

ارائه‌ی روابط تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های سطحی نواری واقع بر خاک‌های رسی دو لایه با استفاده از روش تفاضل محدود

محمد مهدی احمدی* (استاد)

بهداد مفرج کوچکی (کارشناس)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی شریف

مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۴)
دوری ۲ - ۳۱، شماره ۱/۳، ص. ۱۰۵-۱۱۳

در این نوشتار از روش تفاضل محدود و مدل سازی دو بعدی به کمک نرم افزار FLAC^۱ برای تعیین ظرفیت باربری زهکشی نشده‌ی شالوده‌های نواری واقع بر خاک‌های رسی دو لایه استفاده شده است. همچنین برای مدل سازی رفتار خاک، از مدل رفتاری کشسان - خمیری با سطح تسلیم موهر - کولمب استفاده شده است. در این پژوهش نسبت عمق لایه‌ی بالایی به عرض شالوده از ۰/۱۵ تا ۳ و نسبت مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی لایه‌ی بالایی به پایینی از ۰/۲ تا ۵ تغییر کرده است. این نسبت‌ها به گونه‌ی انتخاب شده‌اند که مدل سازی و تحلیل برای بیشتر حالات محتمل هندسه‌ی لایه‌ها و نیز مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی آن‌ها انجام شود. در پایان با توجه به نتایج این پژوهش، روابطی کاربردی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های نواری واقع بر خاک‌های دو لایه‌ی رسی ارائه شده است، که دقت بالایی دارند و می‌توانند به صورت گسترده‌ی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های نواری در خاک‌های دو لایه‌ی رسی استفاده شوند.

واژگان کلیدی: ظرفیت باربری، شالوده‌ی نواری، تحلیل عددی، رس، خاک دو لایه.

mmahmadi@sharif.edu
b.mofarraj@outlook.com

۱. مقدمه

است. این روش یک مدل رفتاری کاملاً خمیری را به همراه معیار گسیختگی ترسکا برای خاک در نظر می‌گیرد، که در نهایت منجر به حل یک مسئله‌ی بزرگ برنامه‌ریزی خطی می‌شود. این مسئله در دو حالت حد پایین ظرفیت باربری (با اعمال شرایط مرزی مربوط به یک میدان تنش قابل قبول از نظر استاتیکی) و حد بالا (با اعمال شرایط مرزی مربوط به یک میدان سرعت قابل قبول از نظر کینماتیکی) حل و نتایج به صورت جدولی توسط آن‌ها اعلام شده است.

پژوهشگر دیگری نیز با در نظر گرفتن دو نوع الگوی گسیختگی برای خاک دو لایه‌ی رسی و استفاده از روش تحلیل حدی، به محاسبه‌ی حد بالای ظرفیت باربری نهایی پرداخته است.^[۱] الگوی اول، شامل محیطی است که به طور پیوسته دچار تغییر شکل می‌شود و دیگری چندین بلوک صلب را در زیر شالوده در نظر می‌گیرد. محاسبات وی حاکی از این است که الگوی دوم انعطاف بیشتری برای مدل سازی حالات مختلف گسیختگی دارد و از طریق آن حد بالای کوچک‌تری به دست می‌آید. وی در ادامه نیز به بررسی اثر بارهای افقی در ظرفیت باربری خاک‌های دو لایه‌ی رسی پرداخته است، که از موضوع این نوشتار به دور است.

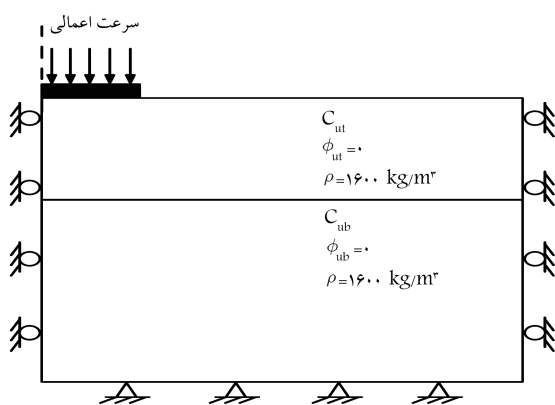
پژوهشگران دیگری نیز حد بالای ظرفیت باربری را با فرض الگوی گسیختگی دایروی برای شالوده‌ی سطحی محاسبه کرده‌اند،^[۲] و در مطالعه‌ی دیگری با فرض همان سطح گسیختگی و با به کارگیری تئوری تعادل حدی^۲ ظرفیت باربری محاسبه

ظرفیت باربری نهایی شالوده‌های نواری واقع بر خاک تک لایه‌ی همگن رسی از دیرباز مورد توجه پژوهشگران بسیاری بوده است و در عمل نیز برای تعیین ظرفیت باربری در حالت ذکر شده به روابط ارائه شده‌ی ترزاقی،^[۱] رجوع می‌شود. اما معمولاً در مسائل واقعی، خصوصیات خاک ممکن است با تغییر عمق از سطح زمین تغییر کنند و یا حتی چند لایه با مشخصات کاملاً متفاوت زیر هم قرار گیرند. در این صورت ممکن است ظرفیت باربری نهایی شالوده با توجه به ضخامت و مقاومت لایه‌ها، تحت تأثیر خصوصیات لایه‌های زیرین نیز قرار گیرد. با اینکه در گذشته موضوع تغییر مقاومت خاک با افزایش عمق توسط پژوهشگران متعددی بیان شده است،^[۲] تاکنون معادلات دقیقی برای به دست آوردن ظرفیت باربری خاک‌های دو لایه‌ی رسی بدون نیاز به نمودار و جدول ارائه نشده است.

از جمله مهم‌ترین کارهای انجام شده در زمینه‌ی تعیین ظرفیت باربری نهایی خاک‌های دو لایه‌ی رسی می‌توان به مطالعات برخی پژوهشگران اشاره کرد،^[۳-۱۵] اما در این میان در مطالعه‌ی مرفیاید و همکاران،^[۳] با استفاده از روش تحلیل عددی ابداع شده توسط برخی پژوهشگران دیگر،^[۱۶-۱۷] که بر اساس تئوری‌های حدی خمیری کلاسیک و المان محدود توسعه یافته‌اند، به حل این مسئله پرداخته شده

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۵/۱۶، اصلاحیه ۱۳۹۲/۹/۴، پذیرش ۱۳۹۲/۱۰/۱۷.



شکل ۱. شرایط مرزی مدل به کار گرفته شده در FLAC با در نظر گرفتن ویژگی تقارن در مسئله.

تحلیل‌های عددی در این مطالعه نسبت c_{ub}/c_{ut} در حالت خاک نرم روی سخت از $0/2$ تا 1 و در حالت خاک سخت روی خاک نرم از 1 تا 5 تغییر می‌کند. مقادیر این نسبت‌ها به گونه‌ی انتخاب شده‌اند که بتوانند بیشتر حالات مقادیر ممکن برای مقاومت برشی زهکشی‌نشده‌ی خاک‌های دو لایه را در برگیرند. برای مثال نسبت c_{ub}/c_{ut} از $0/2$ تا 1 بدین معنی است که مقدار c_{ub} لایه‌ی بالایی نرم‌تر از $0/2$ تا 1 برابر مقاومت برشی زهکشی‌نشده‌ی لایه‌ی پایینی سخت‌تر تغییر می‌کند. به نظر می‌رسد که این نسبت انتخاب شده همان‌گونه که ذکر شد، می‌تواند بسیاری از حالات عملی را بپوشاند. همچنین توجه شود که با این نسبت‌های انتخاب شده برای c_{ub}/c_{ut} تحلیل‌های کافی و گسترده‌ی انجام شده است تا روند تغییرات به طور مناسب قابل ارزیابی و تحلیل شوند. در بخش‌های دیگر این نوشتار تفسیرهای مورد نیاز برای این تحلیل‌های گسترده بیان شده است. همچنین در این پژوهش از مدل موهر-کولمب برای مدل‌سازی شرایط گسیختگی خاک استفاده شده است.

متغیر دیگری که در این مسئله باید مورد توجه قرار گیرد، نسبت عمق لایه‌ی بالایی به عرض شالوده (H/B) است، که نقش به‌سزایی در تعیین ظرفیت باربری و شکل سطوح گسیختگی در زیر شالوده دارد. در این پژوهش نسبت H/B از کمیته‌ی $0/15$ تا جایی که دیگر خاک به تغییرات عمق لایه‌ی بالایی حساس نباشد و ظرفیت باربری خاک فقط با استفاده از خصوصیات فیزیکی لایه‌ی بالایی قابل تعیین باشد، تغییر می‌کند. بنابراین طبق پژوهش‌های انجام شده و نتایج منتشر شده از سایر پژوهشگران این نسبت برای حالت خاک نرم روی خاک سخت از $0/15$ تا $0/8$ و برای عکس این حالت از $0/15$ تا 3 متغیر در نظر گرفته شده است. [۱۸] لازم به توضیح است که این مطالعه فقط برای خاک‌های لایه‌ی رسی اشباع در حالت زمین مسطح انجام شده است. پس از تعیین شکل کلی مسئله، نوبت به تعیین سایر پارامترهای مکانیکی خاک نظیر نسبت پواسون و مدول کشسانی هر یک از لایه‌ها می‌رسد. بدین منظور ابتدا نمونه‌های مختلفی از خاک همگن و دو لایه با نسبت پواسون و مدول کشسانی مختلف تحلیل و نتایج ظرفیت باربری آن‌ها با یکدیگر مقایسه شده‌اند. نتایج حاکی از عدم تأثیر مقدار این دو پارامتر در ظرفیت باربری نهایی خاک، چه در حالت تک لایه و چه در حالت دو لایه است. با وجود این، برای هر چه نزدیک‌تر بودن رفتار مدل به شرایط زهکشی‌نشده باید نسبت پواسون خاک نزدیک به $0/5$ در نظر گرفته شود، که با توجه به میل کردن مدول حجمی خاک به سمت بی‌نهایت با میل دادن نسبت پواسون به $0/5$ ، این پارامتر در مدل برابر با $0/45$ در نظر گرفته شده است. مدول کشسانی هر یک از لایه‌ها نیز برابر ضریبی از

شده است. [۶] در مقابل همان‌طور که در پژوهش دیگری در سال ۱۹۷۳، [۲] نشان داده شده است، برای حالات خاک‌های ناهمگن، الگوی گسیختگی دایروی در مقایسه با تئوری خمیری، ظرفیت باربری را بسیار بالاتر از واقعیت برآورد می‌کند. همچنین پژوهشگران دیگری با توجه به نتایج تجربی به دست آمده از آزمایش‌های حقیقی، روابطی تجربی و نیمه تجربی جهت تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های سطحی در این حالت ارائه کرده‌اند، [۹،۸] که طبق مقایسه‌های انجام شده در پژوهشی در سال ۱۹۹۹، [۳] روش‌های تجربی و نیمه تجربی می‌توانند در برخی حالات تا 20% خطا داشته باشند.

در پژوهش‌های جدیدتری نیز به بررسی تأثیر لایه‌ی بودن خاک در ظرفیت باربری نهایی شالوده‌ها در حالت ۳ بعدی به کمک روش المان محدود پرداخته شده است. [۱۱،۱۰] همچنین در مطالعه‌ی دیگری روشی برای محاسبه‌ی حد بالای ظرفیت باربری با در نظر گرفتن چندین بلوک صلب در زیر شالوده و استفاده از تئوری تحلیل حدی برای تعیین ظرفیت باربری نهایی انواع خاک‌های دو لایه ارائه شده است. [۱۲] در سال‌های اخیر، تعدادی از پژوهشگران به روش المان محدود به بررسی این مسئله پرداخته‌اند و نتایج خود را در جدول‌ها و نمودارهای متعددی ارائه کرده‌اند. [۱۳،۱۴] علاوه بر آن، به بررسی تأثیر عمق مدفون شالوده در ظرفیت باربری نهایی نیز پرداخته‌اند، [۱۴] که از موضوع این نوشتار به دور است.

در مطالعه‌ی دیگری نیز با استفاده از روش المان محدود و فرض تغییر شکل‌های بزرگ به بررسی ظرفیت باربری شالوده‌های مربعی و دایروی واقع بر سطح خاک‌های رسی دو لایه پرداخته شده است و نتایج را بر حسب چگالی خاک و عرض شالوده به شکل نموداری ارائه کرده‌اند. [۱۵]

همان‌طور که مشاهده می‌شود، بیشتر پژوهشگران نتایج خود را بر اساس حد بالایی ظرفیت باربری ارائه کرده‌اند، اما در عمل با توجه به مشخص نبودن مقدار دقیق ظرفیت باربری، استفاده از این نتایج منجر به عدم اطمینان در طراحی شالوده‌ها می‌شود. به همین علت رویکرد مریفیلد و همکاران، [۳] که منجر به ارائه‌ی نتایج مربوط به حد پایین ظرفیت باربری شده است، می‌تواند مورد توجه قرار گیرد؛ اما همچنان نتایج آن‌ها بازه‌ی برای حدود ظرفیت باربری ارائه می‌دهد، که ممکن است منجر به طراحی غیراقتصادی ابعاد شالوده و ایجاد تردید در تعیین ضریب اطمینان شود.

۲. تشریح مسئله

در این پژوهش از مدل‌سازی عددی با استفاده از نرم‌افزار FLAC، [۱۸] برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های نواری استفاده شده است. این مدل‌سازی برای دو حالت خاک نرم روی سخت و خاک سخت روی نرم انجام شده است. FLAC یک نرم‌افزار شبیه‌سازی محیط‌های خاکی، سنگی یا سایر موادی است که در صورت رسیدن به حد گسیختگی خود، به صورت خمیری جریان می‌یابند. در این پژوهش از قابلیت نرم‌افزار مذکور در حل مسائل دو بُعدی به روش تفاضل محدود صریح و در شرایط کرنش صفحه‌ی استفاده شده است. این روش مناسب مدل‌سازی سازه‌های طولانی با سطح مقطع ثابت است، به طوری که نیروها فقط در صفحه‌ی سطح مقطع وارد شوند، نظیر آنچه در شالوده‌های نواری رخ می‌دهد.

همان‌طور که در شکل ۱ نشان داده شده است، مدل از خاک دو لایه‌ی رسی با خصوصیات و ویژگی‌های متفاوت تشکیل شده است، به طوری که خصوصیات هر لایه با لایه‌ی دیگر متفاوت است. زاویه‌ی اصطکاک داخلی برای هر دو لایه برابر صفر، چسبندگی لایه‌ی بالا c_{ut} و لایه‌ی پایین c_{ub} نامیده شده است. برای

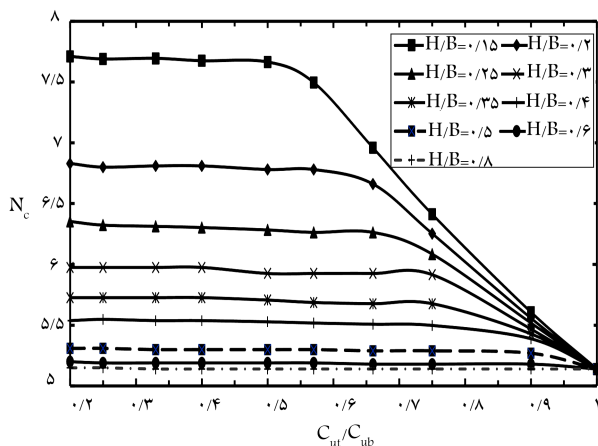
N_c ضریب ظرفیت باربری و q بار مربوط به سربار است، که در این پژوهش با توجه به قرار گرفتن شالوده بر روی سطح برابر صفر است. هدف از انجام این پژوهش، تعیین ضریب N_c است، که طبق تحلیل‌های انجام شده تابعی از هر دو نسبت H/B و c_{ut}/c_{ub} است.

۳. ارائه‌ی نتایج و روابط تعیین ظرفیت باربری

در این بخش ابتدا نتایج حاصله به صورت نمودار ارائه شده و در ادامه، روابطی برای محاسبه‌ی ظرفیت باربری ارائه و در انتها در مورد میزان موفقیت این روابط در توضیح داده‌ها بحث شده است.

۱.۳. حالت خاک نرم روی سخت

شکل ۲، تغییرات ضریب N_c را برای حالت خاک نرم روی خاک سخت بر حسب c_{ut}/c_{ub} نشان می‌دهد. هر منحنی نماینده‌ی تغییرات ضریب N_c برای یک H/B خاص است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، به طور کلی ضریب N_c با کاهش H/B افزایش می‌یابد؛ همچنین در صورتی که c_{ut}/c_{ub} کاهش یابد، مقدار N_c نیز افزایش می‌یابد. البته مطابق شکل ۲ باید توجه داشت که با کاهش بیشتر c_{ut}/c_{ub} ، ضریب N_c به بیشینه‌ی خود که همان $N_{c,max}$ است، می‌رسد و پس از آن با کاهش c_{ut}/c_{ub} ، دیگر افزایشی در N_c مشاهده نمی‌شود. علت ثابت شدن هر یک از منحنی‌ها در c_{ut}/c_{ub} های کوچک این است که در این حالات لایه‌ی بالایی به قدری نرم است که پیش از افزایش تنش‌ها به حد کافی برای گسیختگی لایه‌ی زیرین، لایه‌ی بالایی گسیخته می‌شود. همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، برای حالت H/B برابر با ۰/۱۵ و برای c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از ۰/۵، N_c با کاهش c_{ut}/c_{ub} افزایش نمی‌یابد و در نتیجه مقدار آن از ۷/۷ فراتر نمی‌رود. بدین ترتیب رابطه‌ی باید ارائه شود که برای تعیین ضریب N_c ، اولاً شیب بخش سمت راست (بخش شیب‌دار) منحنی‌های ترسیم شده در شکل ۲ را، که تابعی از نسبت H/B است، درست برآورد کند و ثانیاً مقدار N_c برآورد شده نباید از $N_{c,max}$ برای هر یک از مقادیر H/B بیشتر شود. برای مثال برای $H/B = ۰/۵$ ، نباید مقدار N_c از ۷/۷ افزایش یابد.



شکل ۲. تغییرات ضریب N_c در حالت خاک نرم بر روی خاک سخت برای H/B های مختلف.

چسبندگی آن لایه در نظر گرفته می‌شود، تا منحنی‌های بارگذاری - نشست مربوط به شالوده‌ها به شکل واقعی خود نزدیک تر باشند. با فرض تحکیم عادی خاک، مدول کشسانی خاک هر لایه برابر با ۵۰۰ برابر چسبندگی آن در نظر گرفته شده است.^[۱۹] همان‌طور که پیش‌تر نیز ذکر شد، تحلیل‌های گسترده‌ی اولیه نشان‌دهنده‌ی آن است که مدول کشسانی خاک در ظرفیت باربری نهایی شالوده هیچ تأثیری ندارد، که این امر توسط ادبیات فنی موجود نظیر ترزاقی نیز تأیید می‌شود،^[۱] به طوری که حتی در صورت استفاده از مدول کشسانی برابر بین دو لایه، در مقدار ظرفیت باربری نهایی شالوده تغییری حاصل نخواهد شد. همچنین نتایج تحلیل‌های اولیه نشان‌دهنده‌ی این است که تغییرات چگالی خاک نیز در ظرفیت باربری نهایی تأثیری نداشته است، که با انتظارات ما طبق روابط ارائه‌شده‌ی ترزاقی،^[۱] کاملاً مطابق است. در این پژوهش، چگالی تمامی لایه‌ها برابر ۱۶۰۰ کیلوگرم بر مترمکعب در نظر گرفته شده است. آخرین پارامتر مکانیکی که باید تأثیر آن در ظرفیت باربری نهایی بررسی شود، نسبت تنش افقی به قائم در حالت سکون (K_0) است، که مقدار آن از ۰/۵ تا ۱ تغییر داده شده و نتایج با هم مقایسه شده‌اند. مشاهدات حاکی از آن است که این ضریب نیز در ظرفیت باربری نهایی شالوده تأثیری ندارد، اما تا حدودی در میزان نشست شالوده تحت بار تأثیرگذار است. در واقع با کاهش ضریب مذکور، شالوده پس از نشست بیشتری به ظرفیت باربری نهایی خود می‌رسد. در این پژوهش مقدار K_0 در جهت اطمینان برابر ۰/۵ در نظر گرفته شده است.

همچنین باید ابعاد مدل و المان‌ها طوری تعیین شوند که کوچک‌ترین مدل با بزرگ‌ترین ابعاد المان به‌کار گرفته شود و تغییر این پارامترها موجب افزایش بی‌دلیل حجم مدل یا پدید آمدن خطاهای مربوط به تحلیل عددی، که ناشی از دقت ناکافی مدل است، نشود. برای این منظور، تحلیل‌های بسیار گسترده‌ی جهت انتخاب ابعاد المان و ابعاد مدل به‌پیمانه انجام شده و نتایج به‌دست‌آمده از این تحلیل‌ها با یکدیگر مورد ارزیابی و مقایسه قرار گرفته‌اند. نتایج نشان می‌دهند که برای حالت خاک نرم روی سخت، اگر ابعاد المان‌ها بیشینه‌ی $B/20$ ، عرض مدل ۸ برابر عرض شالوده و ارتفاع آن با توجه به اینکه گسیختگی عموماً محدود به لایه‌ی بالایی است، ۴ برابر عرض شالوده باشد، کافی است. در حالت خاک سخت روی نرم با توجه به نفوذ سطح گسیختگی به لایه‌ی زیرین و وقوع گسیختگی سوراخ‌کننده^۲ در لایه‌ی بالایی و پدید آمدن سطوح گسیختگی بسیار بزرگ‌تر در مقایسه با خاک تک لایه یا حالت خاک نرم روی سخت در لایه‌ی نرم‌تر پایینی، عرض مدل تا ۲۵ برابر عرض پی و ارتفاع آن تا ۹ برابر عرض پی باید افزایش یابد. ابعاد المان‌ها نیز باید بیشینه‌ی $B/40$ باشند. این نتایج بدین معنی است که افزایش ابعاد مدل یا کاهش ابعاد المان‌ها از حدود ذکر شده، نتایج را تغییر نمی‌دهد. بنابراین، مقادیر ذکر شده برای هر حالت به‌پیمانه است و لذا کلیه‌ی تحلیل‌ها بر اساس مقادیر ذکر شده انجام شده‌اند.

با توجه به وجود تقارن در مسئله‌ی مورد نظر و جهت صرفه‌جویی در زمان و کاهش حجم محاسباتی، فقط نصف مدل در نرم‌افزار FLAC تحلیل شده است. در راستای اعمال شرایط مرزی نزدیک به واقعیت، مطابق شکل ۱، حرکت در راستای افقی در مرز افقی زیرین و مرزهای عمودی محدود شده است. علاوه بر آن، حرکت در راستای قائم نیز در مرز افقی زیر مدل محدود شده است، تا مدل از نظر شرایط تعادل استاتیکی مشکلی نداشته باشد.

رابطه‌ی کلی ظرفیت باربری نهایی برای خاک‌های رسی به شکل رابطه‌ی ۱ نوشته می‌شود:

$$q_u = c_u \times N_c + q \quad (1)$$

که در آن، q_u بیشینه‌ی تنش مجاز زیر پی، c_u مقاومت برشی زهکشی‌نشده‌ی رسی،

با توجه به شکل ۲ هر چه نسبت H/B کوچک‌تر باشد، منحنی مربوط شیب بزرگ‌تری دارد. همچنین در حالت خاک نرم روی سخت، تغییرات قابل توجه در ظرفیت باربری، برای H/B های کوچک‌تر از ۰/۵ رخ می‌دهد. در صورت تجاوز H/B از ۰/۸، عملاً تأثیر مثبت لایه‌ی سخت‌تر زیرین در افزایش ظرفیت باربری لایه‌ی نرم‌تر بالایی محو می‌شود و مقدار N_c برابر با ۵/۱۴ (مانند خاک رسی تک لایه‌ی همگن) می‌شود.

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، تمامی منحنی‌ها از نقطه‌ی $N_c = 5.14$ به ازا $c_{ut}/c_{ub} = 1$ عبور می‌کنند. شیب بخش سمت راست و $N_{c,max}$ آنها نیز متناسب با کاهش نسبت H/B افزایش می‌یابند. با وجود مشاهده‌ی اندکی انحنای منحنی‌های ترسیم شده (خصوصاً برای H/B های کوچک)، می‌توان با تقریب خوبی شیب بخش سمت راست هر منحنی را ثابت فرض کرد. در نتیجه، رابطه‌ی موردنظر باید به صورت رابطه‌ی ۲ باشد:

$$\begin{cases} N_c = \min \left[5.14 + Slope \times \left(1 - \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \right), N_{c,max} \right] \\ Slope \propto \frac{H}{B} \\ N_{c,max} \propto \frac{H}{B} \end{cases} \quad (2)$$

اکنون به رابطه‌ی جهت تعیین شیب بر حسب H/B نیاز است. بدین منظور رابطه‌ی ۳ جهت تعیین شیب منحنی‌های رسم شده در شکل ۲ ارائه شده است:

$$Slope = 5.14 \left(\frac{0.25}{\left(\frac{H}{B}\right)^{0.75}} \right) \quad (3)$$

شکل ۳ برآورد رابطه‌ی ۳ را در برابر شیب اندازه گرفته شده برای هر H/B نمایش می‌دهد. ضریب تشخیص (R^2) این رابطه برابر با ۰/۹۸۴ است.

این تذکر لازم است که رابطه‌ی ۳، به دلیل عدم تغییر قابل توجه ضریب N_c در H/B های بزرگ‌تر از ۰/۵ (برای c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از ۰/۹) عملاً جهت تعیین این ضریب برای H/B های بزرگ‌تر از ۰/۵ مورد استفاده قرار نمی‌گیرد.

با توجه به اینکه طبق شکل ۲، ظرفیت باربری همواره با شیب ثابت افزایش نمی‌یابد و مقدار آن از حد مشخصی تجاوز نمی‌کند، باید رابطه‌ی برای تعیین $N_{c,max}$ ، که تابعی از H/B است، ارائه شود. قابل ذکر است که در تعیین این

رابطه از نوسانات اندک این پارامتر در نواحی انتهایی منحنی‌های رسم شده در شکل ۲ صرف‌نظر و مقدار کمینه‌ی آن (در جهت اطمینان) به‌عنوان نماینده‌ی این بخش از منحنی در نظر گرفته شده است. رابطه‌ی ۴ بدین منظور ارائه شده است:

$$N_{c,max} = 5.14 \left[1 + 1.25 \left(1 - \frac{H}{B} \right)^6 \right] \quad (4)$$

در شکل ۴، برآورد رابطه‌ی ۴ از $N_{c,max}$ با نتایج حاصل از تحلیل عددی مقایسه شده است. ضریب تشخیص این رابطه برابر با ۰/۹۹۶ است.

در نهایت برای محاسبه‌ی ظرفیت باربری در حالت خاک نرم بر روی خاک سخت، با جای‌گذاری مقدار شیب نمودار از رابطه‌ی ۳ و مقدار $N_{c,max}$ از رابطه‌ی ۴ در رابطه‌ی ۲ و تقسیم طرفین به عدد ۵/۱۴، رابطه‌ی ۵ را خواهیم داشت:

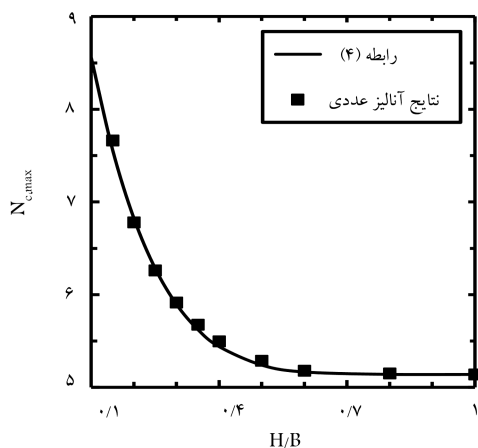
$$\frac{N_c}{5.14} = \min \left[1 + \frac{0.25}{\left(\frac{H}{B}\right)^{0.75}} \left(1 - \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \right), 1 + 1.25 \left(1 - \frac{H}{B} \right)^6 \right] \quad (5)$$

طبق مقایسه‌ی انجام شده بین برآورد رابطه‌ی ۵ و نتایج تحلیل عددی، ضریب تشخیص این رابطه برابر با ۰/۹۹۴ است. با توجه به ضرایب اطمینان استفاده شده در طراحی شالوده‌ها، این خطا عملاً ناچیز و قابل صرف نظر کردن است.

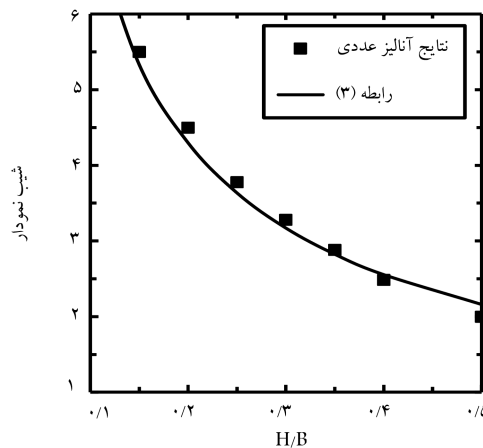
۲.۳. حالت خاک سخت روی نرم

در این حالت، جهت ارائه‌ی رابطه‌ی تعیین ظرفیت باربری، ابتدا ضریب N_c^* با تقسیم تنش متوسط زیر شالوده بر c_{ub} (به جای c_{ut}) محاسبه شده است. نتایج حاصله در شکل ۵ ارائه شده است. برای مثال، در صورتی که نسبت c_{ut}/c_{ub} برابر با ۵ باشد، اگر نسبت عمق لایه‌ی بالایی به عرض شالوده کوچک‌تر از ۲ باشد، لایه‌ی نرم‌تر پایینی در ظرفیت باربری نهایی شالوده اثر منفی می‌گذارد و اگر H/B از ۲ بزرگ‌تر باشد، گسیختگی به کلی در لایه‌ی بالایی رخ می‌دهد ($N_c^* = 5 \times 5.14$).

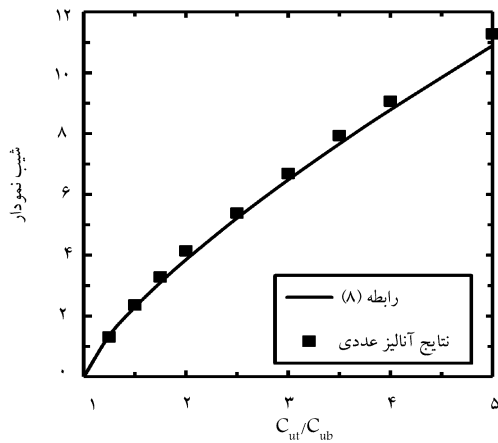
تفاوت دیگر این حالت با حالت خاک نرم روی سخت در آن است که این بار تغییرات N_c^* بر حسب H/B و برای c_{ut}/c_{ub} های مختلف نمایش داده شده است. نمایش داده‌ها بدین شکل، موجب سهولت در ارائه‌ی رابطه‌ی مشابه با رابطه‌ی ۲



شکل ۴. مقایسه‌ی نتایج تحلیل عددی و برآورد رابطه‌ی ۴ از $N_{c,max}$ مربوط به H/B های مختلف ترسیم شده در شکل ۲.



شکل ۳. مقایسه‌ی نتایج تحلیل عددی و برآورد رابطه‌ی ۳ از شیب قسمت سمت راست منحنی‌های رسم شده برای H/B های مختلف در شکل ۲.



شکل ۶. مقایسه‌ی نتایج تحلیل عددی و برآورد رابطه‌ی ۸ از شیب سمت چپ منحنی‌های ترسیم‌شده در شکل ۵ برای c_{ut}/c_{ub} های مختلف.

برآورد رابطه‌ی ۷ و مقادیر به‌دست‌آمده از تحلیل عددی، ضریب تشخیص این رابطه برابر ۰٫۹۹۷ است. با توجه به ضرایب اطمینان مورد استفاده در طراحی شالوده‌ها، این خطا عملاً ناچیز و قابل نظرکردن است.

۴. بحث در مورد نتایج

در این بخش نتایج حاصل از روابط ۵ و ۹، حد بالا و پایین ارائه‌شده توسط مرفیلد و همکاران^[۳] نتایج تحلیل حدی میکالوفسکی^[۱] رابطه‌ی تجربی میرهوف و هانا^[۹] رابطه‌ی تئوریک چن^[۷] و نتایج تحلیل المان محدود ژو^[۱۳] و بندینی و فم^[۱۴] مقایسه شده‌اند.

این تذکر لازم است که در این میان نتایج تحلیل عددی مرفیلد و همکاران^[۳] میکالوفسکی^[۱] ژو^[۱۳] و بندینی و فم^[۱۴] به‌صورت جدولی و یا نموداری ارائه شده‌اند. با توجه به اینکه پارامترهای ورودی مسئله (H/B و c_{ut}/c_{ub}) بین این ۴ پژوهش انجام‌شده به روش تفاضل محدود کاملاً منطبق نیستند، جهت مقایسه‌ی نموداری، H/B هایی در نظر گرفته شده‌اند که بین این پژوهش‌ها مشترک هستند. علاوه بر آن حالت $H/B = ۰٫۱۲۵$ نیز (خارج از بازه‌ی بررسی‌شده به روش تفاضل محدود) فقط جهت بررسی عملکرد روابط ۵ و ۹ نسبت به نتایج سایر پژوهشگران در نظر گرفته شده است. پیش از انجام مقایسه به مرور رویکرد سایر پژوهشگران در حل این مسئله پرداخته شده است.

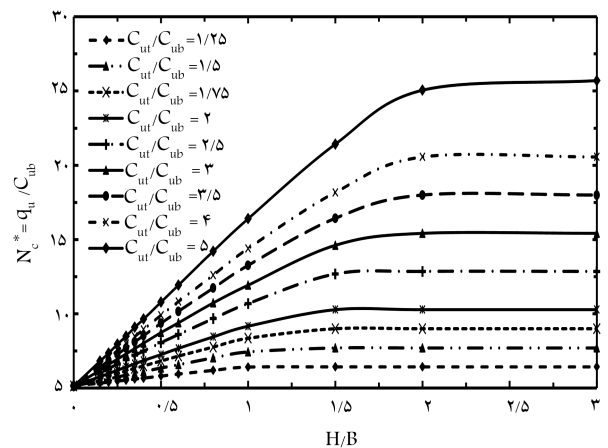
رابطه‌ی ۱۰ توسط چن^[۷] و به روش تحلیل حدی با فرض یک سطح گسیختگی دایروی و با برابر قراردادن نرخ کار نیروهای داخلی و خارجی جهت محاسبه‌ی حد بالای ضریب N_c ارائه شده است:

$$N_c(r, \theta) = 2 \left(\frac{r}{B} \right)^2 \left\{ \frac{\theta + n\theta_i}{\left(\frac{r}{B} \right) \sin \theta - \frac{1}{\gamma}} \right\} \quad (10)$$

طبق روابط ۱۱ و ۱۲ خواهیم داشت:

$$\theta_i = \cos^{-1} \left(\cos \theta + \frac{H}{r} \right) \quad (11)$$

$$n = \frac{c_{ub}}{c_{ut}} - 1 \quad (12)$$



شکل ۵. تغییرات ضریب N_c^* در حالت خاک سخت بر روی خاک نرم برای c_{ut}/c_{ub} های مختلف.

می‌شود. بنابراین، رابطه‌ی که جهت تعیین ظرفیت باربری نهایی در حالت خاک سخت بر روی خاک نرم ارائه می‌شود، باید به شکل رابطه‌ی ۶ باشد:

$$\begin{cases} N_c^* = \min \left[5,14 + Slope \times \frac{H}{B}, N_{c,max}^* \right] \\ N_c^* = N_c \times \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \\ Slope \propto \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \\ N_{c,max}^* \propto \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \end{cases} \quad (6)$$

واضح است که در این حالت بیشترین مقدار ظرفیت باربری زمانی رخ می‌دهد که گسیختگی به کلی در لایه‌ی بالایی رخ دهد و دیگر نسبت به مقاومت لایه‌ی نرم‌تر حساسیتی وجود نداشته باشد ($N_c = 5,14$). در این صورت طبق رابطه‌ی ۷ خواهیم داشت:

$$N_{c,max}^* = 5,14 \frac{c_{ut}}{c_{ub}} \quad (7)$$

همان‌طور که در شکل ۵ مشاهده می‌شود، شیب هر یک از منحنی‌ها در این حالت تابعی از نسبت c_{ut}/c_{ub} است و البته تمامی منحنی‌ها با نزدیک شدن H/B به صفر به عدد ۵٫۱۴ می‌رسند، که این مورد با نتایج تئوری نیز هم‌خوانی کامل دارد. رابطه‌ی ۸ جهت تعیین شیب نمودار ارائه شده است:

$$Slope = 5,14 \times 0,75 \left(\frac{c_{ut}}{c_{ub}} - 1 \right)^{0,75} \quad (8)$$

شکل ۶، برآورد رابطه‌ی ۸ را در برابر شیب اندازه گرفته‌شده برای هر c_{ut}/c_{ub} نمایش می‌دهد. ضریب تشخیص این رابطه برابر با ۰٫۹۹۴ است.

در نتیجه، برای تعیین ظرفیت باربری نهایی در حالت خاک سخت روی خاک نرم با جای‌گذاری روابط ۷ و ۸ در رابطه‌ی ۶ و تبدیل N_c^* به N_c ، از رابطه‌ی ۹ می‌توان استفاده کرد:

$$\frac{N_c}{5,14} = \min \left\{ \left[1 + 0,75 \left(\frac{c_{ut}}{c_{ub}} - 1 \right)^{0,75} \left(\frac{H}{B} \right) \right] \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} \right), 1 \right\} \quad (9)$$

دقت شود که ضریب c_{ut}/c_{ub} جهت تبدیل N_c^* به N_c در رابطه‌ی ۷ نمایان شده است و طرفین رابطه به عدد ۵٫۱۴ تقسیم شده‌اند. طبق مقایسه‌ی انجام‌شده بین

در نهایت مقدار ضریب N_c با حل دستگاه معادلات ۱۳ و ۱۴ و پیدا کردن کمینه‌ی رابطه‌ی ۱۰ میسر می‌شود:

$$\frac{\partial N_c}{\partial \theta} = 0 \quad (13)$$

$$\frac{\partial N_c}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

اگر این معادلات برای خاک تک لایه‌ی یکنواخت حل شوند، مقدار ۵٫۵۳ برای ضریب N_c به دست می‌آید، که ۸٪ بیش از مقدار دقیق تئوریک آن (۵٫۱۴) است. برخی پژوهشگران در مطالعه‌ی خود روابطی نیمه تجربی را برای محاسبه‌ی ظرفیت باربری هر دو حالت خاک نرم روی سخت و سخت روی نرم ارائه کرده‌اند. برای حالت خاک سخت روی نرم، رابطه‌ی ۱۵ جهت محاسبه‌ی N_c ارائه شده است: [۹]

$$N_c = \frac{q_u}{c_{ut}} = 5.14 \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} \right) + 2 \left(\frac{c_a}{c_{ut}} \right) \left(\frac{H}{B} \right) \quad (15)$$

بخش دوم رابطه‌ی ۱۵ مربوط به اثر گسیختگی سوراج‌کننده‌ی واقع شده در لایه‌ی بالایی است و ضریب c_a از ۱ (برای خاک همگن) تا ۰٫۸ (برای حالت لایه‌ی بالایی بسیار سخت ($c_{ut}/c_{ub} = 5$)) متغیر است. همچنین برای حالت خاک نرم روی خاک سخت نیز رابطه‌ی ۱۶ را ارائه کرده‌اند: [۹]

$$N_c = \frac{q_u}{c_{ut}} = 5.14 + 5.14 \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} - 1 \right) \left(1 - \frac{H}{H_f} \right)^2 \geq 5.14 \quad (16)$$

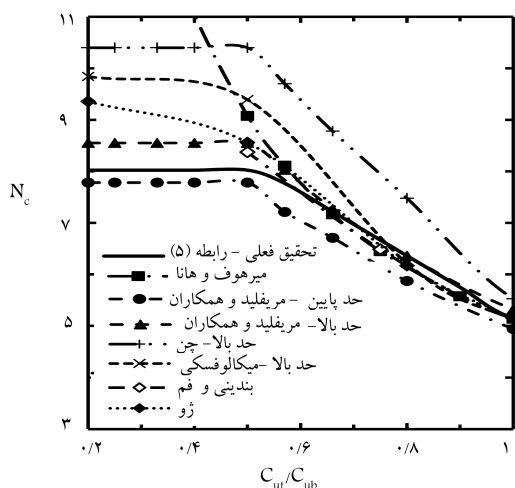
که در آن، H عمق لایه‌ی بالایی و H_f عمق سطح گسیختگی زیر شالوده است، که طبق توصیه‌ی آن‌ها، این پارامتر برای خاک‌های رسی برابر با عرض شالوده است. [۲۰]

۱.۴. حالت خاک نرم روی خاک سخت

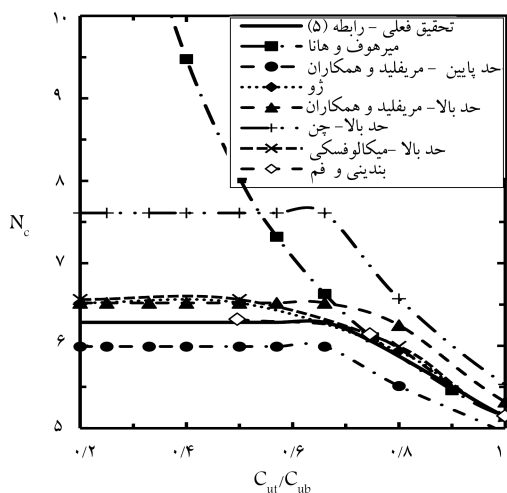
طبق مقایسه‌های انجام شده بین نتایج این پژوهش، رابطه‌ی ۵، و نتایج سایر پژوهشگران، [۱۳، ۱۳، ۸، ۷، ۴، ۳] به این مشاهدات می‌رسیم:

همان‌طور که در شکل ۲ مشاهده می‌شود، ظرفیت باربری نهایی شالوده در این حالت یا فقط به نسبت H/B وابسته است ($N_{c,max}$) و یا تابع هر دو نسبت H/B و c_{ut}/c_{ub} است. با توجه به شکل‌های ۷ الی ۹ واضح است که نتایج تفاضل محدود و رابطه‌ی ۵ در صورتی که ظرفیت باربری شالوده فقط تابع H/B باشد، به میانگین حدود بالا و پایین مرفیلد و همکاران، [۲] بسیار نزدیک هستند، در حالی که در خارج از این ناحیه (قسمت شیب‌دار شکل ۲) نتایج تفاضل عددی و رابطه‌ی ۴ با کاهش H/B به حد بالایی ظرفیت باربری ارائه شده در مرفیلد و همکاران، [۲] و میکالوفسکی، [۱] نزدیک می‌شوند (شکل‌های ۷ و ۸) و البته به نظر می‌آید که برآورد چن، [۷] از حد بالایی ظرفیت باربری نسبت به مرفیلد و همکاران، [۲] و میکالوفسکی، [۲] دقت کمتری دارد.

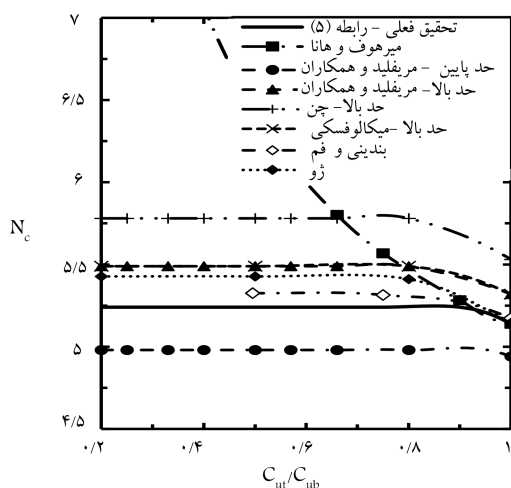
در مقایسه با نتایج المان محدود، همان‌طور که در شکل‌های ۷ الی ۹ مشاهده می‌شود، ژو، [۱۳] به طور کلی مقادیر بزرگ‌تری را برای ظرفیت باربری پیش‌بینی کرده است، که این مقدار در برخی موارد از حد بالایی ارائه شده‌ی مرفیلد و همکاران، [۲] نیز فراتر رفته است. در مقابل نتایج ارائه شده‌ی بندینی و فم، [۱۴] و این پژوهش بسیار نزدیک هستند. این تذکر لازم است که محدودیت اصلی در پژوهش بندینی و فم، [۱۴] عدم بررسی c_{ut}/c_{ub} ‌های کوچک‌تر از ۰٫۵ است، که



شکل ۷. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک نرم روی خاک سخت برای $H/B = 0.25$



شکل ۸. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک نرم روی خاک سخت برای $H/B = 0.25$



شکل ۹. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک نرم روی خاک سخت برای $H/B = 0.5$

نتایج تفاضل محدود حدوداً برابر میانگین حدود بالا و پایین ارائه‌شده‌ی مریفیلد و همکاران،^[۳] هستند.

همچنین در مقایسه‌ی حدود بالای ارائه‌شده می‌توان گفت که نتایج میکالوفسکی،^[۴] برای c_{ut}/c_{ub} های نزدیک به ۱ عملکرد بهتری نسبت به مریفیلد و همکاران،^[۳] و چن،^[۷] دارد و نتایج آن به نتایج تفاضل محدود نزدیک است، اما با افزایش c_{ut}/c_{ub} نتایج مریفیلد و همکاران،^[۳] و میکالوفسکی،^[۴] عملکرد نسبتاً مشابهی دارند. نتایج المان محدود ژو،^[۱۳] و بندینی و فم،^[۱۴] نیز به‌طور کلی بیشترین همبستگی را با نتایج پژوهش حاضر دارند و در بیشتر موارد، مقدار بیشتری برای ظرفیت باربری شالوده پیش‌بینی کرده‌اند. البته این تذکر لازم است که بندینی و فم،^[۱۴] نتایج خود را برای $H/B > ۱$ ارائه نکرده‌اند.

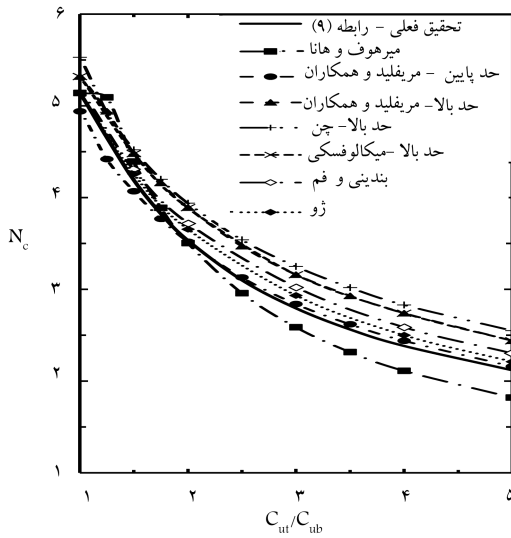
همان‌طور که در شکل‌های ۱۰ و ۱۱ مشاهده می‌شود، رابطه‌ی ۱۵ در H/B های کوچک برای خاک سخت روی خاک نرم دقت خوبی دارد و نتایج آن به نتایج

به خصوص در حالت $H/B = ۰٫۱۲۵$ در صورت برون‌یابی نتایج، خطا ایجاد می‌کند.

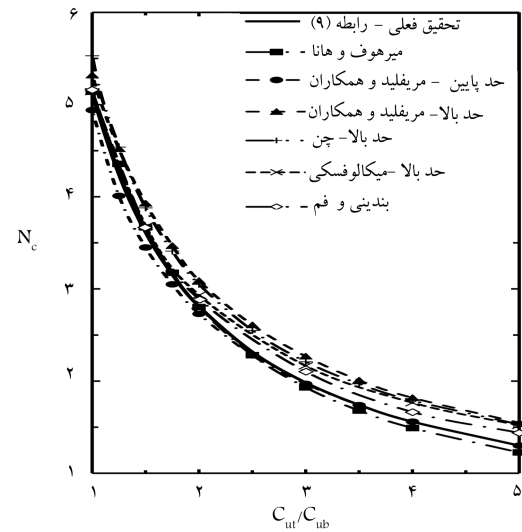
به‌طور کلی می‌توان گفت رابطه‌ی ارائه‌شده‌ی میرهوف و هانا،^[۹] تخمین خوبی را از ظرفیت باربری برای قسمت شیب دار شکل ۲ ارائه می‌دهد، اما با توجه به تعریف نشدن حد بالای ظرفیت باربری مانند آنچه در رابطه‌ی ۴ تعریف شده است، خطای رابطه‌ی ۱۶ برای c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از ۰٫۶ بسیار زیاد است.

۲.۴. حالت خاک سخت روی خاک نرم

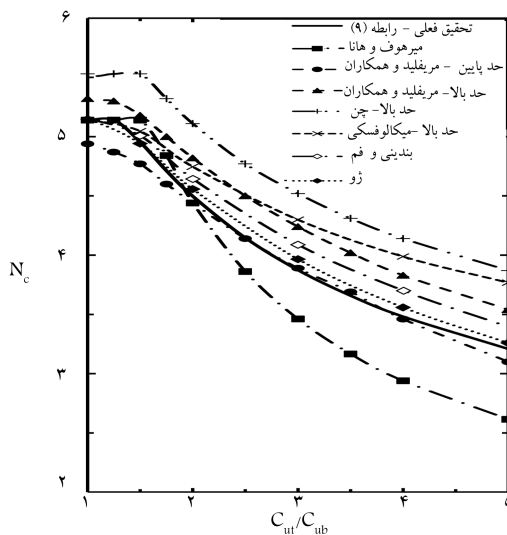
همان‌طور که در شکل‌های ۱۰ الی ۱۲ مشاهده می‌شود، برای H/B های کوچک با افزایش c_{ut}/c_{ub} نتایج تفاضل محدود و رابطه‌ی ۹ بسیار نزدیک حدود پایین ارائه‌شده‌ی مریفیلد و همکاران،^[۳] هستند، اما در H/B های بزرگ‌تر (شکل‌های ۱۳ و ۱۴)،



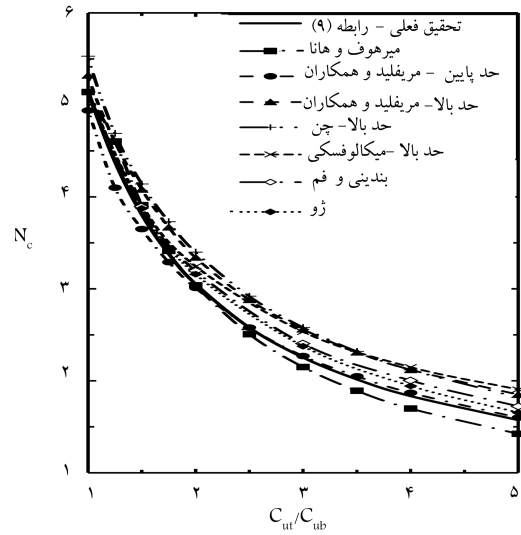
شکل ۱۲. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۰٫۵$.



شکل ۱۰. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۰٫۱۲۵$.



شکل ۱۳. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۱$.



شکل ۱۱. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = ۰٫۲۵$.

جهت تعیین ظرفیت باربری استفاده می‌شود:

$$\frac{N_c}{5,14} = \min \left\{ \left[1 + 0,75 \left(\frac{c_{ut}}{c_{ub}} - 1 \right)^{0,75} \left(\frac{H}{B} \right) \right] \left(\frac{c_{ub}}{c_{ut}} \right), 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{N_c}{5,14} = \min \left\{ \left[1 + 0,75 \left(\frac{125}{25} - 1 \right)^{0,75} \left(\frac{4}{4} \right) \right] \left(\frac{25}{125} \right), 1 \right\}$$

$$\Rightarrow \frac{N_c}{5,14} = \min(0,62, 1)$$

$$\Rightarrow N_c = 5,14 \times 0,62 = 3,19$$

$$q_u = c_{ut} \times N_c$$

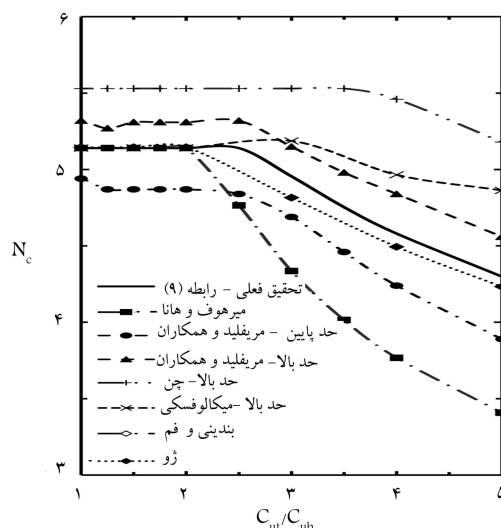
$$\Rightarrow q_u = 125 \times 3,19 = 398,75 \text{ kPa}$$

در نتیجه، روابط ارائه شده در این پژوهش ظرفیت باربری را حدوداً ۳۹۹ کیلوپاسکال و مریفلد و همکاران،^[۳] حد بالای ۴۴۳ کیلوپاسکال (۱۱٪ خطا) و حد پایین ۳۸۸ کیلوپاسکال (۳٪ خطا) را برآورد می‌کند. طبق میکالوفسکی،^[۴] حد بالای ظرفیت باربری ۴۷۱ کیلوپاسکال (۱۸٪ خطا) و طبق چن،^[۷] ۴۸۷ کیلوپاسکال (۲۲٪ خطا) برآورد شده است. رابطه‌ی نیمه تجربی ارائه شده در میرهوف و هانا،^[۹] نیز ظرفیت باربری را ۳۲۶ کیلوپاسکال (۱۸٪ خطا) برآورد می‌کند، که بسیار کمتر از نتایج این پژوهش و حدود پایین ارائه شده در مریفلد و همکاران،^[۳] است. ژو،^[۱۳] و بندینی و فم،^[۱۴] نیز ظرفیت باربری را به ترتیب ۴۰۸ (۲٪ خطا) و ۴۲۴ (۶٪ خطا) کیلوپاسکال برآورد کرده‌اند، که بسیار به نتایج این پژوهش نزدیک است.

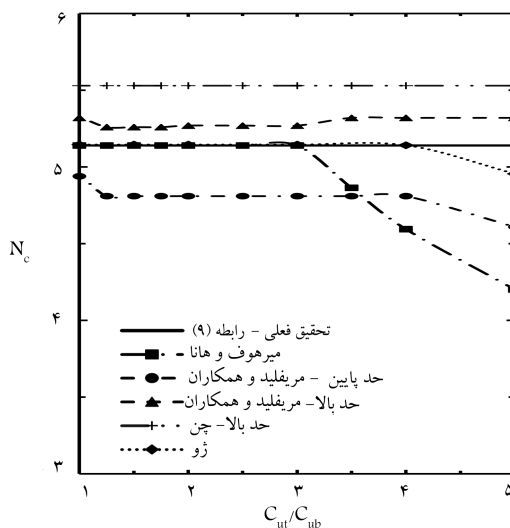
۶. نتیجه‌گیری

در این پژوهش ابتدا ظرفیت باربری شالوده‌های نواری بر روی خاک‌های دو لایه‌ی رسی با استفاده از روش تفاضل محدود در نرم‌افزار FLAC محاسبه و در ادامه، با توجه روند تغییر نتایج، رابطه‌ی ۵ برای حالت خاک نرم روی خاک سخت و رابطه‌ی ۹ برای حالت خاک سخت روی خاک نرم ارائه شده است. مقایسه‌های انجام شده بین برآورد این روابط از ظرفیت باربری و نتایج این پژوهش، نشان‌دهنده‌ی دقت بالای این روابط است. در حالی که سایر پژوهشگران^[۳،۴،۷] حدودی از ظرفیت باربری را مشخص کرده‌اند و نظری در مورد مقدار دقیق آن نداده‌اند. در این میان میرهوف و هانا،^[۹] با ارائه‌ی روابط نیمه‌تجربی به حل این مسئله پرداخته‌اند، اما طبق مقایسه‌های انجام شده، روابط ارائه شده‌ی میرهوف و هانا،^[۹] فقط در c_{ut}/c_{ub} های کوچک‌تر از ۲/۵ و بزرگ‌تر از ۰/۶ دقت دارند و با فاصله گرفتن از این محدوده دقت خود را از دست می‌دهند و در نتیجه قابل اطمینان نیستند. در این میان نتایج ارائه شده‌ی ژو،^[۱۳] و بندینی و فم،^[۱۴] به نتایج این پژوهش نسبتاً نزدیک هستند، ولی با وجود استفاده از روش مشترک توسط این دو پژوهش، تفاوت‌هایی بین نتایج این دو پژوهشگر به چشم می‌خورد، که نشان‌دهنده‌ی خطای مدل‌سازی در روش پژوهش دست‌کم یکی از این دو پژوهشگر است.

جنبه‌ی مثبت دیگر این روابط سادگی آن‌هاست. به نحوی که با یک ماشین حساب ساده و با صرف زمان اندکی می‌توان به کمک این روابط ظرفیت باربری را با دقت بالایی برآورد کرد. روابط ارائه شده در این پژوهش می‌توانند به صورت گسترده و کاربردی برای تعیین ظرفیت باربری شالوده‌های سطحی واقع شده بر روی خاک‌های دو لایه‌ی رسی مورد استفاده قرار گیرند.



شکل ۱۴. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = 1,5$.



شکل ۱۵. تغییرات ضریب ظرفیت باربری در حالت خاک سخت روی خاک نرم برای $H/B = 2$.

رابطه‌ی ۹ بسیار نزدیک است، اما با افزایش H/B (شکل‌های ۱۳ الی ۱۵) از دقت رابطه‌ی ۱۵ کاسته و نسبت به سایر پژوهش‌های انجام شده، ظرفیت باربری نهایی کمتری برای c_{ut}/c_{ub} های بزرگ‌تر از ۲/۵ پیش‌بینی شده است.

۵. مثال عددی

در این بخش یک مثال عددی با استفاده از رابطه‌ی ۹ حل و همچنین نتایج آن با نتایج سایر پژوهشگران برای این مثال خاص مقایسه شده است. مثال: ظرفیت باربری نهایی یک شالوده‌ی نواری به عرض ۴ متر را که بر یک خاک رسی دو لایه قرار گرفته است، محاسبه کنید. مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی لایه‌ی بالایی برابر با ۱۲۵ کیلوپاسکال و عمق آن برابر ۴ متر است. مقاومت برشی زهکشی نشده‌ی لایه‌ی زیرین نیز برابر ۲۵ کیلوپاسکال است. جواب: با توجه به اینکه لایه‌ی بالایی سخت‌تر از لایه‌ی زیرین است، از رابطه‌ی ۹

پانوشته‌ها

1. fast lagrangian analysis of continua
2. limiting equilibrium
3. punching failure

منابع (References)

1. Terzaghi, K., *Theoretical Soil Mechanics*, Wiley, New York, USA (1943).
2. Davis, E.H. and Booker, J.R. "The effect of increasing strength with depth on the bearing capacity of clays", *Geotechnique*, **23**(4), pp. 551-563 (1973).
3. Merifield, R.S., Sloan, S.W. and Yu, H.S. "Rigorous plasticity solutions for the bearing capacity of two-layered clays", *Geotechnique*, **49**(4), pp. 471-490 (1999).
4. Michalowski, R.L. "Collapse loads over two-layer clay foundation soils", *Soils and Foundations*, **42**(1), pp. 1-7 (2002).
5. Button, S.J. "The bearing capacity of footings on a two-layer cohesive subsoil", in *Proc. 3rd International Conference of Soil Mechanics and Foundation Engineering*, Zurich (1953).
6. Reddy, A.S. and Srinivasan, R.J. "Bearing capacity of footings on layered clays", *J. of Soil Mechanics and Foundations, Division, ASCE*, **93**(2), pp. 83-99 (1967).
7. Chen, W.F., *Limit Analysis and Soil Plasticity*, Elsevier, Amsterdam, Netherlands (1975).
8. Brown, J. and Meyerhof, G.G. "An experimental study of ultimate bearing capacity of layered clay foundations", in *Proc. 7th Int. Conf. Soil Mech. and Foundation Engineering*, Mexico, pp. 45-51 (1969).
9. Meyerhof, G.G. and Hanna, A.M. "Ultimate bearing capacity of foundations on layered soils under inclined load", *Canadian Geotechnical Journal*, **15**(4), pp. 565-572 (1975).
10. Zhu, M. and Michalowski, R.L. "Bearing capacity of rectangular footings on two-layer clays", in *Proc. of 16th Int. Conf. on Soil Mechanics and Geotechnical Engineering*, Osaka (2005).
11. Merifield, R.S. and Nguyen, V.Q. "Two and three-dimensional bearing-capacity solutions for footings on two-layered clays", *Geomech. and Geoengineering: an International Journal*, **1**(2), pp. 151-162 (2006).
12. Huang, M. and Qin, H. "Upper-bound multi-rigid-block solutions for bearing capacity of two-layered soils", *Computers and Geotechnics*, **36**(3), pp. 525-529 (2009).
13. Zhu, M. "Bearing capacity of strip footings on two-layer clay soil by finite element method", in *ABAQUS Users' Conference*, Boston, pp. 777-787 (2004).
14. Bandini, P. and Pham, H.V. "Bearing capacity of embedded strip footings in tow-layered clay soils", in *Geo-Frontiers Congress*, Dallas, pp. 332-341 (2011).
15. Yu, L., Liu, J., Kong, X. and Hu, Y. "Three-dimensional large deformation FE analysis of square footings in two-layered clays", *J. Geotech. Geoenviron. Eng.*, **137**(1), pp. 52-58 (2011).
16. Sloan, S.W. "Lower bound limit analysis using finite elements and linear programming", *International Journal of Numerical Analysis Methods in Geomechanics*, **12**(1), pp. 61-67 (1988).
17. Sloan, S.W. and Kleeman P.W. "Upper bound limit analysis using discontinuous velocity fields", *Comp. Methods Application in Mech. Eng.*, **127**(1-4), pp. 293-314 (1995).
18. FLAC, *Fast Lagrangian Analysis of Continua User's Manual*, Itasca Consulting Group, Minneapolis, MN (2005).
19. Bowles, J., *Foundation Analysis and Design*, 5th ed., McGraw-Hill, Peoria, Illinois (1996).
20. Meyerhof, G.G. "Influence of roughness of base and ground-water conditions on bearing capacity of foundations", *Geotechnique*, **5**(3), pp. 227-242 (1955).