مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۴)
دوره‌ی ۲ - ۳۱، شماره‌ی ۲/۳، ص. ۳۱-۴۰

Original Article

بررسی توانمندی روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته برای حل مسائل انتقال حرارت از طریق برآورد خطا

مجتبی لبیب‌زاده* (استادیار)
رجب مدرسی (کارشناس ارشد)
محمد نیسی‌پور (کارشناس ارشد)
گروه عمران، دانشکده‌ی مهندسی، دانشگاه شهید چمران اهواز

گسسته‌سازی مسئله در بسیاری از روش‌های بدون شبکه به معادلات انتگرالی منجر می‌شود، که حل آنها نیازمند انتگرال‌گیری عددی و معرفی نقاط گوس و وزن‌های مربوط همراه با شبکه‌بندی است. اما در میان این روش‌ها، روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته می‌تواند مراحل انتگرال‌گیری برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب را حذف کند و در عین سادگی، دقت بالا، و هزینه‌ی محاسباتی پایین، در مفهوم واقعی بدون شبکه باشد. هدف از این پژوهش، برآورد خطای حل عددی روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته برای مسائل انتقال حرارت هدایتی است. بدین منظور، ۲ مثال عددی دو بُعدی توسط این روش حل شده‌اند و پس از آن با استفاده از مفهوم کمینه‌ی مربعات باقیمانده، برآورد خطا، توزیع، و محل آن بررسی شده است. نتایج حاصل، گواه بر قابلیت بالای خطایابی درونی این روش بدون شبکه در حل شاخه‌ی دیگری از علوم مهندسی (انتقال حرارت هدایتی) است.

واژگان کلیدی: روش بدون شبکه، کمینه‌ی مربعات گسسته، انتقال حرارت هدایتی، برآورد خطا.

labibzadeh_m@scu.ac.ir
rajab_modaresi@yahoo.com
m.naisipour@scu.ac.ir

۱. مقدمه

امروزه توجه بسیاری از پژوهشگران به روش‌های بدون شبکه[۱] معطوف شده است. روش‌های بدون شبکه طی سال‌های اخیر به مجموعه‌ی روش‌های عددی افزوده و افق جدید و وسیعی در زمینه‌های پژوهش‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی گشوده شده است. استفاده از روش‌های بدون شبکه هنوز به گستردگی روش اجزاء محدود در مسائل مهندسی نیست، ولی چه بسا فعلاً این روش‌ها شرایطی مشابه با زمانی که روش اجزاء محدود شروع به گسترش کرد، را سپری می‌کنند. در دهه‌ی گذشته، روش‌های بدون شبکه‌ی متعددی برای حل معادلات دیفرانسیل معرفی شده‌اند. اولین بار از روش‌های بدون شبکه در روش هیدرودینامیک ذرات هموار[۲] به منظور مدل‌سازی پدیده‌های نجومی همچون گسترش ستارگان و توده‌ی ابرهای غباری استفاده شده است.[۱] مطالعات متعددی در زمینه‌ی روش‌های بدون شبکه وجود دارد، به طوری که پس از انتشار نوشتار روش اجزاء پخشی[۳]،[۲] روش‌های زیادی به نام روش‌های بدون شبکه مانند روش بدون شبکه‌ی گالرکین[۴]،[۳] روش ذرات هسته‌یی باز تولیدشونده (RKPM)[۵]،[۴] روش اجزاء محدود افراز واحد (PUFEM)[۶]،[۵] روش ابرهای اچ پی[۷]،[۶] روش پتروف‌گالرکین محلی (MLPG)[۸]،[۷] و غیره ارائه شده‌اند. همچنین در سال‌های اخیر، یک روش جدید بدون شبکه، که کاملاً مبتنی بر فرایند کمینه‌ی مربعات است، با عنوان کمینه‌ی مربعات گسسته[۹]،[۸] ارائه شده است. از مزایای روش مذکور عدم نیاز به انتگرال‌گیری، تقارن ماتریس ضرایب و سادگی به کارگیری آن است.

برآوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی ابزاری کارآمد، به‌منظور اطمینان از جهت‌گیری درست حل و برآورد دقت نتایج به‌دست‌آمده هستند. اگر قسمت‌هایی از مسئله که نیاز به دقت بیشتری دارند، مشخص شوند، می‌توان با یک فرایند مناسب، حجم محاسبات را تا حد زیادی کم کرد. هر فرایند تظریف تطبیقی شامل دو بخش اصلی است: ۱. برآوردکننده‌ی خطا[۱۰]، ۲. ابزاری برای فرایند تظریف. برآوردکننده‌ی خطا، مقدار خطا را در هر نقطه تخمین می‌زند و فرایند تظریف براساس اطلاعات برآوردکننده‌ی خطا مشخص می‌کند که چه قسمت‌هایی از حوزه‌ی مسئله نیاز به تظریف دارند. تاکنون چند برآوردکننده‌ی خطا در روش‌های بدون شبکه ارائه شده‌اند. از جمله می‌توان به فرایند تظریف تطبیقی در روش نقاط محدود،[۹] فرایند حل مجدد با استفاده از روش المان گسسته[۱۱] به‌صورت تطبیقی،[۱۰] تولید یک برآوردکننده‌ی خطا در روش اجزاء محدود افراز واحد با استفاده از مفهوم افراز واحد و فرایند کمینه‌ی مربعات متحرک (MLS)[۱۲]،[۱۱] روش اقتباسی براساس سلول‌های زمینه‌یی برای برآورد خطا در روش‌های بدون شبکه متکی بر شبکه‌بندی زمینه‌یی،[۱۲] و غیره اشاره کرد. هسته‌ی اصلی این روش یک سلول برآوردکننده‌ی خطاست. در این روش مقدار

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۴/۲، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱۱/۲۳، پذیرش ۱۳۹۳/۱/۱۶.

خطا در یک سلول به جای یک نقطه محاسبه می‌شود. خطای یک سلول از اختلاف بین نورم[۱۳] انرژی سلول موردنظر و نورم انرژی در یک سلول مرجع، که از طریق انتگرال‌گیری گوسی محاسبه شده است، به‌دست می‌آید. همچنین یک شاخص خطا برای روش بدون شبکه‌ی گالرکین ارائه شده است،[۱۳] که در آن از این اصل که جواب‌ها در نقاط گوس دقت بیشتری دارند، استفاده شده است.

در این مطالعه، ابتدا روش کمینه‌ی مربعات گسسته برای مسائل انتقال حرارت هدایتی[۱۴] دو بُعدی، پایدار و بدون چشمه‌ی حرارتی ارائه شده است، که به گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل حاکم بر مسئله می‌پردازد. از قابلیت‌های این روش می‌توان به دقت بالا، سادگی، هزینه‌ی محاسباتی پایین و عدم نیاز به انتگرال‌گیری اشاره کرد. البته از عیوب این روش می‌توان به مشکل‌بودن اعمال شرایط مرزی نیومن (شرایط مرزی شامل مشتقات تابع جواب) اشاره کرد. همچنین از کمینه‌ی مربعات گسسته‌ی متحرک وزنی برای دستیابی به مقادیر توابع شکل استفاده شده است. برای صحت‌یابی فرمول‌بندی روش کمینه‌ی مربعات گسسته، ۲ مسئله‌ی انتقال حرارت هدایتی حل و با جواب‌های دقیق مقایسه شده‌اند. در ادامه، یک برآوردکننده‌ی خطا برای این روش ارائه و خطای حل برآورد شده است.

۲. فرمول‌بندی روش کمینه‌ی مربعات گسسته

روش‌های معمول گالرکین، کمینه‌ی مربعات، هم‌مکانی و روش‌های زیرحوزه‌یی همگی به خانواده‌ی روش‌های باقیمانده‌ی وزنی متعلق است و اختلاف آنها فقط منتج از معیارهای مختلف وزن‌دهی به معادلات باقیمانده‌هاست. در تمامی این روش‌ها باقیمانده‌ی وزنی غالباً بر روی حوزه‌ی انتگرال‌گیری انجام و سپس برابر صفر قرار داده می‌شود. انتگرال‌گیری بر روی حوزه، خود منجر به تولید معادلات انتگرالی می‌شود، که برای حل این معادلات از انتگرال‌گیری عددی استفاده می‌شود.

در این بخش بنا به اهمیت کاربرد روش کمینه‌ی مربعات گسسته به نحوه‌ی دستیابی به مقادیر توابع شکل با استفاده از کمینه‌ی مربعات متحرک و همچنین گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم با استفاده از روش کمینه‌ی مربعات پرداخته شده است.[۱۴]

۱.۲. گسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل و شرایط مرزی به روش کمینه‌ی مربعات گسسته

معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی در حالت دو بُعدی و پایدار را می‌توان به‌صورت رابطه‌ی ۱ نوشت:

$$k\nabla^{2}T(X)+\rho Q=0 \qquad (1)$$

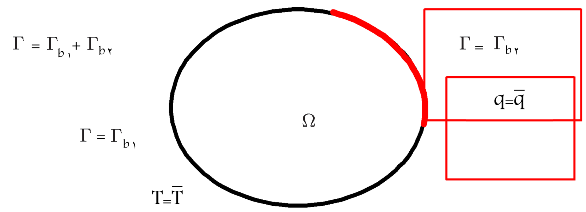
که در آن، k و ρ به ترتیب ضریب هدایت حرارتی و چگالی هستند. Q چشمه‌ی حرارتی در واحد سطح و Ω نشان‌دهنده‌ی محیط حل مسئله است. همچنین $X=[x \quad y]^{T}$ بردار مختصات است. شرایط مرزی به این قرار است (روابط ۲ الی ۴):

$$T=\overline{T} \qquad on\ \Gamma_{b1} \qquad (2)$$

$$nk\nabla T=\overline{q} \qquad on\ \Gamma_{b2} \qquad (3)$$

$$n.k\nabla T=h(T_a-T) \qquad on\ \Gamma_{b3} \qquad (4)$$

که در آن‌ها، $\overline{T}$ و $\overline{q}$ به ترتیب دمای معین و شار حرارتی بر روی مرزهای Γ_{b1} و Γ_{b2} هستند. T_a دمای محیط است. n بردار یکه‌ی برون‌سوی نرمال[۱۵] مرز و h ضریب انتقال هم‌رُفتی در فضای اطراف است. در این مطالعه، فقط انتقال حرارت از طریق هدایتی یا رسانایی بررسی می‌شود، لذا شرایط مرزی از نوع رابطه‌ی ۴ را در نظر گرفته نشده است. رابطه‌ی ۱ را می‌توان به‌صورت شکل ۱ و بر حسب باقیمانده (رابطه‌ی ۵) نوشت:



شکل ۱. شرایط مرزی شماتیک در انتقال حرارت هدایتی.

$$R_{\Omega}=\sum_{k=1}^{n_d}(L(T)+f) \qquad (5)$$

که در آن، n_d تعداد کل نقاط استفاده‌شده برای گسسته‌سازی دامنه‌ی مسئله (Ω) است و L یک عملگر دیفرانسیلی مرتبه‌ی ۲ است (رابطه‌ی ۶):

$$L(\,)=L_1(\,)+L_2(\,) \qquad (6)$$

که در آن L_1 و L_2 از رابطه‌ی ۷ به‌دست می‌آیند:

$$L_1=k_x\frac{\partial^2(\,)}{\partial x^2},\quad L_2=k_y\frac{\partial^2(\,)}{\partial y^2} \qquad (7)$$

و f از رابطه‌ی ۸ به‌دست می‌آید:

$$f=\rho Q \qquad (8)$$

روابط ۲ الی ۴ با توجه به یادداشت ذیل این روابط بر حسب باقیمانده به صورت روابط ۹ و ۱۰ نوشته می‌شوند:

$$R_{\Gamma_{b1}}=\sum_{k=1}^{n_{b1}}(T-\overline{T})_k \qquad on\ \Gamma_{b1} \qquad (9)$$

$$R_{\Gamma_{b2}}=\sum_{k=1}^{n_{b2}}(L'(T)-\overline{q})_k \qquad on\ \Gamma_{b2} \qquad (10)$$

که در آن‌ها، n_{b1} و n_{b2} به ترتیب تعداد نقاط بر روی مرزهای ۱ و ۲ هستند.

$$L'(T)=L'_1(T)+L'_2(T) \qquad on\ \Gamma_{b2} \qquad (11)$$

که در آن L'_1 و L'_2 از روابط ۱۲ و ۱۳ به‌دست می‌آیند:

$$L'_1=n_x.\,k_x\frac{\partial(\,)}{\partial x} \qquad (12)$$

$$L'_1=n_y.\,k_y\frac{\partial(\,)}{\partial y} \qquad (13)$$

در رابطه‌ی ۱۴، اصل کمینه‌ی مربعات بر حوزه‌ی مسئله و مرزها ارائه شده است:

$$I=\sum_{k=1}^{n_d}[L(T)+f]_k^2+\sum_{k=1}^{n_{b1}}\alpha_1[T-\overline{T}]_k^2+\sum_{k=1}^{n_{b2}}\alpha_2[L'(T)-\overline{q}]_k^2 \qquad (14)$$

که در آن، α_1 و α_2، ضرایب پنالتی بر مرزهای ۱ و ۲ هستند. همان‌طور که در قبل اشاره شد، مقادیر بزرگ این ضرایب منجر به اعمال دقیق شرایط مرزی می‌شود. می‌توان گفت که این ضرایب نوعی وزن هستند که موجب جواب کمینه‌ی خطای ممکن می‌شود. در محاسبات، مقدار α_1 برابر ۱۰۰۰ و مقدار α_2 برابر ۱۰ در نظر گرفته شده است. مقادیر ضرایب پنالتی باید به‌گونه‌یی انتخاب شوند که ماتریس ضرایب خراب نشود و برنامه اعلام خطا نکند.

برای رساندن مقادیر باقیمانده به میزان کمینه و در نتیجه رسیدن به جواب دقیق‌تر باید از رابطه‌ی ۱۴، نسبت به مقادیر گره‌یی مشتق گرفت. با این کار به دستگاه معادلات خطی ۱۵ می‌رسیم:

$$KT = F \tag{15}$$

که در آن، $T = [T_1, T_2, ..., T_N]^T$، K و F به ترتیب بردار مجهولات، ماتریس ضرایب و بردار بار معلوم هستند، و K و F از طریق روابط ۱۶ و ۱۷ محاسبه می‌شوند:

$$\begin{aligned} K_{ij} = & \sum_{k=1}^{n_d} [L(N_i)]^T L(N_j) + \alpha_1 \sum_{k=1}^{n_{b1}} [N_i]^T N_j \\ & + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n_{b2}} [L'(N_i)]^T L'(N_j) \end{aligned} \tag{16}$$

$$f_i = \sum_{k=1}^{nd} L(N_i) f + \alpha_1 \sum_{k=1}^{n_{b1}} N_i \overline{T} + \alpha_2 \sum_{k=1}^{n_{b2}} L'(N_i) \overline{q} \tag{17}$$

که در آن‌ها، N_iها همان توابع شکل در روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته هستند، که با روش کمینه‌ی مربعات متحرک[16]،[9] ساخته می‌شوند. ماتریس ضرایب K یک ماتریس مربعی با ابعاد $n_d \times n_d$ است (n_d تعداد کل نقاط است). همچنین این ماتریس متقارن نیز هست، که حل آن را توسط روش‌های سریع‌تر ممکن می‌سازد.

۲.۲. کمینه‌ی مربعات متحرک وزنی برای محاسبه‌ی مقادیر توابع شکل

این روش حدود سال ۱۹۶۰ میلادی توسط شپارد،[15] به منظور درون‌یابی هموار سطحی برای نقاط با مقادیر متغیر به‌کار رفته است و اساس کاربرد آن دستیابی به تقریب‌های کاملاً پیوسته است. تقریب کمینه‌ی مربعات متحرک[17] برای کلیه‌ی نقاطی که تعیین مقدار مجهول در آن با درون‌یابی مد نظر است، به‌کار گرفته می‌شود. البته به‌کارگیری توابع وزنی علاوه بر تعیین مقادیر مجهول، توانایی هموارسازی مشتقات را نیز دارد و نکته‌ی قابل توجه آنکه چنین مشتقاتی فقط به تابع چندجمله‌یی موضعی مرتبط هستند. تابع تقریب را به‌صورت رابطه‌ی ۱۸ فرض کنید:

$$u^h(x) = \sum_{i=1}^{n} p_i^T(x) a_i(x) \equiv p^x a(x) \tag{18}$$

که در آن، $a_i(x)$ بردار ضرایب تابع چندجمله‌یی است که مقادیر آن با به‌کارگیری الگوریتم مناسب تعیین می‌شوند. $p^T(x)$ بردار متغیرهای چندجمله‌یی هستند که در حالت خطی یک و دو بُعدی به‌صورت رابطه‌ی ۱۹ هستند:

$$P = (1, x), \qquad P = (1, x, y) \tag{19}$$

همچنین درحالت غیرخطی (مرتبه‌ی دوم) یک و دو بُعدی به‌صورت رابطه‌ی ۲۰ است:

$$P = (1, x, y, x^2, xy, y^2), \qquad P = (1, x, x^2) \tag{20}$$

هدف در روش کمینه‌ی مربعات متحرک، کمینه‌سازی تابع ۲۱ است:

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{m} W_x(x_k - x)[u_k - p^T(x) a(x)]^2 \tag{21}$$

که در آن، u_k پارامتر گره‌یی u (در اینجا دمای تقریبی) در $x = x_k$ و $W_x(x_k - x)$ تابع وزنی است. m تعداد نقاط موجود در دامنه‌ی پشتیبان نقطه‌ی موردنظر یعنی x_k است. در این حالت تابع وزنی برای هر نقطه‌ی دلخواه در حوزه‌ی مسئله به‌صورت متحرک یا انتقالی تعیین می‌شود و لذا توانایی درون‌یابی پیوسته، در حوزه‌ی مسئله‌ی موردنظر را دارد. توابع وزنی و خصوصیات آن در بند بعدی معرفی شده‌اند.

مشکل اصلی در این حالت تولید تابع وزنی متحرکی است که بتواند تغییر در اندازه را به‌طور پیوسته برای هر نقطه‌یی مانند x_k و با تعدادی از نقاط مشخص در هر مرتبه از محاسبه هماهنگ کند. بدین منظور می‌توان تصورکرد تابع وزنی، خاصیت تقارن به‌صورت رابطه‌ی ۲۲ دارد:

$$W_x(x_k - x) = W_x(x - x_k) \tag{22}$$

با به‌کارگیری تابع وزنی متناظر با هر نقطه مانند x_k، رابطه‌ی ۲۳ را داریم:

$$W_k(x_k - x) = W_k(x - x_k) \tag{23}$$

بنابراین هدفی که باید کمینه شود به‌صورت رابطه‌ی ۲۴ است:

$$J(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} W_k(x - x_k)[u_k - p^T(x) a(x)]^2 \tag{24}$$

که در آن، n تعداد نقاط در همسایگی x به‌گونه‌یی است که اندازه‌ی تابع وزنی در آن نقاط مخالف صفر است (رابطه‌ی ۲۵) و نیز u_k پارامتر گره‌یی u در $x = x_k$ است. در این حالت تابع وزنی در نقطه‌ی x_k استوار است و در نقاط دیگر ارزیابی می‌شود.

$$w_k(x_k - x) \neq 0 \tag{25}$$

با مشتق‌گیری از تابع هدف $J(x)$ نسبت به $a(x)$ به منظور کمینه‌سازی آن و با مرتب‌سازی، روابط ۲۶ و ۲۷ را خواهیم داشت:

$$a(x) = A^{-1}(x) \sum_{j=1}^{n} B_j(x) u_j \tag{26}$$

$$a(x) = A^{-1}(x) B(x) u_j \tag{27}$$

با تعریف ماتریس‌های A و B به‌صورت روابط ۲۸ و ۲۹، روابط ۳۰ و ۳۱ را خواهیم داشت:

$$A(x) = \sum W_k(x - x_k) P(x_k) P^T(x_k) \tag{28}$$

$$B_j(x) = W_j(x - x_k) P(x_j) \tag{29}$$

$$Pa = u = \sum_{k=1}^{n} N_k u_k \tag{30}$$

$$P(A^{-1} B u_k) = N_k u_k \tag{31}$$

حال می‌توان تابع شکل را به‌صورت رابطه‌ی ۳۲ نشان داد:

$$N_k(x) = P A^{-1} B_k \tag{32}$$

همچنین مشتقات توابع شکل و ماتریس A و B به راحتی با معلوم‌بودن خود توابع به‌دست می‌آیند.

۱.۲.۲. توابع وزنی
توابع وزنی درحالت کلی باید این مشخصه‌ها را داشته باشند:[۱۶]

- پیوسته و مثبت و قابل تفکیک در حوزه‌های تأثیر مسئله باشند و مقدار بزرگ‌تر از صفر در داخل حوزه و مقدار صفر در خارج از حوزه داشته باشند. همچنین سطح زیر منحنی تابع وزنی در یک زیرحوزه‌ی معادل واحد باشد (خاصیت نرمال).
- اندازه‌ی تابع وزنی برای یک نقطه، مقدار بزرگ‌تری نسبت به مقدار آن در سایر نقاط آن زیرحوزه داشته باشد.
- تعداد نقاط موجود در یک حوزه‌ی تأثیر (زیرحوزه) که مقادیر تابع وزنی در آن محاسبه می‌شود، باید بزرگ‌تر یا مساوی درجه‌ی تابع پایه (تعداد جملات تابع چندجمله‌یی) باشند.

با به کارگیری حوزه‌ی اثر دایره‌یی و در صورتی که پارامتر S معرف فاصله‌ی دو نقطه از یکدیگر، r معرف شعاع تأثیر زیرحوزه، $w(r)$ تابع وزنی، $S_{\max}$ متناظر با اندازه‌ی حوزه و $r=\frac{S}{S_{\max}}$ در فرمول‌بندی کلی باشند، سه تابع وزنی مطرح در روش‌های بدون شبکه شامل توابع نمایی، اسپیلاین مرتبه‌ی ۳ و اسپیلاین مرتبه‌ی ۴ به‌صورت روابط ۳۳ الی ۳۵ هستند: تابع وزنی نمایی:

$$W(r)=\begin{cases} e^{-\left(\frac{r}{a}\right)^{2}}, & r\leq 1\\ 0, & r>1\end{cases} \tag{۳۳}$$

تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی سوم[۱۸]:

$$W(r)=\begin{cases} \frac{2}{3}-4r^{2}+4r^{3}, & r\leq \frac{1}{2}\\ \frac{4}{3}-4r+4r^{2}-\frac{4}{3}r^{3}, & \frac{1}{2}<r\leq 1\\ 0, & r\geq 1\end{cases} \tag{۳۴}$$

تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی چهارم:

$$W(r)=\begin{cases} 1-6r^{2}+8r^{3}-3r^{4}, & r\leq 1\\ 0, & r>1\end{cases} \tag{۳۵}$$

در این پژوهش از تابع وزنی اسپیلاین مرتبه‌ی سوم استفاده شده است.

۳. مروری بر انتقال حرارت[۱۹]
در ترمودینامیک مکانیزم انتقال گرما و روش‌های محاسبه‌ی نرخ انتقال گرما مورد تجزیه و تحلیل قرار نمی‌گیرد. لذا ترمودینامیک فقط حالت تعادلی سیستم را مورد بررسی قرار می‌دهد و لازمه‌ی حالت تعادلی معادله نبود گرادیان دماست. به‌عبارت دیگر، انتقال گرما ذاتاً غیرتعادلی است؛ لذا هدف ما از مطالعه‌ی انتقال گرما، پاسخ‌گویی به زمان لازم برای رسیدن به تعادل سیستم و تغییرات دما برحسب زمان و شدت انتقال گرما در هر لحظه از زمان و مکان است. بنابراین انتقال حرارت به‌صورت انرژی انتقال‌یافته از یک سیستم به سیستم دیگر در اثر وجود اختلاف دما بین دو سیستم تعریف می‌شود. بنابراین به زبان ساده‌تر، انتقال حرارت ناشی از وجود اختلاف دماست. پس نیروی محرکه‌ی انتقال حرارت گرادیان دماست. لذا نرخ انتقال حرارت در یک جهت مشخص به میزان اختلاف دما بر واحد طول بستگی دارد و هر چه اختلاف دما بین دو سیستم زیادتر باشد،نرخ انتقال حرارت زیادتر می‌شود. انتقال حرارت کلاً به ۳ روش هدایت[۲۰]، جابه‌جایی (همرفتی)[۲۱] و تابشی[۲۲] صورت می‌گیرد. در بیشتر مسائل کاربردی انتقال حرارت به‌صورت ترکیبی از ۲ یا ۳ روش ذکرشده است.

۱.۳. انتقال حرارت هدایتی
اگر دمای ناحیه‌یی از جسم از ناحیه‌یی دیگر از آن بالاتر باشد، حرارت از ناحیه‌ی گرم‌تر به سمت ناحیه‌ی سردتر جریان می‌یابد. این پدیده را هدایت گویند. در این پدیده انتقال انرژی حرارتی به‌صورت جریان الکترون‌های آزاد و یا انتقال انرژی ارتعاشی ذرات جسم به ذرات مجاور در دمای پایین‌تر است. در این روش واسطه‌ی انتقال حرارت (جامدات، سیال و گاز) ساکن است، لذا شدت انتقال حرارت هدایتی (مقدارگرمای منتقل‌شده در زمان واحد) متناسب با شیب دما در جسم و اندازه‌ی سطح عبور است. بنابراین هدایت حرارتی با قانون فوریه به‌صورت رابطه‌ی ۳۶ بیان می‌شود:

$$q=-kA\frac{dT}{dx} \tag{۳۶}$$

که در آن، q مقدار حرارت منتقل‌شده در واحد زمان $\left(\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}}\right)$ است.

بنابراین قانون فوریه بیانگر مکانیزم انتقال حرارت به روش هدایتی است. ازطرفی قانون فوریه مبتنی بر تجربه‌ی بشری است، نه به‌صورت تئوری تحلیلی؛ ضمناً علامت منفی بیانگر جهت کاهش انتقال دماست، به عبارت روشن‌تر، گرما نمی‌تواند از جای سرد به جای گرم نقل مکان کند (قانون دوم ترمودینامیک). قانون فوریه برای تمامی حالات (پایدار، ناپایدار) معتبر است. حال با توجه به رابطه، اگر گرادیان دما ثابت باشد، انتقال حرارت تابع ضخامت نخواهد بود؛ زیرا به ازاء هر ضخامتی، مقدار انتقال حرارت ثابت خواهد بود.

۲.۳. معادله‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی در حالت‌های ۲ و ۳ بُعدی
جریان حرارت در اجسامی که بیش از یک بُعد دارند، به‌صورت حرارت هدایت‌شده به داخل و یا خارج حجم المان در سه جهت محورهای مختصات خواهد بود. لذا برای المان با حجم dz، dy وdx با فرض ثابت‌بودنK (ضریب هدایت حرارتی $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{\circ}\mathrm{C}}$) معادله‌ی کلی انتقال حرارت هدایتی سه بعدی،[۱۷] به‌صورت رابطه‌ی ۳۷ خواهد بود:

$$\frac{d^{2}T}{dx^{2}}+\frac{d^{2}T}{dy^{2}}+\frac{d^{2}T}{dz^{2}}+\frac{q}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{dT}{dt} \tag{۳۷}$$

که در آن، α ضریب نفوذ حرارت و q° شدت حرارت تولیدی در داخل جسم است.

معادله‌ی انتقال حرارت هدایتی در حالت دو بُعدی، پایدار و بدون چشمه‌ی حرارتی به‌صورت رابطه‌ی ۳۸ معرفی می‌شود:

$$\frac{d^{2}T}{dx^{2}}+\frac{d^{2}T}{dy^{2}}=0 \tag{۳۸}$$

که در آن، T توزیع دما برحسب x و y $(^{\circ}\mathrm{C})$ است. لذا از معادله‌ی ۳۸ در حل مثال‌های عددی با استفاده از روش DLSM استفاده شده است.

۴. برآورد خطا برای روش کمینه‌ی مربعات گسسته (DLSM)
جواب تقریبی حاصل از یک روش عددی، دو نوع خطای اصلی دارد. اولین آن‌ها خطای تقریب تابع جواب است، که با استفاده از توابع آزمونی انجام می‌شود. واضح

است که اگر در مناطقی که تابع جواب، تغییرات بیشتری دارد، نقاط بیشتری به‌کار رود، این خطا کاهش می‌یابد، که این همان فرایند تظریف[23] است. خطای دوم، خطای گسسته‌سازی معادلات دیفرانسیل و معادلات مرزی است. بخشی از این خطا ناشی از محدودیت ذخیره‌سازی اطلاعات در هر مرحله از فرایند محاسبات است، به این معنی که معادلات در تمام حوزه و در بی‌نهایت نقطه تعریف شده‌اند، اما در فرایند گسسته‌سازی معادلات، به دلیل محدودیت حافظه و زمان، در نقاط محدودی تعریف می‌شوند. بخش دیگری از این خطا به شیوه‌ی گسسته‌سازی معادلات مربوط می‌شود. بخشی از خطای دوم را، که مربوط به محدودیت ذخیره‌سازی اطلاعات است، می‌توان با توجه به پیشرفت روزافزون رایانه‌ها و استفاده از فرایند تظریف به میزان کمینه رساند.

۱.۴. منابع خطا در روش DLSM

اولین منبع خطا در روش بدون شبکه DLSM خطای حاصل از تقریب تابع با استفاده از توابع آزمونی است (رابطه‌ی ۳۹):

$$u(x_k) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(x_i)\overline{u_i} \tag{۳۹}$$

طبق رابطه‌ی ۳۹، در روش‌های بدون شبکه برای محاسبه‌ی مقدار تابع در یک نقطه‌ی فرضی مانند x_k از درون‌یابی مقادیر گره‌یی استفاده می‌شود، که این امر یکی از منابع به‌وجودآورنده‌ی خطاست. زیرا لزوماً این تابع درون‌یاب بر تابع جواب منطبق نمی‌شود. واضح است که هر چه تعداد نقاط گره‌یی افزایش یابد، مقدار این خطا کمتر خواهد شد. دومین عامل ایجاد خطا در روش DLSM از رابطه‌ی ۴۰ (مجموع مربعات باقیمانده) نشأت می‌گیرد:

$$I = \sum_{k=1}^{nd} [R_\Omega]_k^2 + \sum_{k=1}^{nb1} \alpha_1 [R_{\Gamma_{b1}}]_k^2 + \sum_{k=1}^{n_{b2}} \alpha_2 [R_{\Gamma_{b2}}]_k^2 \tag{۴۰}$$

مشاهده می‌شود که فقط تعداد محدودی از نقاط در تشکیل تابع I نقش دارند. بنابراین محدودبودن تعداد نقاط در تشکیل تابع I را نیز می‌توان به عنوان یکی دیگر از عوامل به وجودآورنده‌ی خطا نام برد. به منظور کاهش خطا در این حالت باید تعداد نقاط را افزایش داد.

۲.۴. برآورد خطا

بسیاری از روش‌های برآورد خطا، که براساس روش اجزاء محدود ارائه شده‌اند، قابل کاربرد در روش‌های بدون شبکه نیستند. برای مثال، برآوردکننده‌ی خطای روش رایج Z Z،[۱۸و۱۹] نیازمند نقاط بهینه یا ابر همگراست، که معمولاً بر روی نقاط گوس المان‌ها قرار دارند. پیداکردن این نقاط بهینه در اجزاء محدود مرتبه‌ی بالا، سخت و در روش‌های بدون شبکه با شبکه‌ی پس‌زمینه، بسیار سخت‌تر است. به‌طورکلی، روش‌های برآورد خطا را می‌توان به ۳ گروه تقسیم کرد:

۱. روش‌های مبتنی بر باقیمانده،[۲۰]
۲. روش‌های مبتنی بر هموارسازی یا برازش،[۲۱]
۳. روش‌های مبتنی بر شیب و تغییرات جواب.[۲۲]

به بیان کلی، روش‌های مبتنی بر باقیمانده، که باقیمانده‌ی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله را به‌عنوان معیار خطا در نظر می‌گیرند، تئوری استوار و درستی دارند و کاربردشان ساده است. در این نوشتار از روش‌های مبتنی بر باقیمانده استفاده شده است. به این صورت که مقدار جواب محاسبه‌شده از روش پیشنهادی در معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله قرار داده شده است و باقیمانده‌ی آن در تعیین تابع خطای تقریبی به کار می‌رود.

در روش بدون شبکه‌ی DLSM از مقدار تابع I، که در رابطه‌ی ۴۰ آمده است، به‌عنوان معیاری برای خطا در هر نقطه استفاده می‌شود. واضح است که هر چه مقدار I کمتر باشد، مقدار خطا نیز کمتر خواهد بود. رابطه‌ی ۴۱ را می‌توان هم روی تمام حوزه‌ی مسئله و هم بر روی یک سلول voroni و همچنین یک نقطه محاسبه کرد. رابطه‌ی ۴۲ برآوردکننده‌ی خطا در یک نقطه را نشان می‌دهد. برای سنجش درستی برآوردکننده‌ی خطای ارائه‌شده، ۲ مثال از مسائل انتقال حرارت هدایتی که جواب‌های تحلیلی دارند، با استفاده از روش DLSM حل شده‌اند و خطای محاسبه‌شده توسط جواب دقیق (خطای دقیق) و خطای برآوردشده با روش DLSM برای آن محاسبه و مقایسه شده است. خطای دقیق در هر نقطه از رابطه‌ی ۴۳ به‌دست می‌آید و خطای روش DLSM در هر نقطه از رابطه‌ی ۴۴ به دست می‌آید، که در آن، T_k دمای تقریبی و $\hat{T}_k$ دمای دقیق در نقطه‌ی kاُم هستند.

$$E^{Total}_{Estimate} = \left[\frac{I}{N}\right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{تعداد کل نقاط گره‌یی } N) \tag{۴۱}$$

$$E^{k}_{Estimate} = (I)^{\frac{1}{2}} \tag{۴۲}$$

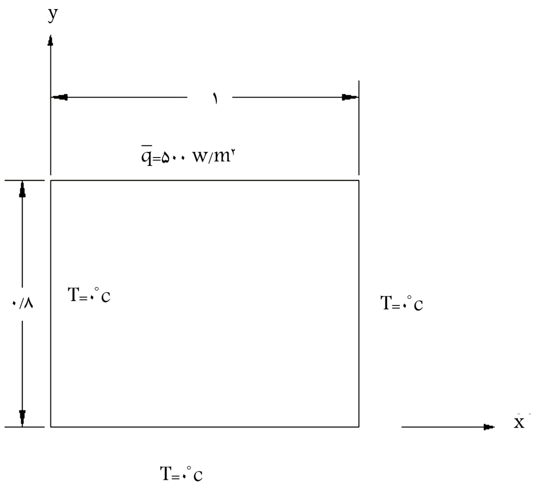
$$E^{Total}_{Exact} = \left(\frac{\sum_{k=1}^{N}\left[(T_k - \hat{T}_k)^T (T_k - \hat{T}_k)\right]}{N}\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۴۳}$$

$$E^{k}_{Estimate} = \left([(T_k - \hat{T}_k)^T (T_k - \hat{T}_k)]\right)^{\frac{1}{2}} \tag{۴۴}$$

۵. مثال‌های عددی

۱.۵. انتقال حرارت در صفحه‌ی مستطیلی با شار حرارتی ثابت

به‌عنوان اولین مسئله، یک صفحه‌ی مستطیلی به ابعاد ۰٫۸ × ۱ متر در نظر گرفته شده است (شکل ۲). ضریب انتقال حرارت در این مسئله $K = 1.2\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^\circ\mathrm{C}}$ در



شکل ۲. هندسه‌ی مسئله.

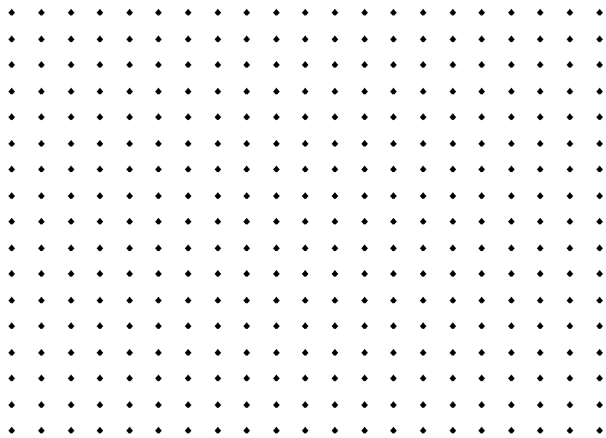
نظر گرفته شده است. مرز بالا تحت شار حرارتی به میزان $\bar{q} = 500\ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}$ قرار دارد. سایر مرزها در دمای ثابت صفر $^\circ\mathrm{C}$ قرار دارند. منبع حرارتی در حوزه‌ی مسئله وجود ندارد. جواب دقیق مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۴۵ است:[۲۳]

$$T(x,y) = \frac{4\bar{q}a}{k\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\sinh\left\{\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]y\right\}\sin\left\{\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]x\right\}}{\cosh\left\{\left[\frac{(2m+1)\pi}{a}\right]b\right\}(2m+1)^2} \quad (۴۵)$$

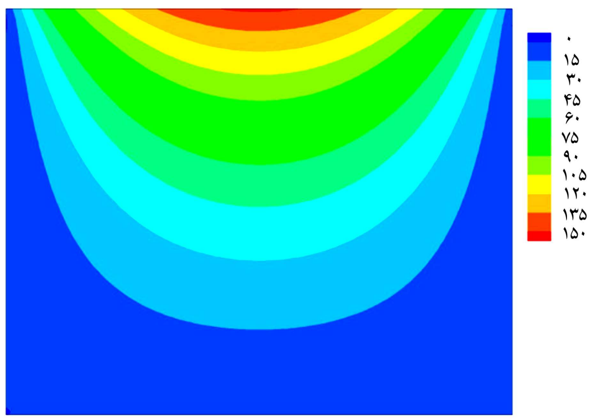
آرایش نقاط برای حل مسئله در شکل ۳ نشان داده شده است. برای حل از ۳۵۷ نقطه که به‌طور منظم پخش شده‌اند، استفاده شده است. در شکل‌های ۴ و ۵ جواب روش DLSM با جواب دقیق مقایسه شده است.

کانتورهای جواب در واقع توزیع دما $T(x,y)$ بر سطح جسم را نشان می‌دهند. رنگ‌های روشن‌تر، نشان‌دهنده‌ی دمای بالاتر هستند.

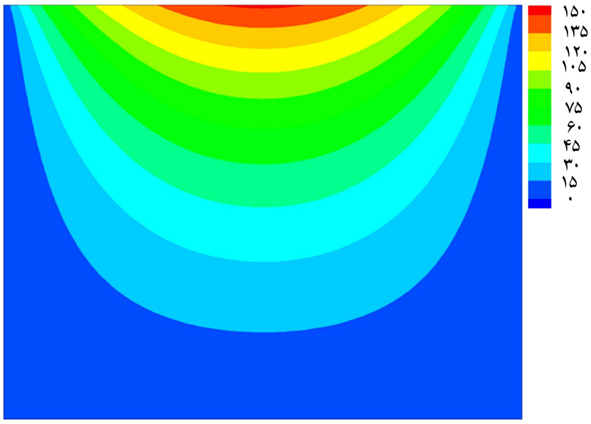
در شکل‌های ۶ و ۷ نیز به ترتیب توزیع خطای برآوردشده (خطای محاسبه‌شده با روش پیشنهادی و توزیع خطای واقعی مسئله ارائه شده است. نقاط تیره‌تر خطای بیشتر را نشان می‌دهد. لازم به توضیح است که روش پیشنهادی فقط توزیع و محل خطای بیشتر را نشان می‌دهد و مقدار و درصد آن را برآورد نمی‌کند. در شکل ۸، جواب دقیق با جواب روش عددی پیشنهادی روی خط $y = 0/8$ مقایسه شده است.



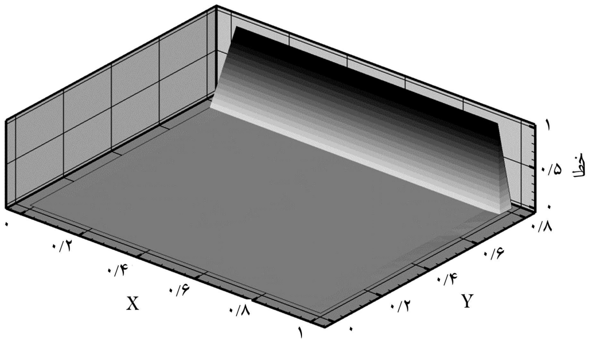
شکل ۳. آرایش منظم نقاط.



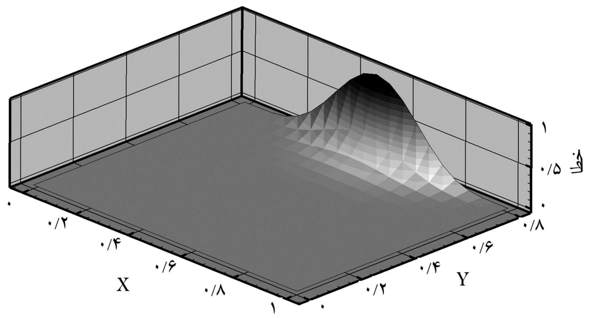
شکل ۴. کانتور جواب روش DLSM.



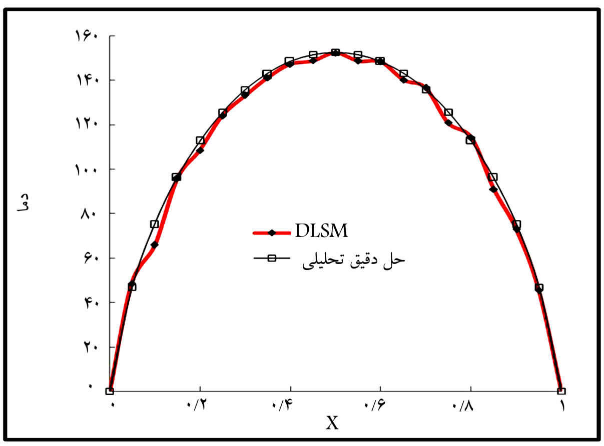
شکل ۵. کانتور جواب دقیق.



شکل ۶. توزیع خطای برآوردشده (خطای تقریبی).



شکل ۷. توزیع خطای دقیق.



شکل ۸. مقایسه‌ی جواب DLSM و جواب دقیق روی خط $y = 0/8$.

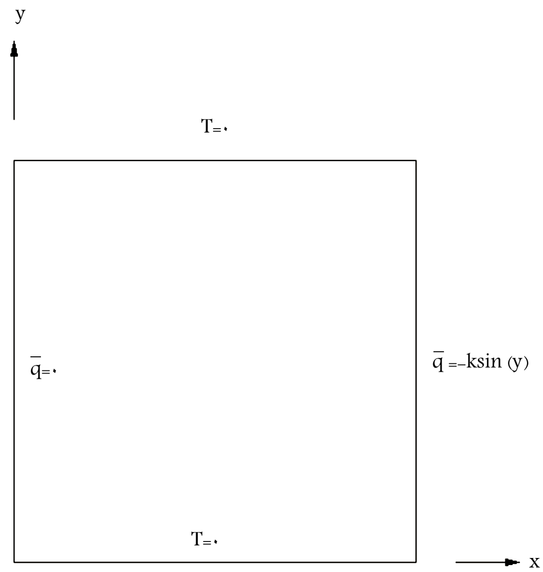
۲.۵. انتقال حرارت در صفحه‌ی مستطیلی با شار حرارتی سینوسی

به‌عنوان دومین مثال، یک صفحه‌ی مستطیلی به ابعاد $\pi \times \pi$ در نظرگرفته شده است. ضریب انتقال حرارت در این مسئله $k = ۵۰ \ \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^{\circ}\mathrm{C}}$ در نظرگرفته شده است. مرز بالا تحت شار حرارتی سینوسی به میزان $q_x = -k\sin(y)$ قرار دارد. سایر مرزها در دمای ثابت صفر $^{\circ}\mathrm{C}$ قرار دارند. شرایط مرزی و هندسه در شکل ۹ نشان داده شده است. منبع حرارتی در حوزه‌ی مسئله وجود ندارد. جواب دقیق مسئله به‌صورت رابطه‌ی ۴۶ است:[۲۴]

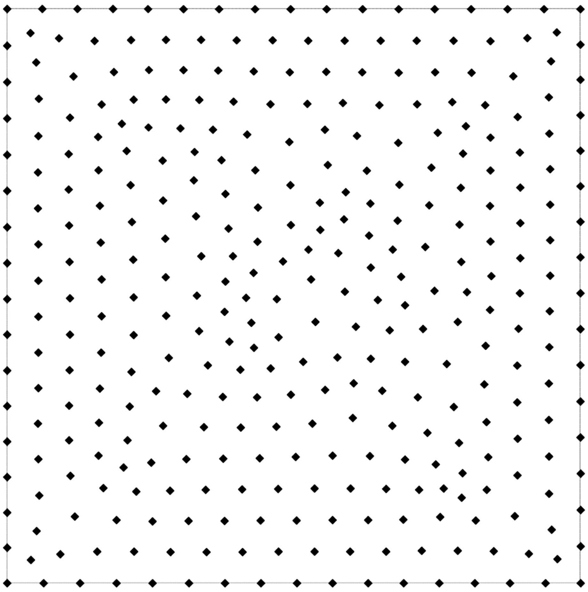
$$T(x,y) = \frac{\cosh(x)\sin(y)}{\sinh(\pi)} \tag{۴۶}$$

توزیع نقاطی که برای حل مسئله استفاده شده است، در شکل ۱۰ نشان داده شده است. برای حل از ۳۳۹ نقطه، که به‌طور نامنظم پخش شده‌اند، استفاده شده است. در شکل‌های ۱۱ و ۱۲، جواب روش DLSM با جواب دقیق مقایسه شده است. مطابق شکل ۱۳، مقادیر جواب DLSM در خطوط بالا و پایین صفحه با مقادیر جواب دقیق متفاوت هستند. لذا در آن نواحی خطا وجود دارد. شکل ۱۴، نیز جواب DLSM و جواب دقیق را در راستای خط $y = \pi/۲$ مقایسه می‌کند و مبین نزدیک‌بودن مقادیر جواب روش DLSM و جواب دقیق در این ناحیه از مسئله است. شکل ۱۵، این مسئله را به‌خوبی نشان می‌دهد. این شکل در واقع توزیع خطای برآوردشده (خطای محاسبه‌شده با روش پیشنهادی) به صورت بی‌بُعد و محل خطا را نشان می‌دهد. اما مقدار آن را برآورد نمی‌کند. جهت نشان‌دادن قابلیت روش خطایابی به کار رفته در این مطالعه در شناسایی محل خطا، مقدار دقیق خطا در شکل ۱۶ ترسیم شده است. با مقایسه‌ی دو شکل ۱۵ و ۱۶، توانایی بالای روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته در تعیین محل خطا بدون اطلاع از جواب دقیق آشکار می‌شود. نقاط تیره‌تر خطای بیشتر را نشان می‌دهد. مجدداً یادآوری می‌شود که روش پیشنهادی فقط توزیع و محل خطای بیشتر را نشان می‌دهد و مقدار و درصد آن را برآورد نمی‌کند.

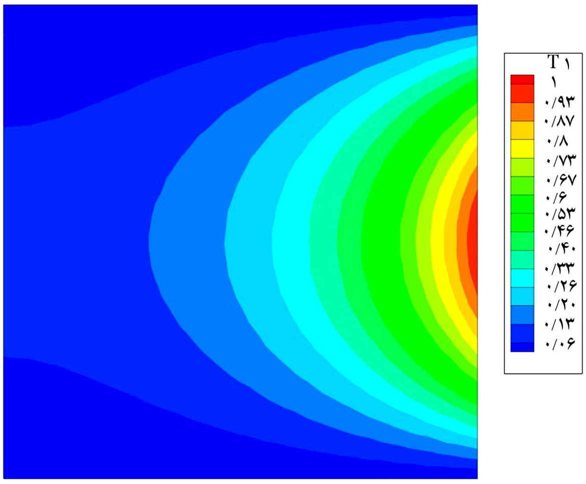
همان‌طور که مشاهده می‌شود، خطاهای برآوردشده در هر ۲ مسئله، توزیعی



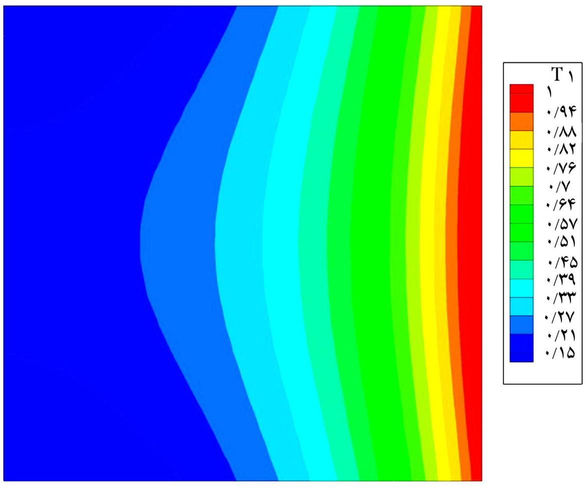
شکل ۹. هندسه‌ی مسئله و شرایط مرزی.



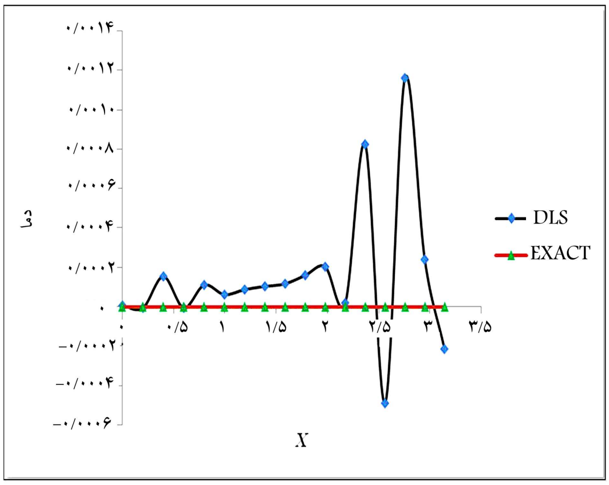
شکل ۱۰. توزیع نامنظم نقاط گره‌یی.



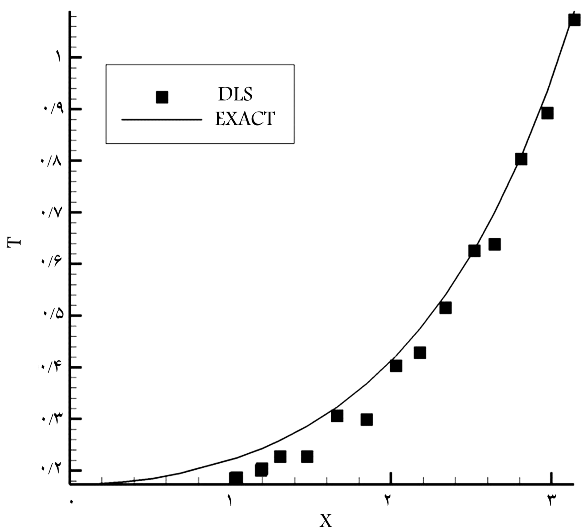
شکل ۱۱. کانتور جواب روش DLSM.



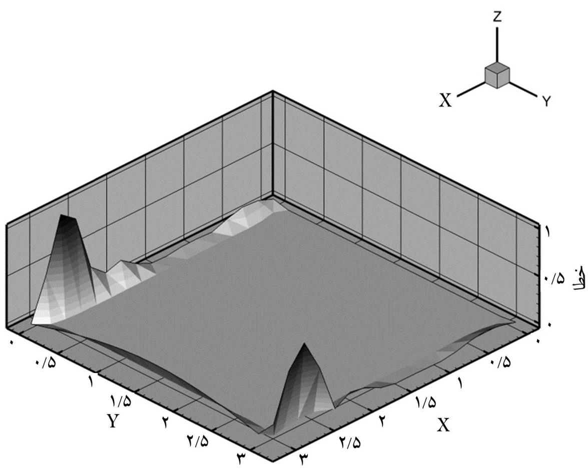
شکل ۱۲. کانتور جواب دقیق.



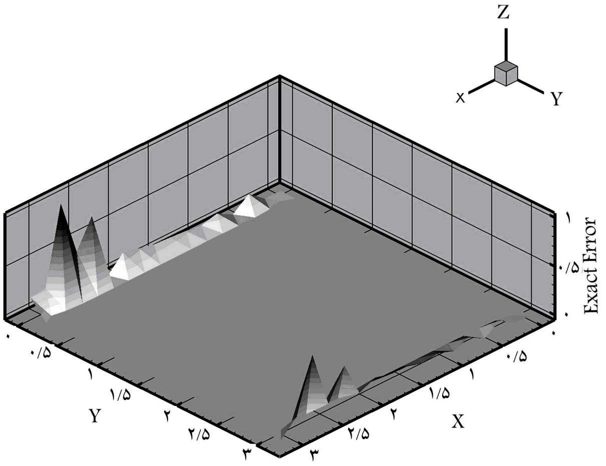
شکل ۱۳. مقایسه‌ی جواب تحلیلی و تقریبی بر روی ضلع تحتانی $(y = ۰)$ و ضلع فوقانی $(y = \pi)$.



شکل ۱۴. مقایسه‌ی جواب تحلیلی و تقریبی در خط $y = \pi/۲$.



شکل ۱۵. توزیع خطای برآوردشده (خطای تقریبی).



شکل ۱۶. توزیع خطای دقیق.

نسبتاً مشابه با خطای دقیق دارند. البته در مسئله‌ی اول به دلیل اینکه توزیع نقاط یکنواخت است، تفاوت خطای برآوردشده‌ی پیشنهادی با خطای دقیق بیشتر از مسئله‌ی دوم است، که در آن نقاط به‌صورت غیریکنواخت پخش شده‌اند. توجه به این نکته لازم است که این روش برآورد خطا، توزیع مناسبی از خطا را ارائه می‌دهد، اما مقدار و درصد خطا را مشخص نمی‌کند. برآورد خطا به ما کمک می‌کند که محل خطا را شناسایی کنیم و با استفاده از فرایند تظریف تطبیقی، بهترین آرایش برای تعداد مشخصی از نقاط صورت گیرد تا در سرحد امکان، جواب تقریبی به جواب دقیق نزدیک‌تر شود و خطای روش پیشنهادی کاهش یابد. به همین دلیل برآورد خطا به‌عنوان معیار خطا نقش بسزایی در فرایند جابه‌جایی نقاط ایفا می‌کند. در این مطالعه به منظور تبدیل معادلات ریاضی به یک برنامه‌ی کامپیوتری، از زبان برنامه‌نویسی FORTRAN استفاده شده است. این برنامه شامل این زیربرنامه‌هاست:

۱. زیربرنامه‌ی خواندن فایل ورودی: این زیربرنامه، مختصات نقاط و شرایط مرزی را از یک فایل متنی می‌خواند و در آرایه‌های مخصوص هرکدام ذخیره می‌کند.

۲. زیربرنامه‌ی تشکیل توابع شکل: این زیربرنامه براساس روابط توابع شکل کمینه‌ی مربعات گسسته و مشتقات (اول و دوم) آنها را محاسبه و ذخیره می‌کند.

۳. زیربرنامه‌ی تشکیل ماتریس ضرایب و بردار معلومات دست راست: این زیربرنامه ماتریس ضرایب را برای روش کمینه‌ی مربعات گسسته می‌سازد. همچنین بردار دست راست نیز می‌سازد و هر دو آرایه به زیربرنامه‌ی حل دستگاه معادلات خطی فرستاده می‌شوند.

۴. زیربرنامه‌ی حل دستگاه معادلات خطی: که یک زیربرنامه‌ی داخلی نرم‌افزار FORTRAN است و براساس روش LU دستگاه معادلات را حل و جواب را به‌صورت یک بردار ارائه می‌کند.

۵. زیربرنامه‌ی برآورد خطا: برآورد خطای حل یا همان تابع I در این زیربرنامه براساس روابط همین فصل در هر نقطه محاسبه می‌شود.

۶. زیربرنامه‌ی تولید فایل‌های خروجی متنی: این زیربرنامه کلیه‌ی اطلاعات خروجی از جمله دمای به‌دست‌آمده در هر نقطه و خطای برآوردشده را به‌صورت فایل متنی در فرمت قابل خواندن برای نرم‌افزار TECPLOT ارائه می‌کند و در نهایت، این اطلاعات توسط نرم‌افزار TECPLOT از حالت عددی به نمودار و کانتور تبدیل می‌شوند.

۶. نتیجه‌گیری

در این نوشتار، ابتدا توضیحاتی در مورد روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته (DLSM)، شامل نحوه‌ی تولید توابع شکل وگسسته‌سازی معادله‌ی دیفرانسیل حاکم بر مسئله ارائه شده است، که از مزایای مهم این روش، می‌توان به سادگی به‌کارگیری، دقت بالا، متقارن و نواری‌بودن ماتریس ضرایب و عدم نیاز به انتگرال‌گیری برای محاسبه‌ی ماتریس ضرایب اشاره کرد. یکی از مشخصه‌ها و مزایای اصلی روش DLSM، قابلیت استفاده از نقطه‌گذاری به‌صورت کاملاً دلخواه در آن است، که باعث کم هزینه‌شدن فرایند تظریف تطبیقی در این روش بدون شبکه، نسبت به روش اجزاء محدود می‌شود. استفاده از روش‌های عددی در حل معادلات دیفرانسیل نیازمند آگاهی از محل و اندازه‌ی نسبی خطاهاست. برآوردکننده‌های خطا در روش‌های عددی، ابزاری کارآمد برای اطمینان از جهت‌گیری درست حل و تخمین دقت نتایج هستند. در روش‌های بدون شبکه، ناپیوستگی بین المانی وجود ندارد و جواب‌ها همواره حالت هموار روی کل حوزه‌ی مسئله دارند. به عبارتی می‌توان گفت برآورد خطا بر پایه‌ی شیوه‌ی هموارسازی تنش، که در اجزاء محدود استفاده می‌شود، را نمی‌توان عیناً در روش‌های بدون شبکه به‌کار برد. صحت فرمول‌بندی حل مسئله با روش DLSM، با مقایسه‌ی حل دقیق معتبر به اثبات رسیده است. همچنین یک برآوردکننده خطای مبتنی بر باقیمانده، برای ۲ مسئله‌ی انتقال حرارت هدایتی مورد استفاده قرار گرفته است. بر این اساس با استفاده از برآوردکننده‌های خطا، می‌توان توزیع و محل خطا را مشخص کرد و با استفاده از فرایند تظریف تطبیقی، با تغییر آرایش نقاط و افزودن نقاط بیشتر در محل‌هایی که توزیع خطا در آنجا بیشتر است، دقت جواب‌ها را بالا برد. با توجه به اینکه روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته به‌عنوان یک روش عددی نوپا شناخته می‌شود، نگارندگان بر این قصد بوده‌اند که گوشه‌یی دیگر از توانایی‌های این روش بدون شبکه را در حوزه‌ی مهندسی انتقال حرارت نشان دهند. می‌توان در مسائل پیچیده‌ی هندسی انتقال حرارت، که جواب دقیق ندارند، به روش DLSM اعتماد کرد. در واقع نکته‌ی مهم و نوآوری این مطالعه آن است که نشان دهد در مسائل انتقال حرارت، که جواب دقیق در دست نیست، می‌توان با استفاده از روش DLSM مسئله را حل کرد. سپس برآورد خطا به روش شرح داده‌شده انجام و از روی آن با اصلاح آرایش نقاط شبکه و حل مجدد به جواب دقیق به میزان دلخواه نزدیک شده. به عبارت دیگر، هدف اصلی بررسی و نمایش توانمندی بالای روش بدون شبکه‌ی کمینه‌ی مربعات گسسته در خطایابی درونی است. بنابراین پیشنهاد می‌شود که از برآوردکننده‌های خطای دیگر برای تخمین خطا در مسائل حرارت هدایتی و نیز از روش DLSM برای مسائل انتقال حرارت همرفتی (جابه‌جایی) و تشعشعی استفاده شود و دقت و کارایی روش مذکور مورد بررسی قرارگیرد. همچنین می‌توان در کارهای بعدی، براساس برآوردکننده‌ی خطای ارائه‌شده در این مطالعه، قابلیت تظریف تطبیقی را به روش DLSM برای حل مسائل انتقال حرارت افزود.

منابع (References)

1. Gingold, R.A. and Moraghan, J.J. “Smooth particle hydrodynamics: Theory and application to non-spherical stars”, *Man. Not. Roy. Astron. Soc.*, **181**, pp. 375-389 (1977).

2. Nayroles, B., Touzot. G. and Villon, P. “Generalizing the finite element method diffuse approximation and diffuse element”, *Coput. Mech.*, **10**(5), pp. 307-318 (1992).

3. Belytschko, T., Lu, Y.Y. and Gu, L. “Element-free Galerkin methods”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **37**(2), pp. 229-256 (1994).

4. Liu, W.K., Jun, S. and Zhang, Y. “Reproducing kernel particle methods”, *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, **20**(8-9), pp. 1081-1106 (1995).

5. Melenk, J.M. and Babuska, I. “The partition of unity finite element method: Basic theory and applications”, *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, **139**(1-4), pp. 289-314 (1999).

6. Duarte, A. and Oden, J.T. “HP clouds a meshless method to solve boundary value problems”, Technical Report 95-05, Texas Institute for Computational and

پانوشت‌ها

1. meshless
2. smooth particle hydrodynamic
3. diffuse element
4. element free Galerkin
5. reproducing kernel particle method (RKPM)
6. partition of unity finite element(PUFEM)
7. HP-clouds
8. meshless local petrov Galerkin
9. DLSM
10. error estimate
11. discrete element method
12. moving least square
13. Norm
14. heat conduction
15. yutward unit normal vector
16. moving least square(MLS)
17. moving least square
18. cubic spline
19. heat transfer
20. heat conduction
21. heat convection
22. net radiation
23. refinement

Applied Mathematics, University of Texas at Austin (1996).

7. Atluri, S.N., Kim, H.G. and Cho, J.Y. "A critical assessment of the truly meshless local Petrov-Galerkin (MLPG) and local boundary integral equation (LBIE) methods", *Comput. Mech.,* **24**(5), pp. 348-372 (1999).

8. Afshar, M.H. and Arzani, H. "Solving Poisson`s equations by the discrete least square meshless method", *WIT Transactions on Modelling and Simulation,* **42**, pp. 23-32 (2004).

9. Orkisz, J., *Meshless Finite Difference Method II. Adaptative Approach*, Idelsohn S., Oñate E., Dvorkin E. (Eds.), Computation Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain (1998).

10. Laouar, T. and Villon, P., *Adaptative Analysis for the Diffuse Element Method*, Idelhson S., Oñate E., Dvorkin E. (Eds.), Computational Mechanics, CIMNE, Barcelona, Spain (1998).

11. Duarte, C.A. and Oden, J.T., *An h-p Adaptive Method Using Clouds*, TICAM Report 96-97 (1996).

12. Liu, G.R. and Tu, Z.H. "An adaptive procedure based on background cells for meshless methods", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, **191**(17-18), pp. 1923-1943 (2002).

13. Gavete, L., Falcon, S. and Ruiz, A. "An error indicator for the element free Galerkin method", *Eur. J. Mech. A/Solids.,* **20**(2), pp. 327-341 (2000).

14. Arzani, H., Afshar, M.H. and Najmaiee, M. "Discrete least esquare meshless method for solving diffrential equations", *Engineering International Journal of Science and Industry of Iran University,* **18**(2), pp. 1-9 (2006).

15. Shepard , D. "A two-dimensional interpolation function for irregularly spaced data", In ACM National Conference, pp. 517-524 (1968).

16. Belytschko, T., Krongauz, Y., Organ, D., Fleming, M. and Krysl, P. "Meshless method: An overview and recent development", *Comput. Methods Appl.Mech. Engng.*, **139**(1-4), pp. 3-47 (1996).

17. Incropera, F., Dewett, D. and Posti, B., *Introduction to Heat Transfer*, Academic Books, P., 4th Edn., pp. 1-140 (2008).

18. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "The superconvergent path recovery and a posteriory error estimate, Part 1: The recovery technique", *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* **33**(7), pp. 1331-1364 (1995).

19. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "The superconvergent path recovery and a posteriory error estimate. Part 2: Error estimate and adaptivity", *Int. J.Numer. Meth. Eng.*, **33**(7), pp. 1365-1382 (1995).

20. Babuska, I. and Rheinboldt, W.C. "Error estimates for adaptive finite element computations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, **15**(4), pp. 736-754 (1978).

21. Zienkiewicz, O.C. and Zhu, J.Z. "A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis", *Int. J. Numer. Meth. Eng.,* **24**(2), pp. 337-357 (1987).

22. Stein, E. and Rust, W. "Mesh adaptions for linear 2D finite-element discretizations in structural mechnics, especially in thin shell analysys", *Journal of Computational and Applied Mathematics,* **36**(1), pp. 107-129 (1991).

23. Budak, B.M., Samarskii, A.A. and Tikhenev, A.H., *A Collection of Problems on Mathematical Physics*, Translated by ARM Robson, Pergamon Press, New York, pp. 331, 332 & 456 (1967).

24. Bradaran, G.H. and Mahmoodabadi, M.J. "Analysis of tow dimensional steady-state heat conduction problems by MLPG method", *Majlesi Journal of Mechanical Engineering,* **4**(4), pp.47-56 (Summer 2011).