

بررسی کمانش دمایی تیرهای مدرج هدفمند با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر

علیرضا وثوقی (استادیار)

گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد شيراز

امروزه استفاده از مواد نوین همچون مواد مرکب لایه‌یی، مواد مدرج هدفمند و غیره، کاربرد وسیعی در شاخه‌های مختلف مهندسی پیدا کرده‌اند. در مواد مدرج هدفمند، در جهت ضخامت، نوع مصالح به‌کاررفته در آنها تغییر می‌کند و می‌تواند از فلز در یک سطح به سرامیک در سطح دیگر تبدیل و سبب تحمل تغییرات شدید دما شود. این موضوع می‌تواند سبب افزایش دمای کمانشی و به تبع آن عملکرد بهتر سازه در تغییرات شدید دمایی شود. در این نوشتار، به بررسی دمای کمانش تیرهای مدرج هدفمند نسبتاً ضخیم با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر پرداخته شده است. معادلات حاکم با استفاده از تئوری برشی مرتبه اول (تئوری تیموشنکو) و فرض تنش صفحه‌یی به دست آمده است. جهت تجزیه‌ی معادلات حاکم و شرایط مرزی از روش دیفرانسیل کوادریچر استفاده شده است. نرخ هم‌گرایی و دقت روش عددی نسبتاً نوین دیفرانسیل کوادریچر، تأثیر شرایط مرزی، نسبت ضخامت به طول تیر و... از موارد بررسی شده در این نوشتار است.

واژگان کلیدی: تیر مدرج هدفمند، کمانش دمایی، تئوری برشی مرتبه‌ی اول، روش دیفرانسیل کوادریچر.

vosoughi@shirazu.ac.ir

۱. مقدمه

استفاده از مواد نوین با توجه به داشتن خصوصیات مادی بهتر نسبت به مواد متعارف امروزه کاربرد گسترده‌ی در صنایع مختلف همچون هوافضا، کشتی‌سازی و... پیدا کرده است. لذا تعیین رفتار المان‌های سازه‌یی همچون تیرها و... ساخته شده از مواد مدرج هدفمند از مواردی است که همواره مورد توجه پژوهشگران بسیاری قرار گرفته است و آنها به ارائه راه‌حل‌های مختلف به منظور بررسی این‌گونه مسائل پرداخته‌اند.^[۱-۱۴] تعیین دمای کمانشی تیرها از مواردی است که می‌تواند رفتار سازه را تحت تأثیر قرار دهد. در ادامه، به بررسی پژوهش‌های انجام‌شده در دسترس، که اخیراً در این زمینه چاپ شده‌اند، پرداخته شده است. پژوهشگرانی در سال ۲۰۰۴، با استفاده از تئوری اولر - برنولی با در نظر گرفتن جابجایی‌های طولی و عرضی، ارتعاش تیر مدرج هدفمند را تحت اثر تغییرات دما بررسی کرده‌اند.^[۹] در پژوهش دیگری در سال ۲۰۰۷، به بررسی کمانش دمایی تیرهای همگن و ایزوتروپیک واقع بر بستر ارتجاعی با استفاده از تئوری اولر - برنولی پرداخته شده است، که در آن جهت حل مسئله از روش تحلیلی استفاده شده است.^[۱۰] در سال ۲۰۱۱ نیز در پژوهش دیگری با استفاده از تئوری یک بعدی کشسانی، راه‌حلی تحلیلی جهت تعیین دمای کمانشی تیرهای مدرج هدفمند ارائه شده است.^[۱۱] همچنین در سال ۲۰۱۰، با استفاده از تئوری اولر - برنولی به بررسی کمانش دمایی تیر مدرج هدفمند پرداخته شده و از حل تحلیلی جهت بررسی مسئله استفاده شده است.^[۱۲] و نیز در همان سال (۲۰۱۰) در پژوهش دیگری به ارائه‌ی

۲. بیان مسئله و معادلات حاکم

تیر مدرج هدفمند نشان داده شده در شکل ۱ را در نظر بگیرید. طول تیر L و ضخامت آن h است. تیر در دمای T_0 بدون تنش و افزایش دما نیز یک‌نواخت است. برای تحلیل مواد مدرج هدفمند، توزیع خواص مادی در راستای ضخامت عموماً به صورت توزیع قانون توانی در نظر گرفته می‌شود. در حالت کلی خصوصیات مادی مدرج هدفمند به صورت رابطه‌ی ۱ در نظر گرفته می‌شود:^[۱۳]

$$P = P_m V_m + P_c V_c \quad (1)$$

تاریخ: دریافت ۱۳۹۱/۸/۳، اصلاحیه ۱۳۹۲/۳/۲۸، پذیرش ۱۳۹۲/۴/۴.

با استفاده از روابط ۴ الی ۶، معادلات حاکم بر تیر به صورت روابط ۷ الی ۹ خواهند بود:

$$A_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + B_{11} \frac{\partial^4 \varphi^x}{\partial x^4} = 0 \quad (7)$$

$$B_{11} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + A_{55} \left(\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{\partial \varphi^x}{\partial x} \right) - N_{xx}^T \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0 \quad (8)$$

$$D_{11} \frac{\partial^4 \varphi^x}{\partial x^4} - A_{55} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \varphi^x \right) = 0 \quad (9)$$

که در آنها، مؤلفه‌های سختی و نیروهای منتج درون صفحه‌یی به صورت روابط ۱۰ الف الی ۱۰ د تعریف می‌شوند:

$$[A_{11}, D_{11}] = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q(z) (1, z^2) dz \quad (10 \text{ الف})$$

$$B_{11} = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} z Q(z) dz \quad (10 \text{ ب})$$

$$A_{55}(T) = \kappa_{55} \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q(z) dz \quad (10 \text{ ج})$$

$$N_{xx}^T = \int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{h}{4}} Q(z) \alpha(z) \Delta T dz \quad (10 \text{ د})$$

که در آنها، $\kappa_{55} = 5/6$ ضریب تصحیح برشی است.^[۱۶]

با توجه به تأثیر شرایط مرزی ساده و گیردار بر دمای کمانشی، شرایط مرزی ساده و گیردار در تکیه‌گاه‌ها به این صورت در نظر گرفته شده است:

الف) شرایط مرزی ساده (رابطه‌ی ۱۱):

$$u_0 = 0, \quad w = 0, \quad M_{xx} = 0 \quad (11)$$

ب) شرایط مرزی گیردار (رابطه‌ی ۱۲):

$$u_0 = 0, \quad w = 0, \quad \varphi^x = 0 \quad (12)$$

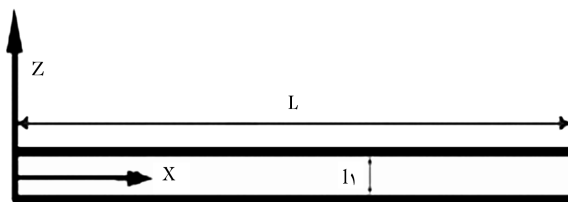
۳. حل مسئله با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر

هدف در روش دیفرانسیل کوادریچر، تجزیه‌ی مشتق تابع به متغیر مکانی در نقطه‌ی موردنظر است. مثلاً تابع $f(x)$ به گونه‌ی $0 \leq x \leq L$ باشد، را در نظر بگیرید. با استفاده از روش دیفرانسیل کوادریچر، مشتق مرتبه‌ی r ام تابع موردنظر در تعداد N_x گره به صورت رابطه‌ی ۱۳ تقریب زده می‌شود:

$$\frac{\partial^r f(x)}{\partial x^r} \Big|_{x=x_i} = \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{x(r)} f(x_j) = \sum_{j=1}^{N_x} A_{ij}^{x(r)} f_j; \quad i = 1, 2, \dots, N_x, \quad r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (13)$$

که در آن، نکته‌ی مهم تعیین ضریب وزن و انتخاب نقاط موردنظر است. به منظور تعیین ضرایب وزن با استفاده از چندجمله‌یی لاگرانژ ضریب وزن مشتق اول در جهت x به صورت رابطه‌ی ۱۴ خواهد بود:^[۱۷]

$$A_{ij}^x = \frac{1}{L} \begin{cases} \frac{M(x_i)}{(x_i - x_j) M(x_j)} & \text{for } i \neq j \\ - \sum_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^{N_x} A_{ij}^x & \text{for } i = j; \end{cases} \quad i, j = 1, 2, \dots, N_x \quad (14)$$



شکل ۱. هندسه‌ی مسئله‌ی موردنظر.

که در آن، P و V به ترتیب خصوصیت ماده و کاهش حجم و نیز m و c به ترتیب بیانگر فلز و سرامیک هستند.

با استفاده از قانون توانی، تغییرات ماده از فاز خالص در سطح زیرین تا سرامیک خالص در سطح فوقانی را می‌توان به صورت رابطه‌ی ۲ نوشت:^[۱۴]

$$V_c = \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n; \quad V_m = 1 - \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (2)$$

که در آن، n ضریب کاهش حجم است.

با جایگزینی رابطه‌ی ۲ در رابطه‌ی ۱، می‌توان مدول یانگ (E)، ضریب انتقال حرارت (α)، ضریب پواسون (ν) و چگالی (ρ) تیر مدراج هدفمند را به صورت روابط ۳ الف الی ۳ د نوشت:

$$E(z) = E_m + (E_c - E_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (3 \text{ الف})$$

$$\alpha(z) = \alpha_m + (\alpha_c - \alpha_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (3 \text{ ب})$$

$$\nu(z) = \nu_m + (\nu_c - \nu_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (3 \text{ ج})$$

$$\rho(z) = \rho_m + (\rho_c - \rho_m) \left(\frac{2z+h}{2h} \right)^n \quad (3 \text{ د})$$

با استفاده از فرض تنش صفحه‌یی می‌توان مؤلفه‌ی محوری تنش را به صورت رابطه‌ی ۴ عنوان کرد:^[۱۵]

$$\sigma_{xx}^T = Q(z) \alpha(z) \Delta T \quad (4)$$

که در آن، $Q(z) = \frac{E(z)}{1-\nu^2}$ و ΔT میزان افزایش دمای تیر است. با در نظر گرفتن انرژی پتانسیل کل تیر می‌توان رابطه‌ی ۵ را نوشت:^[۱۵]

$$\delta (\delta^T \Pi) = \int_0^L \int_A \left[\sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + 2 \sigma_{xz} \delta \varepsilon_{xz} + \frac{\sigma_{xx}^T}{4} \times \delta \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right] dz dA = 0 \quad (5)$$

که در آن، Π انرژی پتانسیل کل است.

با توجه به تئوری برشی مرتبه‌ی اول جابجایی طولی u و عرضی w نقطه‌یی مادی از تیر به صورت روابط ۶ الف و ۶ ب نوشته می‌شود:

$$u(x, z) = u_0(x) + z \varphi^x(x) \quad (6 \text{ الف})$$

$$w(x, z) = w_0(x) \quad (6 \text{ ب})$$

که در آنها، u_0 جابجایی طولی نقطه‌یی دلخواه از تیر واقع بر صفحه‌ی میانی تیر و φ^x میزان چرخش صفحه‌ی عمود بر صفحه‌ی میانی حول محور y است.

به منظور کاهش هزینه‌ی محاسبات به‌سادگی می‌توان درجه‌ی آزادی $\{U\}$ را از رابطه‌ی ۲۲ حذف و دستگاه معادلات را به‌صورت رابطه‌ی ۲۳ نوشت:

$$\left([\hat{K}_{ww}] - \Delta T [G_{ww}] \right) \{w\} = \{0\} \quad (23)$$

که در آن، $[\hat{K}_{ww}] = [K_{ww}] - [K_{wu}] [K_{uu}]^{-1} [K_{uw}]$ ، با حل مسئله‌ی مقدار مشخصه‌ی فوق می‌توان مقدار دمای کمانش ΔT تیر مدرج هدفمند را محاسبه کرد.

۴. نتایج عددی

ابتدا به منظور بررسی صحت نتایج به‌دست‌آمده و نشان‌دادن هم‌گرایی روش مورد استفاده، هم‌گرایی مسئله جهت تیر نازک در جدول ۱ ارائه شده است. خصوصیات ماده‌ی مورد استفاده در این جدول و سایر نتایج به‌دست آمده به این صورت لحاظ شده است: $^{[14]}$ در وجه سرامیک (Al₂O₃):

$$E = 348.43 \text{ GPa}, \quad \alpha = 5.8722 \times 10^{-6} \text{ (1/K)}, \\ \nu = 0.24, \quad \rho = 2370 \text{ kg/m}^3 \quad (24)$$

و در وجه فلز (SUS۳۰۴):

$$E = 201.04 \text{ GPa}, \quad \alpha = 12.33 \times 10^{-6} \text{ (1/K)}, \\ \nu = 0.2262, \quad \rho = 8166 \text{ kg/m}^3 \quad (25)$$

در کلیه‌ی نتایج به‌دست‌آمده در این نوشتار، دمای کمانش بی‌بعد شده به‌صورت $T_0 = 0$ و $\lambda = \Delta T L^2 \alpha_m / h^2$ لحاظ شده است.

همان‌گونه که در جدول ۱ ارائه شده است، روش مورد استفاده جهت تعیین دمای کمانشی تیر مدرج هدفمند دارای نرخ هم‌گرایی و دقت بسیار خوبی است، لذا از این به بعد جهت تولید نتایج عددی در محاسبات، $N_x = 23$ در نظر گرفته شده است.

همچنین در جدول‌های ۲ الی ۴، اثر نسبت ضخامت به طول بر دمای کمانش بی‌بعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند به‌ازاء مقادیر مختلف n برای شرایط مرزی گوناگون ارائه شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با افزایش مقدار n در تمام حالات دمای کمانش بی‌بعد شده کاهش یافته است. اما با افزایش نسبت ضخامت به طول و افزایش شرایط گیرداری دمای کمانش بی‌بعد شده کاهش (دمای کمانش افزایش) یافته است.

جدول ۱. هم‌گرایی دمای کمانش بی‌بعد شده‌ی تیر مدرج هدفمند دو سر ساده (SS)، $h/L = 0.1$

Ritz ^[14]	N_x				n
	۱۹	۱۱	۹	۷	
۰٫۹۹۱	۰٫۹۸۸۹	۰٫۹۸۸۹	۰٫۹۸۸۹	۰٫۹۸۹۶	۰٫۵
۰٫۸۷۶	۰٫۸۸۲۷	۰٫۸۸۲۷	۰٫۸۸۲۷	۰٫۸۸۳۴	۱٫۰
۰٫۸۱	۰٫۸۰۸۸	۰٫۸۰۸۸	۰٫۸۰۸۸	۰٫۸۰۹۴	۲٫۰
۰٫۷۵	۰٫۷۴۲۷	۰٫۷۴۲۷	۰٫۷۴۲۷	۰٫۷۴۳۲	۵٫۰
۰٫۷۱۲	۰٫۷۰۰۵	۰٫۷۰۰۵	۰٫۷۰۰۵	۰٫۷۰۱۰	۱۰٫۰

که در آن: $M(x_i) = \prod_{j=1, i \neq j}^{N_x} (x_i - x_j)$. همچنین ضریب وزن برای مشتق دوم به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ است:

$$[B_{ij}^x] = [A_{ij}^x][A_{ij}^x] = [A_{ij}^x]^T, \\ i = 1, 2, \dots, N_x, \quad r = 1, 2, \dots, N_x - 1 \quad (15)$$

جهت تولید گره‌ها از توزیع کسینوسی به‌صورت رابطه‌ی ۱۶ استفاده شده است:

$$\frac{x_i}{a} = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \cos \left[\frac{(i-1)\pi}{N_x-1} \right] \right\}; \quad i = 1, 2, \dots, N_x \quad (16)$$

با استفاده از روابط مذکور می‌توان معادلات حاکم بر تیر مدرج هدفمند را در دامنه‌ی مکان در هر نقطه‌ی i دامنه، که $i = 2, \dots, N_x^t (= N_x - 1)$ است، به‌این صورت تجزیه کرد:

فرم تجزیه‌شده‌ی رابطه‌ی ۴ (رابطه‌ی ۱۷):

$$\sum_{m=2}^{N_x^t} B_{im}^x u_m + \left(\sum_{m=2}^{N_x^t} A_{im}^x w_m \right) \left(\sum_{m=2}^{N_x^t} B_{im}^x w_m \right) = 0 \quad (17)$$

فرم تجزیه‌شده‌ی رابطه‌ی ۸:

$$A_{\delta\delta} \left(\sum_{m=2}^{N_x^t} B_{im}^x w_m + \sum_{m=2}^{N_x^t} A_{im}^x \varphi_m^x \right) - (N_{xx}^T)_i \sum_{m=2}^{N_x^t} B_{im}^x w_m = 0 \quad (18)$$

فرم تجزیه‌شده‌ی رابطه‌ی ۹:

$$D_{\lambda\lambda} \sum_{m=1}^{N_x} B_{im}^x \varphi_m^x - A_{\delta\delta} \left(\sum_{m=2}^{N_x^t} A_{im}^x w_m + \varphi_i^x \right) = 0 \quad (19)$$

فرم تجزیه‌شده‌ی شرایط مرزی روابط ۱۱:

$$u_{,i} = 0, \quad w_i = 0, \quad \sum_{m=1}^{N_x} B_{im}^x \varphi_m^x = 0 \quad (20)$$

فرم تجزیه‌شده‌ی شرایط مرزی روابط ۱۲:

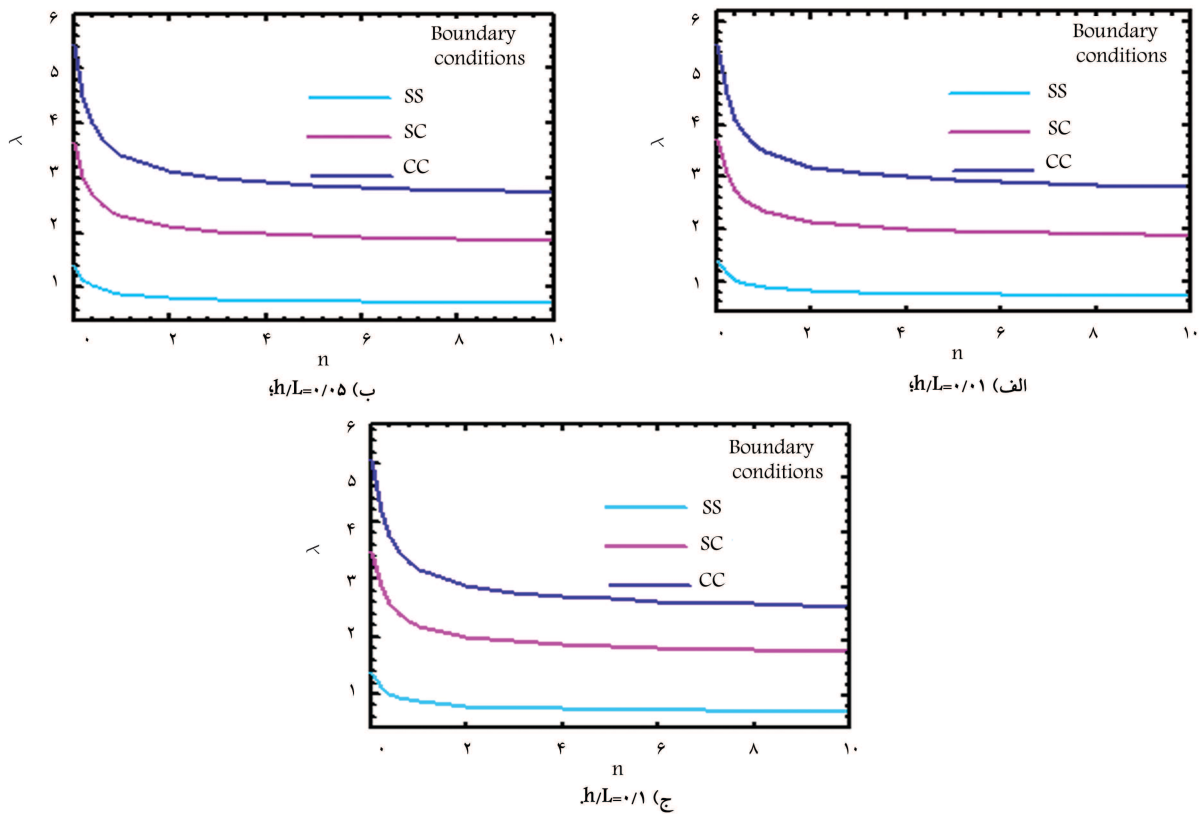
$$u_{,i} = 0, \quad w_i = 0, \quad \varphi_i = 0 \quad (21)$$

در دو رابطه‌ی ۲۰ و ۲۱، $i = 1$ در $x = 0$ و $i = N_x$ در $x = L$ است.

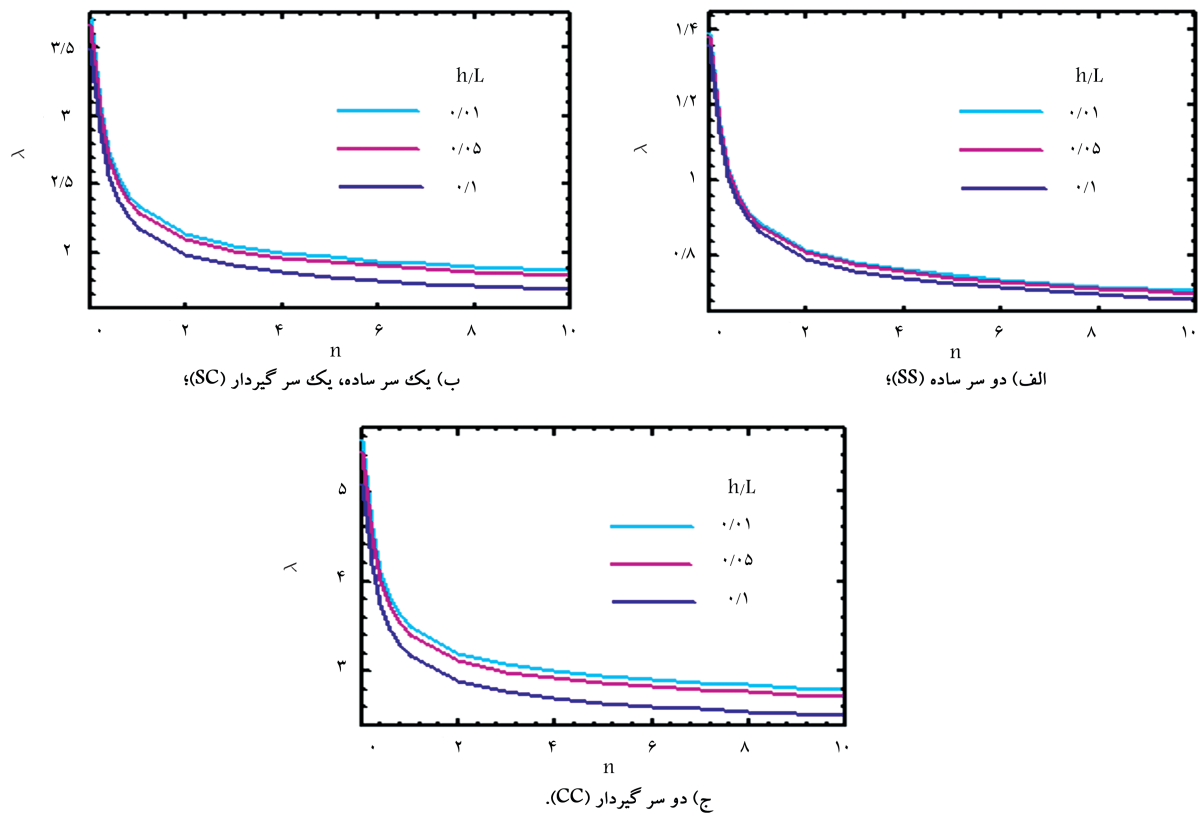
فرم تجزیه‌شده‌ی معادلات حاکم و شرایط مرزی به‌دست‌آمده از روابط ۱۷ الی ۲۱ را می‌توان به‌صورت ماتریسی نوشت:

$$\left(\left[\begin{array}{cc} [K_{ww}] & [K_{wu}] \\ [K_{uw}] & [K_{uu}] \end{array} \right] - \Delta T \left[\begin{array}{cc} [G_{ww}] & [0] \\ [0] & [0] \end{array} \right] \right) \times \left\{ \begin{array}{c} \{w\} \\ \{U\} \end{array} \right\} = \{0\} \quad (22)$$

که در آن، $\{U\} = \left\{ \begin{array}{c} \{u_i\} \\ \{\varphi_i^x\} \end{array} \right\}$ بردار درجات آزادی، $[K_{ij}]$ با $(i, j = u, w)$ ماتریس سختی و $[G_{ww}]$ ماتریس سختی هندسی مربوط به اثر ترم دمایی است.



شکل ۲. تأثیر شرایط مرزی بر کماتش دمایی بی بعدشدهی تیرهای مدرج هدفمند به ازاء نسبت ضخامت به طول های مختلف.



شکل ۳. تأثیر h/L بر کماتش دمایی بی بعدشدهی تیرهای مدرج هدفمند به ازاء شرایط مرزی مختلف.

در شکل ۲، اثر شرایط مرزی^۱ بر دمای کمانش بی‌بعدشدهی تیرهای مدرج هدفمند به‌ازاء نسبت ضخامت به طول‌های مختلف ترسیم شده است. همان‌گونه که ملاحظه می‌شود، با افزایش مقدار n مقدار دمای کمانشی کاهش می‌یابد. همچنین با افزایش نسبت ضخامت به طول تیر، دمای کمانشی بی‌بعدشده کاهش (دمای کمانشی افزایش) یافته است. با افزایش شرایط گیرداری در تکیه‌گاه‌ها مقدار دمای کمانشی تیرها افزایش یافته و میزان این افزایش با افزایش نسبت ضخامت به طول بیشتر شده است.

در شکل ۳، به‌ازاء شرایط مرزی مختلف اثر نسبت ضخامت به طول بر دمای کمانشی تیرهای مدرج هدفمند در نمودارهای مختلف نشان داده شده است. در اینجا نیز با افزایش شرایط گیرداری دمای کمانشی تیرهای مدرج افزایش یافته است. همچنین با افزایش شرایط گیرداری در تکیه‌گاه‌ها به‌ازاء n ‌های مختلف تأثیر نسبت ضخامت به طول تیرها بیشتر شده است.

۵. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، معادلات حاکم بر کمانش دمایی تیرهای مدرج هدفمند نسبتاً ضخیم با استفاده از تئوری برشی مرتبه‌ی اول با فرض تنش صفحه‌یی به‌دست‌آمده و با استفاده از روش عددی نسبتاً نوین دیفرانسیل کوادریچر معادلات حاکم و شرایط مرزی در بعد مکان تجزیه شده‌اند. نرخ هم‌گرایی مناسب، دقت، کارایی و هزینه‌ی محاسباتی پایین روش دیفرانسیل کوادریچر در حل این مسائل از نکات به‌دست‌آمده در این پژوهش است. بررسی اثرات مربوط به شرایط مرزی مختلف، نسبت ضخامت به طول تیرهای مدرج هدفمند و نوع خصوصیت ماده مورد استفاده از موارد بررسی شده در این نوشتار است.

تقدیر و تشکر

این نوشتار، منتج از بخشی از طرح پژوهشی انجام‌شده در دانشگاه آزاد اسلامی واحد شیراز است، لذا نویسنده از پشتیبانی مالی دانشگاه کمال تشکر دارد.

پانویس

1. Boundary conditions

منابع (References)

1. Sankar, B.V. "An elasticity solution for functionally graded beams", *Composite Science and Technology*, **61**(5), pp. 689-696 (2001).
2. Chakraborty, A. and Gopalakrishnan, S.A. "Spectrally formulated finite element for wave propagation analysis in functionally graded beams", *International Journal of Solids and Structures*, **40**(10), pp. 2421-2448 (2003).

جدول ۲. اثر h/L تیرهای مدرج هدفمند بر دمای کمانش بی‌بعدشدهی تیر دو سر ساده (SS).

h/L	n				
	۱/۵	۱/۰	۲/۰	۵/۰	۱۰/۰
۰/۰۱	۰/۹۸۸۸۹	۰/۸۸۳۴	۰/۸۰۹۴	۰/۷۴۳۲	۰/۷۰۱۰
۰/۰۵	۰/۹۸۸۸۸	۰/۸۸۳۲۷	۰/۸۰۸۸	۰/۷۴۲۷	۰/۷۰۰۵
۰/۱	۰/۹۷۰۰۶	۰/۸۶۶۰	۰/۷۹۲۶	۰/۷۲۷۰	۰/۶۸۵۵

جدول ۳. اثر h/L تیرها بر دمای کمانش بی‌بعدشدهی تیر مدرج هدفمند یک سر ساده، یک سر گیردار (SC).

h/L	n				
	۱/۵	۱/۰	۲/۰	۵/۰	۱۰/۰
۰/۰۱	۲/۶۳۶۳	۲/۳۳۷۸	۲/۱۳۷۳	۱/۹۷۷۰	۱/۸۷۵۷
۰/۰۵	۲/۵۹۳۱	۲/۲۹۸۵	۲/۰۹۹۷	۱/۹۴۰۱	۱/۸۴۰۱
۰/۱	۲/۴۶۶۶	۲/۱۸۳۹	۱/۹۹۰۲	۱/۸۳۲۹	۱/۷۳۷۳

جدول ۴. اثر h/L تیرهای مدرج هدفمند بر دمای کمانش بی‌بعدشدهی تیر دو سر گیردار (CC).

h/L	n				
	۱/۵	۱/۰	۲/۰	۵/۰	۱۰/۰
۰/۰۱	۳/۹۴۱۸	۳/۴۹۳۸	۳/۱۹۳۷	۲/۹۵۵۵	۲/۸۰۵۰
۰/۰۵	۳/۸۴۹۵	۳/۴۱۰۱	۳/۱۱۳۵	۲/۸۷۶۷	۲/۷۲۹۳
۰/۱	۳/۵۸۷۱	۳/۱۷۲۷	۲/۸۸۷۰	۲/۶۵۵۴	۲/۵۱۷۰

3. Zhong, Z. and Yu, T. "Analytical solution of a cantilever functionally graded beam", *Composite Science and Technology*, **67**(3-4), pp. 481-488 (2007).
4. Kadoli, R., Akhtar, K. and Ganesan, N. "Static analysis of functionally graded beams using higher order shear deformation theory", *Applied Mathematical Modelling*, **32**(12), pp. 2509-2525 (2008).
5. Xiang, H.J. and Yang, J. "Free and forced vibration of a laminated FG Timoshenko beam of variable thickness under heat conduction", *Composites Part B: Engineering*, **39**(2), pp. 292-303 (2008).
6. Simsek, M. and Kocat, K.T. "Free and forced vibration of a functionally graded beam subjected to a concentrated moving harmonic load", *Composite Structures*, **90**(4), pp. 465-473 (2009).

7. Sina, S.A., Navazi, H.M. and Haddadpour, H. "An analytical method for free vibration analysis of functionally graded beams", *Materials & Design*, **30**(3), pp. 741-747 (2009).
8. Simsek, M., Kocat, K.T. and Akbas, S.D., *Dynamic Behavior of an Axially Functionally Graded Beam Under Action of a Moving Harmonic Load*, *Composite Structures*, **94**(8), pp.2358-2364 (2012).
9. Li, S.R., Teng, Z.C. and Zhou, Y.H. "Free vibration of heated Euler-Bernoulli beams with thermal postbuckling deformations", *Journal of Thermal Stresses*, **27**(9), pp. 843-856 (2004).
10. Li, S.R. and Batra, R.C. "Thermal buckling and postbuckling of Euler-Bernoulli beams supported on nonlinear elastic foundations", *AIAA Journal*, **45**(3), pp. 712-720 (2007).
11. Shahsiah, R., Nikbin, K.M. and Eslami, M.R. "Thermal buckling of functionally graded beams", *Iranian Journal of Mechanical Engineering*, **10**(2), pp. 64-80 (2009).
12. Kiani, Y. and Eslami, M.R. "Thermal buckling analysis of functionally graded material beams", *International Journal of Mechanical Material Design*, **6**(3), pp. 229-238 (2010).
13. Mahi, A., Adda Bedia, E.A., Tounsi, A. and Mechab, I. "An analytical method for temperature-dependent free vibration analysis of functionally graded beams with general boundary conditions", *Composite Structures*, **92**(8), pp. 1877-87 (2010).
14. Wattanasakulpong, N., Prusty, B. and Kelly, D. "Thermal buckling and elastic vibration of third-order shear deformable functionally graded beams", *International Journal of Mechanical Sciences*, **53**(9), pp. 734-743 (2011).
15. Brush, D.O. and Almroth, B.O., *Buckling of Bars, Plates, and Shells*, McGraw-Hill, New York (1975).
16. Reddy, J.N., *Mechanics of Laminated Composite Plates and Shells, Theory and Analysis*, CRC Press, New Yourk (2004).
17. Bert, C.W. and Malik, M. "Differential quadrature method in computational mechanics: A review", *Applied Mechanics Reviews*, **49**(1), pp. 1-27 (1996).