابطه‌ی ۳۰ بین ثابت‌های  $a$  و  $b$  به دست می‌آید:

$$g = \frac{f_0}{b} \left(1 + \frac{a}{2}\right) \quad (30)$$

با مشتق‌گیری از تابع مفروض تنش (رابطه‌ی ۲۷) در مقدار کرنش خمیری صفر به صورت رابطه‌ی ۳۱ خواهد بود:

$$\left. \frac{\partial \sigma}{\partial \kappa} \right|_{\kappa=0} = f_0 b (a - 1) \quad (31)$$

از این رابطه چنین بر می‌آید که در حالت کششی برای منفی بودن شیب تابع باید  $a < 1$  باشد. بنابراین با توجه به کمینه‌ی شیب منحنی کشش در مقدار کرنش خمیری صفر، مقدار  $a$  برای کشش برابر صفر در نظر گرفته می‌شود. همچنین برای مثبت بودن شیب تابع در حالت فشاری،  $a > 1$  خواهد بود، از طرفی مقاومت فشاری بیشینه،  $f_{cm}$ ، در نقطه‌ی با شیب صفر بر روی تابع رخ می‌دهد که مطابق رابطه‌ی ۳۲ خواهد داشت:

$$f_{cm} = \frac{f_{co}}{2a} (1 + a)^2 \quad (32)$$

که در آن مقدار  $a$  برای حالت فشاری از رابطه‌ی ۳۲ برای حالت فشاری، مطابق رابطه‌ی ۳۳ به دست می‌آید:

$$a = 2 \left( \frac{f_{cm}}{f_{co}} \right) - 1 + 2 \sqrt{\left( \frac{f_{cm}}{f_{co}} \right)^2 - \left( \frac{f_{cm}}{f_{co}} \right)} \quad (33)$$

$f_{cm}/f_{co}=2$ : فرض  $a = 9,9$

با تعیین مقدار  $a$  در کشش و فشار، مقدار  $b$  از رابطه‌ی ۳۰ به دست می‌آید.

### ۳.۲. معیار تسلیم ترکیبی

برای ارائه‌ی معیار تسلیم ترکیبی کشش و فشار باید براساس ویژگی‌های حالت خمیری چندسطحی اقدام کرد (شکل ۴). با فرض اینکه نواحی فشاری و کششی غیر مرتبطاند، الگوریتم مسیر برگشتی برای نواحی گوشه به صورت مجموعه‌ی معادلات پنج‌گانه که شامل ۵ مجهول (وابسته به اجزاء  $\sigma_{n+1}$ ،  $\Delta \lambda_{t,n+1}$  و  $\Delta \lambda_{c,n+1} = \Delta \kappa_{c,n+1}$ ) است، مطابق رابطه‌ی ۳۴ تنظیم می‌شود:

$$\begin{cases} D^{-1} (\sigma_{n+1} - \sigma^{trial}) + \Delta \lambda_{t,n+1} \left. \frac{\partial g_t}{\partial \sigma} \right|_{n+1} \\ + \Delta \lambda_{c,n+1} \left. \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} \right|_{n+1} = 0 \\ f_{1,n+1} = \left( \frac{1}{2} \xi_{n+1}^T P_t \xi_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \pi^T \xi_{n+1} = 0 \\ f_{2,n+1} = \left( \frac{1}{2} \sigma_{n+1}^T P_{c,n+1} \sigma_{n+1} \right)^{\frac{1}{2}} - \bar{\sigma}_{c,n+1} = 0 \end{cases} \quad (34)$$

در این حالت نیز با تعیین ژاکوبین رابطه‌ی ۳۴ از رابطه‌ی ۳۵ می‌توان این معادلات را با روش تکرار محلی نیوتن - رافسون حل کرد. ماتریس سختی سازگار حالت ترکیبی مستقیماً از ژاکوبین به‌هنگام شده به دست می‌آید.

$$J = \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{13} \\ \left( \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right)^T & \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_t} & 0 \\ \left( \frac{\partial f_2}{\partial \sigma} \right)^T & 0 & \frac{\partial f_2}{\partial \kappa_c} \end{bmatrix}$$

$$J_{11} = D^{-1} + \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial^2 g_t}{\partial \sigma^2} + \Delta \lambda_{c,n+1} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \sigma^2}$$

$$J_{12} = \frac{\partial g_t}{\partial \sigma} + \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial^2 g_t}{\partial \sigma \partial \kappa_t}$$

$$J_{13} = \frac{\partial f_c}{\partial \sigma} + \Delta \lambda_{c,n+1} \frac{\partial^2 f_c}{\partial \sigma \partial \kappa_c} \quad (35)$$

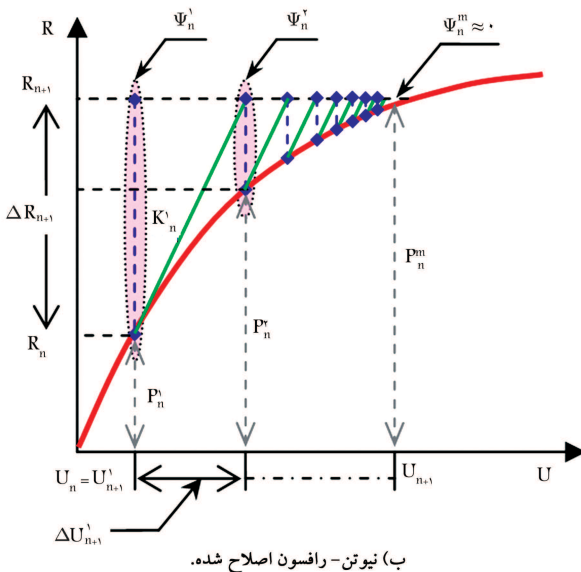
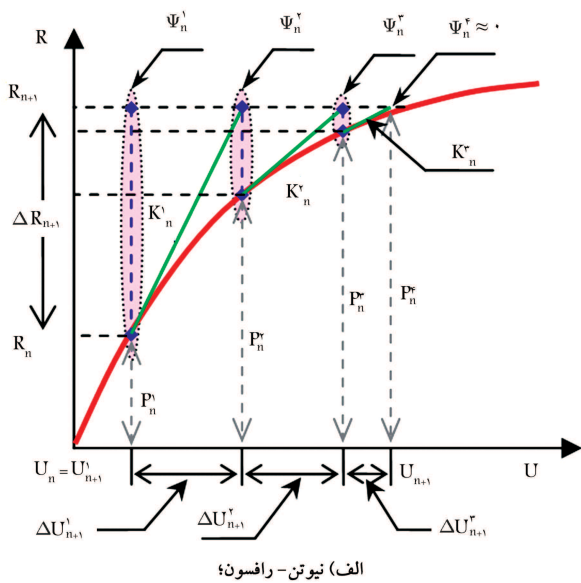
### ۳. روش پیشنهادی تسریع در حل معیار تسلیم ترکیبی

به منظور تسریع در حل روش نگاشت بازگشتی از روش ذوزنقه‌ی استفاده شده است، [۳۰] که در آن معادلات غیرخطی حالت خمیری براساس پارامتر  $\alpha$  مطابق رابطه‌ی ۳۶ بازنویسی می‌شود، که مقدار این پارامتر از صفر تا ۱ متغیر است. جزئیات مربوط به این روش و تأثیر پارامتر  $\alpha$  بر معادلات تنش، کرنش و سخت‌شدگی در رابطه‌ی ۳۶ نشان داده شده است:

$$\begin{aligned} \sigma_{n+1} &= D : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) \\ \varepsilon_{n+1}^p &= \varepsilon_n^p + \lambda [(\alpha - 1) r_n + \alpha r_{n+1}] \\ q_{n+1} &= q_n + \lambda [(\alpha - 1) h_n + \alpha h_{n+1}] \end{aligned} \quad (36)$$

چنانچه رابطه‌ی ۳۹ برای یک سازه‌ی یک درجه‌ی آزادی در نظر گرفته شود، مطابق شکل ۵، پس از چندین سعی متوالی مقدار نیروی خارج از تعادل (باقیمانده)  $\Psi_n^i$  و اختلاف تغییر مکان  $\Delta U_n^i$  به سمت صفر میل می‌کند. این تذکر لازم است که در شروع تحلیل، میزان  $K_n^i$  سختی اولیه است که در روش نیوتن - رافسون مقدار  $K_n^i$  در هر سعی از هر گام بارگذاری به‌هنگام می‌شود. که این روش به دلیل آسیب‌های وارده به ماتریس سختی در طول مراحل اعمال بار، موجب مشکلاتی در هم‌گرایی در سطح اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی سازه می‌شود. از این روی برای پیشگیری از بروز چنین مشکلی از روش نیوتن - رافسون اصلاح‌شده با در نظر گرفتن ماتریس سختی در اولین گام برای تمامی سعی‌های آن گام استفاده شده‌است. اگرچه بر تعداد سعی‌ها و زمان تحلیل می‌افزاید، ولی مانع تغییرات مکرر ماتریس سختی می‌شود.

برای کنترل هم‌گرایی از معیارهای تغییر مکانی، نیرویی و انرژی استفاده شده است،



شکل ۵. به‌کارگیری روش نیوتن - رافسون.

با انتخاب  $\alpha = 0$ ، مقادیر بردار تنش، کرنش و کمیت‌های سخت‌شدگی براساس گام قبل تعیین می‌شود و با انتخاب آن برابر ۱، این عوامل براساس گام جدید به‌هنگام می‌شوند. با اعمال این روش در معیار رانکین - هیل، تأثیر این پارامتر ( $\alpha$ ) بر حل غیرخطی معادلات به این شرح بررسی شده است:

در انتخاب مقدار صفر برای پارامتر  $\alpha$  در بسیاری از موارد حل معادلات با عدم هم‌گرایی همراه و سیستم معادلات به‌صورت مشروط - پایدار شد. در حالی که با انتخاب مقدار ۱ برای این پارامتر در بسیاری از موارد حل معادلات با هم‌گرایی همراه و سیستم حل معادلات غیرخطی به حالت نامشروط - پایدار تبدیل شد. از طرفی دیگر با انتخاب  $\alpha = 0.75$  (روش ذوزنقه‌یی) اثرات گام قبل و گام جدید تماماً موجب هم‌گرایی در حل عددی می‌شود. نکته‌ی قابل ذکر آن است که انتخاب روش ذوزنقه‌یی سبب افزایش سرعت هم‌گرایی در حل غیرخطی معادلات می‌شود،<sup>[۳۰]</sup> که در تحلیل‌های انجام‌گرفته در معیار رانکین - هیل با این روش افزایش سرعت هم‌گرایی تا ۲ برابر حالت ( $\alpha = 1.0$ ) مشاهده شد. بازنویسی روابط ۳۴ و ۳۵ براساس روش فوق تبدیل به روابط ۳۷ و ۳۸ شده و روابط ۱۴ و ۱۵ و روابط ۲۵ و ۲۶ به‌صورت مشابه بازنویسی می‌شوند:

$$\begin{cases} D^{-1} (\sigma_{n+1} - \sigma^{trial}) \\ + \Delta \lambda_{t,n+1} \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \Big|_n + \alpha \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} \right] \\ + \Delta \lambda_{c,n+1} \left[ (1 - \alpha) \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \Big|_n + \alpha \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} \right] = 0 \quad (37) \\ f_{1,n+1} = \left( \frac{1}{\tau} \xi_{n+1}^T P_t \xi_{n+1} \right)^{\frac{1}{\tau}} + \frac{1}{\tau} \pi^T \xi_{n+1} = 0 \\ f_{r,n+1} = \left( \frac{1}{\tau} \sigma_{n+1}^T P_{c,n+1} \sigma_{n+1} \right)^{\frac{1}{\tau}} - \bar{\sigma}_{c,n+1} = 0 \end{cases}$$

$$J = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \left( \frac{\partial f_1}{\partial \sigma} \right)^T & \frac{\partial f_1}{\partial \kappa_t} & 0 \\ \left( \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \right)^T & 0 & \frac{\partial f_r}{\partial \kappa_c} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \bar{J}_{11} &= D^{-1} + \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \sigma^2} + \alpha \Delta \lambda_{c,n+1} \frac{\partial^2 f_r}{\partial \sigma^2} \\ \bar{J}_{12} &= (1 - \alpha) \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \Big|_n + \alpha \frac{\partial g_1}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} + \alpha \Delta \lambda_{t,n+1} \frac{\partial^2 g_1}{\partial \sigma \partial \kappa_t} \Big|_{n+1} \\ \bar{J}_{13} &= (1 - \alpha) \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \Big|_n + \alpha \frac{\partial f_r}{\partial \sigma} \Big|_{n+1} + \Delta \lambda_{c,n+1} \frac{\partial^2 f_r}{\partial \sigma \partial \kappa_c} \Big|_{n+1} \end{aligned} \quad (38)$$

#### ۴. به‌کارگیری مدل

##### ۱.۴. تحلیل غیرخطی در سطح اجزاء تشکیل‌دهنده

به منظور به‌کارگیری مدل رانکین - هیل از الگوریتم غیرخطی نیوتن - رافسون و نیوتن - نگاشت بازگشتی و همچنین در هر گام بارگذاری از روش نیوتن - رافسون و نیوتن - رافسون اصلاح‌شده استفاده شده است. بر این اساس، در تلاش ن‌آم و در گام بارگذاری  $n$ م مقدار  $\Delta U_n^i$  چنان تعیین شده است که معادله‌ی ۳۹ برقرار باشد:

$$\begin{aligned} K_n^i \times \Delta U_n^i &= R_n - P_n^i = \Psi_n^i \\ U_n^{i+1} &= U_n^i + \Delta U_n^i \end{aligned} \quad (39)$$

که به ترتیب در روابط ۴۰ الی ۴۲ آمده است:

$$\left(\Delta U_n^i T \times \Delta U_n^i\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_N \times \left(\Delta U_n^1 T \times \Delta U_n^1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (40)$$

$$\left(\Psi_n^i T \times \Psi_n^i\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_N \times \left(\Delta P_n^T \times \Delta P_n\right)^{\frac{1}{2}} \quad (41)$$

$$\left(\Delta U_n^i T \times \Psi_n^i\right)^{\frac{1}{2}} < \alpha_N \times \left(\Delta U_n^1 T \times \Psi_n^1\right)^{\frac{1}{2}} \quad (42)$$

در روش حل غیرخطی بر مبنای کنترل تغییرمکان، ابتدا ماتریس سختی کل، بردار تغییرمکان و بردار نیروهای داخلی و خارجی براساس درجات آزادی مقید ( $r$ ) و نامقید ( $f$ ) با استفاده از روابط ۴۳ از یکدیگر تفکیک می‌شوند، سپس مقدار بردار تغییرمکان ( $\Delta U_n^i$ )، نیروهای خارجی ( $R_n$ ) و باقیمانده ( $\Psi_n^i$ ) از مجموعه روابط ۴۴ محاسبه می‌شوند:

$$K_n^i = \begin{bmatrix} K_{rr,n}^i & K_{rf,n}^i \\ K_{fr,n}^i & K_{ff,n}^i \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$\Delta U_n^i = \begin{bmatrix} \Delta U_{r,n}^i \\ \Delta U_{f,n}^i \end{bmatrix}, \quad R_n = \begin{bmatrix} R_{r,n} \\ R_{f,n} \end{bmatrix}, \quad P_n^i = \begin{bmatrix} P_{r,n}^i \\ P_{f,n}^i \end{bmatrix}$$

$$\Delta U_{f,n}^i = K_{ff,n}^{i-1} \left( R_{f,n} - P_{f,n}^i - K_{fr,n}^i \Delta U_{r,n}^i \right)$$

$$R_{r,n} = K_{rr,n}^i \Delta U_{r,n}^i + K_{rf,n}^i \Delta U_{f,n}^i + P_{r,n}^i$$

$$R_{r,n} \ \& \ R_{f,n} \rightarrow R_n$$

$$\Delta U_{r,n}^i \ \& \ \Delta U_{f,n}^i \rightarrow \Delta U_n^i$$

$$\Psi_n^i = R_n - P_n^i \quad (44)$$

این تذکر لازم است که در هنگام استفاده از این روش، در همان اولین سعی از هر گام بارگذاری، مقدار  $\Delta U_{r,n}^i$  برابر مقدار کل تغییرمکان اعمالی آن گام در نظر گرفته می‌شود. به بیان دیگر لازم است که در سعی دوم به بعد تا زمان اتمام معیار هم‌گرایی و رفتن به گام بعد، مقدار  $\Delta U_{r,n}^i \geq 0$  را برابر صفر در نظر گرفت، که در این صورت می‌توان مقدار  $U_{rr,n+1}$  را از رابطه‌ی ۴۵ به دست آورد:

$$U_{r,n+1} = U_{r,n} + \Delta U_{r,n}^i \quad (45)$$

#### ۲.۴. تحلیل غیرخطی در سطح موضعی (نگاشت بازگشتی)

به منظور تعیین بردار تنش براساس مقادیر بردار کرنش در روش‌های حالت خمیری مدرن از روش نگاشت بازگشتی، به عنوان یک روش انتگرال‌گیری عددی در مباحث حالت خمیری استفاده می‌شود. روش بازگشت به عقب اولر<sup>۴</sup>، که به صورت نامشروط پایدار است، برای انتگرال‌گیری از معادلاتی که براساس نرخ متغیرها هستند به کار گرفته می‌شود،<sup>[۳۱] و [۳۲]</sup> که با اعمال این روش، تانسورهای تنش و کرنش خمیری در گام  $n+1$  را می‌توان به کمک روابط ۴۶ بیان کرد:

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta \sigma$$

$$\varepsilon_{n+1}^p = \varepsilon_n^p + \Delta \varepsilon^p$$

$$\sigma_{n+1} = E_0 : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_{n+1}^p) = \sigma_{n+1}^{tr} - E_0 : \Delta \varepsilon^p \quad (46)$$

که در آن، تنش مؤثر آزمون<sup>۵</sup> است، که براساس کرنش خمیری گام قبل،  $\varepsilon_n^p$ ، مطابق رابطه‌ی ۴۷ تعریف می‌شود:

$$\sigma_{n+1}^{trail} = E_0 : (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n^p) \quad (47)$$

رابطه‌های ۴۶ و ۴۷ به صورت روش دو مرحله‌ی پیش‌بین اصلاح‌گر قابل تفسیر است:

۱. مرحله‌ی پیش‌بین کشسان<sup>۶</sup>:  $\sigma_{n+1}^{trail}$ ;

۲. مرحله‌ی اصلاح‌گر خمیری<sup>۷</sup>:  $\Delta \varepsilon^p : -E_0$ .

در صورتی که روش بازگشت به عقب اولر برای انتگرال‌گیری کرنش خمیری مورد استفاده قرار گیرد، نمو کرنش خمیری برای گام مورد نظر،  $n+1$  به صورت رابطه‌ی ۴۸ است:

$$\Delta \varepsilon^p = \Delta \lambda \frac{\partial g}{\partial \sigma_{n+1}} = \Delta \lambda \nabla_{\sigma} g \quad (48)$$

که در آن،  $g$  تابع پتانسیل خمیری است، که برای بخش رانکین به صورت غیروابسته  $g_1$  و برای بخش هیل معیار به صورت وابسته  $f_1$  است. در روش حل نگاشت بازگشتی در معیار دو سطحی رانکین - هیل، ابتدا پس از تعریف مشخصات مصالح و شرایط اولیه‌ی تنش و کمیت‌های سخت‌شوندگی مقدار تغییرات کرنش تعریف می‌شود. سپس براساس رابطه‌ی پیش‌بین کشسان (رابطه‌ی ۴۷) مقدار بردار تنش  $\sigma_{n+1}^{trail}$  محاسبه می‌شود. با فرض بردار تنش  $\sigma_{n+1}^{trail}$  برابر بردار تنش  $\sigma_{n+1}$  و با توجه به تعاریف اولیه، وضعیت انتهای بردار تنش در نواحی سطوح تسلیم به دست می‌آید، که براساس آن سطح تسلیم فعال (یا سطوح تسلیم فعال) تعیین می‌شود. پس از انجام سعی و خطا با استفاده از اصلاح‌گر خمیری، مجدداً سطح تسلیم کنترل می‌شود و با فرض یکسان بودن سطح تسلیم از ابتدایی‌ترین مرحله تا هم‌گرایی، مقدار بردار تنش به عنوان بردار تنش  $\sigma_{n+1}$  در نظر گرفته می‌شود.

#### ۵. مطالعات پارامتریک و راست‌آزمایی

کارکرد معیار اصلاح‌شده و پیشنهادی دو سطحی رانکین - هیل در ۲ بخش انجام شده است. در بخش اول، مطالعات به صورت پارامتریک بر روی نمونه‌های متفاوتی از مسائل تک المان و المان ترکیبی (تیری شکل) و در بخش دوم، برای راست‌آزمایی آن مدل، دیوار بتایی آزمایش‌شده مورد بررسی قرار گرفته است.

#### ۱.۵. مطالعات پارامتریک

به منظور بررسی اثر میزان انرژی شکست در منحنی رفتاری المان ناهمسان‌گرد، رفتار کششی و فشاری به ابعاد و ضخامت واحد (المان چهارگویی  $Q_4$ ) در دو راستای اصلی  $x$  و  $y$  مورد مطالعه قرار گرفت. همچنین به منظور بررسی رفتار چرخه‌ی ناهمسان‌گرد المان، منحنی‌های چرخه‌ی آن در دو راستا (برای کمترین مقدار انرژی شکست کششی و فشاری مندرج در جدول ۱) به دست آمد. مشخصات مصالح مورد تحلیل برای تک المان چهارگویی در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین نمودارهای تنش - کرنش به دست‌آمده از این تحلیل‌ها در شکل‌های ۶ الی ۸ نشان داده شده است. برای بررسی پارامتر رفتار چرخه‌ی ترکیبی رفتار چرخه‌ی تیر طره به طول ۴۰۰ و ارتفاع ۲۰۰ میلی‌متر با ضخامت ۱۰ میلی‌متر با ۴ المان چهارگویی ( $Q_4$ ) با مشخصات مصالح ناهمسان‌گرد (جدول ۲) بررسی شد. در این بررسی، نمودار چرخه‌ی به دست‌آمده به منظور کنترل رفتار چرخه‌ی مدل و همچنین کشور خرابی کششی نمونه به منظور کنترل توزیع مناسب آن در شکل ۹ به دست آمده است.

جدول ۱. پارامترهای مدل المان.

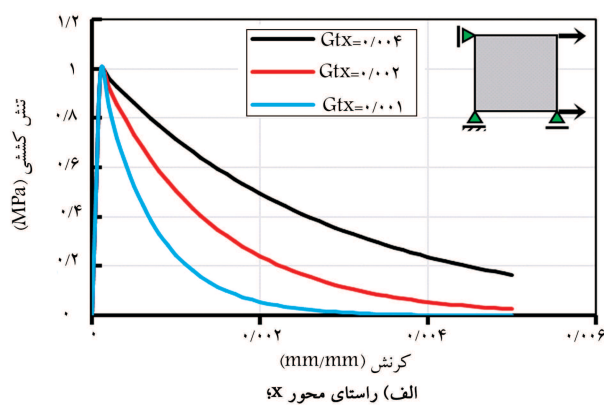
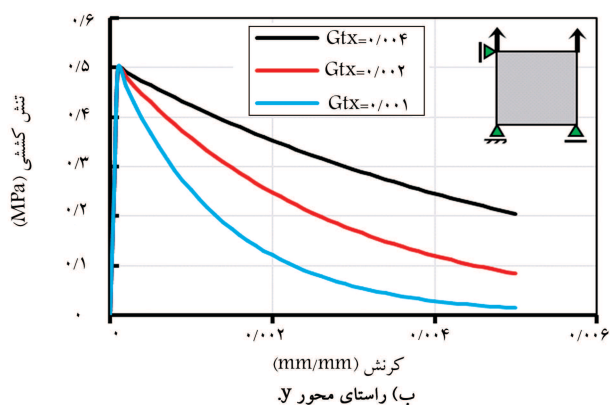
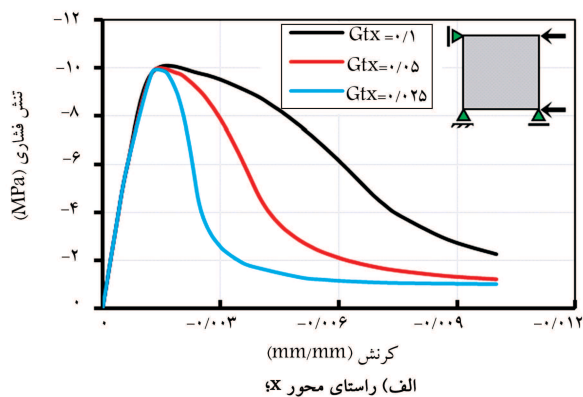
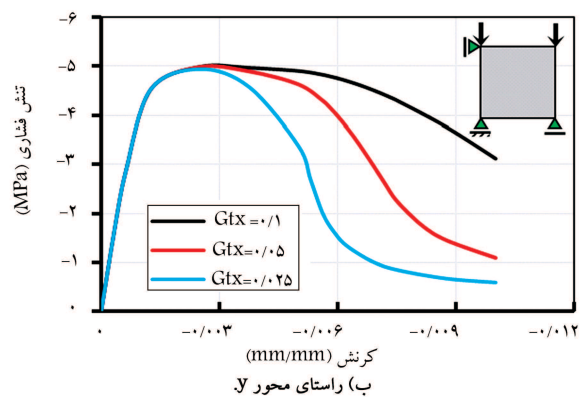
$\gamma$	$\kappa_p$	$\beta$	$\alpha_g$	$\alpha$	$G$ (Nmm/mm <sup>2</sup> )				$f$ (N/mm <sup>2</sup> )				$G, E$ (N/mm <sup>2</sup> )				مشخصات معیار
					$G_{tx}, G_{ty}$	$G_{cx}, G_{cy}$	$f_{ty}$	$f_{tx}$	$f_{cy}$	$f_{cx}$	$\nu_{xy}$	$G_{xy}$	$E_y$	$E_x$			
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	۰٫۲	۳۰۰۰	۵۰۰۰	۱۰۰۰۰	ارتجاعی
--	--	--	۱	۱	۰٫۰۰۴	۰٫۰۰۲	۰٫۰۰۱	--	--	۰٫۵	۱	--	--	--	--	--	رانکین
۲	۰٫۰۰۰۵	-۱	--	--	--	--	--	۰٫۱۰۰	۰٫۰۵۰	۰٫۲۵	--	--	۵	۱۰	--	--	هیل

جدول ۲. پارامترهای مدل تیر طره.

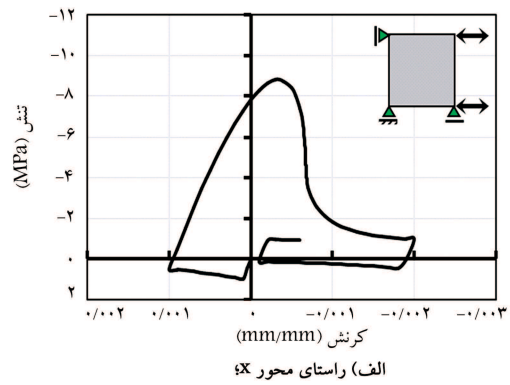
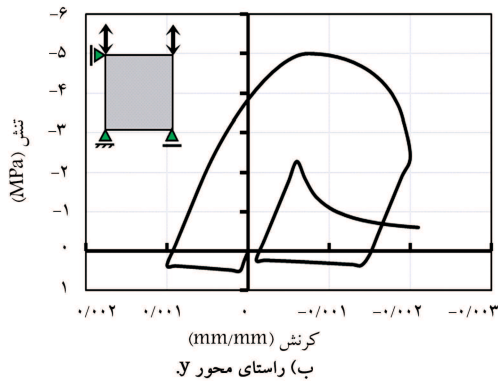
$\gamma$	$\kappa_p$	$\beta$	$\alpha_g$	$\alpha$	$G$ (Nmm/mm <sup>2</sup> )				$f$ (N/mm <sup>2</sup> )				$G, E$ (N/mm <sup>2</sup> )				مشخصات معیار
					$G_{ty}$	$G_{tx}$	$G_{cy}$	$G_{cx}$	$f_{ty}$	$f_{tx}$	$f_{cy}$	$f_{cx}$	$\nu_{xy}$	$G_{xy}$	$E_y$	$E_x$	
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	۰٫۰۹	۱۴۶۰	۳۹۶۰	۷۵۲۰	ارتجاعی
--	--	--	۱	۱	۰٫۰۱۸	۰٫۰۵	--	--	۰٫۲۵	۰٫۳۵	--	--	--	--	--	--	رانکین
۲٫۵	۰٫۰۰۱۲	-۱	--	--	--	--	۳	۵	--	--	۸٫۸	۱۰	--	--	--	--	هیل

جدول ۳. پارامترهای دیوار گنز.

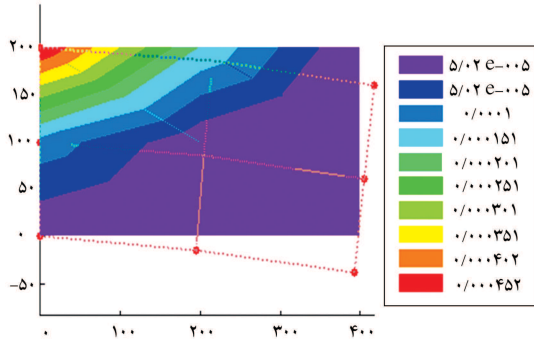
$\gamma$	$\kappa_p$	$\beta$	$\alpha_g$	$\alpha$	$G$ (Nmm/mm <sup>2</sup> )				$f$ (N/mm <sup>2</sup> )				$G, E$ (N/mm <sup>2</sup> )				مشخصات معیار
					$G_{ty}$	$G_{tx}$	$G_{cy}$	$G_{cx}$	$f_{ty}$	$f_{tx}$	$f_{cy}$	$f_{cx}$	$\nu_{xy}$	$G_{xy}$	$E_y$	$E_x$	
--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	۰٫۱۸	۱۱۳۰	۵۴۶۰	۲۴۶۰	ارتجاعی
--	--	--	۱	۱٫۷۳	۰٫۰۲	۰٫۰۲	--	--	۰٫۰۵	۰٫۲۸	--	--	--	--	--	--	رانکین
۱٫۲	۰٫۰۰۰۸	-۱٫۰۵	--	--	--	--	۱۰	۵	--	--	۷٫۸۶	۱٫۷۸	--	--	--	--	هیل

شکل ۶. منحنی رفتاری کششی راستای محور  $y$  و  $x$ .شکل ۷. منحنی رفتاری فشاری راستای محور  $y$  و  $x$ .

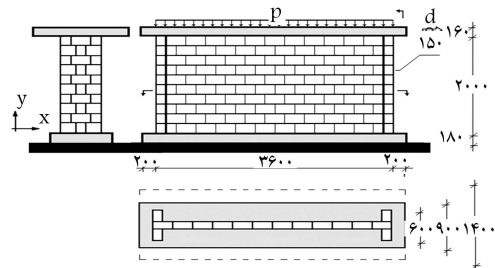
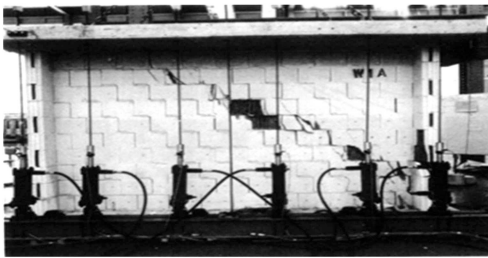




شکل ۸. منحنی رفتاری چرخه‌یی راستای محور  $y$  و  $x$ .



شکل ۹. منحنی رفتاری چرخه‌یی و توزیع خرابی کششی تیر طره.



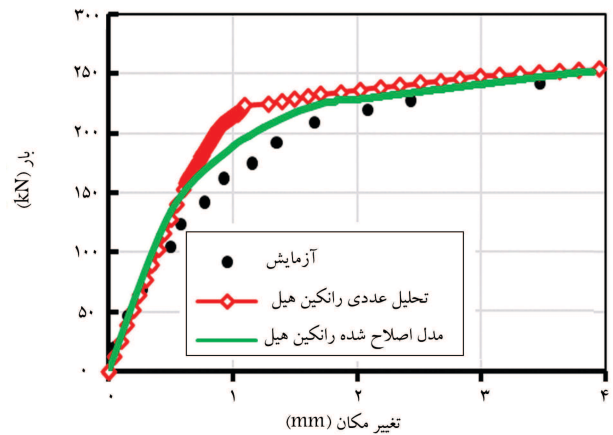
شکل ۱۰. مشخصات هندسی و نحوه‌ی خرابی دیوار گنز.

## ۲.۵. راست آزمایی

به منظور راست آزمایی مدل پیشنهادی، رفتار غیرخطی نمونه‌ی دیواری که توسط گنز آزمایش شده بود و دارای مشخصات هندسی ارائه شده در شکل ۱۰ و مشخصات مصالح مطابق جدول ۳ بود، بررسی و نتایج به دست آمده از تحلیل بر مبنای مدل رانکین - هیل با نتایج آزمایش مقایسه و تأیید شد. [۸] شکل ۱۱، مقایسه‌ی نتایج منحنی بار - تغییر مکان حاصل از کد نرم‌افزاری با نتایج آزمایش را نشان می‌دهد. ملاحظه می‌شود که اصلاح منحنی‌های تنش - کرنش معادل (در کشش و فشار) بر اساس مدل لوبلیتزر موجب بهبود رفتار در مقیاس کلی نمونه شده است.

## ۶. نتیجه‌گیری

۱. مدل دو سطحی رانکین - هیل به دلیل تعریف دقیق مشخصه‌های سخت‌شدگی



شکل ۱۱. منحنی رفتاری تحلیلی و آزمایشگاهی دیوار گنز.

۲. توسعه‌ی مدل به کمک اصلاح منحنی‌های تنش - کرنش معادل نه فقط موجب افزایش پایداری در فرآیند حل غیرخطی می‌شود، بلکه دقت پیش‌بینی رفتار در سطح اجزاء تشکیل‌دهنده‌ی سازه نیز بیشتر می‌شود.
۳. استفاده از روش پیشنهادی تسریع در حل معادلات موضعی (نگاشت بازگشتی) با منظورکردن معیار تسلیم ترکیبی موجب می‌شود که اولاً، سرعت هم‌گرایی تا ۲ برابر افزایش یابد و ثانیاً، سیستم حل معادلات به معادلات غیرخطی نامشروط - پایدار تبدیل شود.

/نرم‌شدگی، رفتار مصالح آجری را به خوبی تبیین می‌کند. ولی به دلایلی نظیر این موارد چندان کارا نخواهد بود:

- الف مشکلات هم‌گرایی در حل مدل‌های چندسطحی،  
 ب گوشه‌دار بودن معیار رانکین،  
 پ رفتار وابسته به جهت مدل چندسطحی.

## پانوشته‌ها

1. multilaminar
2. return-mapping process
3. snap-back
4. backward-euler
5. trial effective stress
6. elastic predictor
7. plastic corrector

## منابع (References)

1. Roca, P., Cervera, M., Gariup, G. and Pelà, L. "Structural analysis of masonry historical constructions, classical and advanced approaches", *Archives of Computational Methods in Engineering*, **17**(3), pp. 299-325 (2010).
2. Chen, S., Moon, F. and Yi, T. "A macroelement for the nonlinear analysis of in-plane unreinforced masonry piers", *Engineering Structure*, **30**(8), pp. 2242-2245 (2009).
3. Lishak, V., Yagust, V. and Yankelevsky, D.Z. "2-D orthotropic failure criteria for masonry", *Engineering Structure*, **36**, pp. 360-371 (2012).
4. Schellekens, J.C.J. and De Borst, R. "The use of the hoffman yield criterion in finite element analysis of anisotropic composites", *Computers and Structures*, **37**(6), pp. 1087-1096 (1990).
5. De Borst, R. and Feenstra, P.H. "Studies in anisotropic plasticity with reference to the hill criterion", *International Journal Numerical Methods Engineering*, **29**(2), pp. 315-336 (1990).
6. Lourenço, P.B. "Computational strategies for masonry structures", PhD Thesis, Delft University, The Netherlands (1996).
7. Seim, W. "Numerical modeling of the failure of biaxially loaded masonry walls with consideration of anisotropy (in German)", Dissertation, University of Karlsruhe, Germany (1994).
8. Ganz, H.R. "Masonry walls under normal force and shear (in German)", Report No. 148, Institute of Structural Engineering, ETH Zurich, Switzerland (1985).
9. Dhanasekar, M., Page, A.W. and Kleeman, P.W. "The failure of brick masonry under biaxial stresses", *Proc. Intsn. Civ. Engrs., Part 2*, **79**(2), pp. 295-313 (1985).
10. Pela, L., Miguel, C., Roca, P. "Continuum damage model for orthotropic materials: Application to masonry", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **200**(9-12), pp. 917-930 (2011).
11. El-Dakhakhni, W.W., Drysdale, R.G. and Khattab, M.M. "Multilaminar macro model for concrete masonry: Formulation and verification", *Journal of Structural Engineering*, **132**(12), pp. 1984-1996 (2006).
12. Asteris, P.G. and Tzamtzis, A.D. "On the use of a regular yield surface for the analysis of unreinforced masonry walls", *Electronic Journal of Structural Eng.*, **3**, pp. 23-42 (2003).
13. Luciano, R. and Sacco, E. "Homogenization technique and damage model for old masonry material", *International Journal of Solids and Structures*, **34**(24), pp. 3191-3208 (1997).
14. Gambarotta, L. and Lagomarsino, S. "Damage models for the seismic response of brick masonry shear walls. Part II: the continuum model and its applications", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **26**(4), pp. 441-462 (1997).
15. Massart, T.J., Peerlings, R.H.J. and Geers, M.G.D. "Mesoscopic modeling of failure and damage-induced anisotropy in brick masonry", *European Journal of Mechanics A/Solids*, **23**(5), pp. 719-735 (2004).
16. Milani, G., Lourenço, P.B. and Tralli, A. "Homogenised limit analysis of masonry walls. Part I: Failure surfaces", *Computers and Structures*, **84**(3-4), pp. 166-180 (2006a).
17. Milani, G., Lourenço, P.B. and Tralli, A. "Homogenised limit analysis of masonry walls. Part II: Structural examples", *Computers and Structures*, **84**(3-4), pp. 181-195 (2006b).
18. Zucchini, A. and Lourenço, P.B. "A micro-mechanical model for the homogenisation of masonry", *International Journal of Solids and Structures*, **39**(12), pp. 3233-3255 (2002).
19. Scarpas, A. And Blaauwendraad, J. "Non-local plasticity softening model for brittle materials", *Fracture and Damage of Concrete and Rock*, *FDCR-2*, eds.H.P. Rossmannith, E & FN. Spon., London, UK, pp. 44-53 (1993).

20. Lourenço, P.B., Rots, J.G. and Blaauwendraad, J. "Continuum model for masonry: Parameter estimation and validation", *Journal of Structural Engineering, ASCE*, **124**(6), pp. 642-652 (1998).
21. Chen, W.F., *Plasticity in Reinforced Concrete*, McGraw-Hill, New York (1984).
22. Hordijk, D.A. "Local approach to fatigue of concrete", PhD thesis, Delft University of Technology, The Netherlands (1993).
23. Feenstra, P.H., *Computational Aspects of Biaxial Stress in Plain and Reinforced Concrete*, Dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands (1993).
24. Rots, J.G., *Computational Modeling of Concrete Fracture*, Dissertation, Delft University of Technology, The Netherlands (1988).
25. Lourenço, P.B. "Analysis of masonry structures with interface elements: Theory and applications", Report 03-21-22-0-01, Delft University of Technology, The Netherlands (1994).
26. Lourenço, P.B. "The elastoplastic implementation of homogenization techniques: With an extension to masonry structures", Report 03-21-1-31-02, Delft University of Technology, The Netherlands (1995).
27. Hill, R., *The Mathematical Theory of Plasticity*, Oxford University Press, UK (1950).
28. Lee, J. and Fenves, G.L. "A return-mapping algorithm for plastic-damage models: 3-D and plane stress formulation", *International Journal Numerical Methods Engineering*, **50**(2), pp. 487-506 (2001).
29. Lubliner, J., Oliver, J., Oller, S. and Onate, E. "A plastic-damage model for concrete", *International Journal of Solids and Structures*, **25**(3), pp. 299-326 (1989).
30. Ortiz, M. and Popov, E.P. "Accuracy and stability of integration algorithms for elastoplastic constitutive relations", *International Journal Numerical Methods Engineering*, **21**(9), pp. 1561-1576 (1985).
31. Simo, J.C. "Algorithm for static and dynamics multiplicative plasticity that preserve the classical return-mapping schemes of the infinitesimal theory", *Computer Method in Applied Mechanics and Eng.*, **99**(1), pp. 61-112 (1991).
32. Corigliani, A. and Perego, U. "Generalized midpoint finite element dynamic analysis of elastoplastic system", *Inter. J. Numerical Methods Eng.*, **36**(3), pp. 361-383 (1993).