

# مقایسه‌ی عملکرد الگوریتم‌های طیفی تخمین زاویه‌ی ورود و ارائه‌ی الگوریتمی با دقت بالا و حجم محاسباتی کم

سینا نادری شاهی (دانشجوی کارشناسی ارشد)

خسرو صادقی (استادیار)

محمد عمادی (دانشجوی دکتری)

دانشکده‌ی مهندسی برق، دانشگاه صنعتی شریف

در این نوشتار ابتدا الگوریتم‌های طیفی تخمین زاویه‌ی ورود - شامل روش‌های شکل دهنده‌ی پرتو<sup>۱</sup> و روش‌های مبتنی بر زیرفضا<sup>۲</sup> - ارائه شده است. بازدهی الگوریتم‌ها در شرایط گوناگون (نظیر حساسیت به SNR، تعداد المان‌ها، تعداد داده‌های ورودی و همبسته‌بودن منابع سیگنال) بررسی شده است. همچنین حجم محاسباتی الگوریتم‌های مختلف بررسی شده‌اند. به دنبال آن روشی برای بهبود دقت در جداسازی منابع نزدیک به هم پیشنهاد شده است که از حجم محاسباتی کمی نیز برخوردار است. شبیه‌سازی‌های انجام شده مزیت روش پیشنهادی را نشان می‌دهد.

s\_naderi@ee.sharif.edu  
ksadeghi@sharif.edu  
m.emadi@ee.sharif.edu

واژگان کلیدی: تخمین زاویه‌ی ورود، روش پرتو فضایی، پردازش آرایه‌یی.

## مقدمه

در دهه‌های اخیر پردازش آرایه‌یی سیگنال همواره مورد توجه بوده است. یکی از مهم‌ترین شاخه‌های پردازش آرایه‌یی، «تخمین زاویه‌ی ورود» سیگنال است که در سیستم‌های مخابراتی مانند رادارها، آنتن‌های هوشمند، سیستم‌های موبایل (CDMA) و... بیشتر کاربرد دارند. الگوریتم‌های تخمین زاویه‌ی ورود با استفاده از نمونه‌های دریافت شده از طریق آرایه‌ها موقعیت منابع سیگنال را مشخص می‌کنند. در آنتن‌های هوشمند یکی از اساسی‌ترین قسمت‌ها، تخمین‌گر زاویه است. در این سیستم‌ها ابتدا زاویه‌های منابع سیگنال مشخص شده و سپس با توجه به این زاویه‌ها شکل‌دهی به پرتو آنتن صورت می‌گیرد که هدف آن ایجاد پرتو اصلی در جهت منبع مطلوب و ایجاد صفر در جهت منابع نامطلوب است.

تاکنون الگوریتم‌های فراوانی برای تخمین زاویه‌ی هدف ارائه شده‌اند که هر کدام دارای مزایا و معایبی هستند. با توجه به این تنوع، لازم است مطالعاتی درخصوص مقایسه‌ی عملکرد این الگوریتم‌ها صورت بگیرد تا طراح با توجه به نیاز خود الگوریتم مناسب را انتخاب کند. تاکنون مقالات مختلفی درخصوص مقایسه‌ی الگوریتم‌ها ارائه شده‌اند<sup>۱-۵</sup>. در بیشتر این مقالات به منظور مقایسه‌ی الگوریتم‌های طیفی،

متحنی‌های توان برحسب زاویه‌ی ورود (طیف‌های توان) نمایش داده شده‌اند. نکته‌ی مهم این است که صرفاً با مقایسه‌ی الگوریتم‌ها از طریق طیف‌ها نمی‌توان به اطلاعات لازم در مورد دقت آنها دست‌یافت. در این نوشتار برای دست‌یابی به معیار دقیق‌تر مقایسه، الگوریتم‌های مختلف طیفی از طریق آرایه‌ی آماری بررسی شده‌اند. انحراف معیار هر

در این بخش مروری کوتاه بر الگوریتم‌های طیفی تخمین زاویه‌ی ورود خواهیم داشت. الگوریتم‌های تخمین زاویه به طور کلی به دو دسته‌ی طیفی<sup>۴</sup> و پارامتریک<sup>۵</sup> تقسیم می‌شوند. در روش‌های طیفی - که موضوع بحث این نوشتار است - تابع طیف برحسب پارامتر مورد نظر (در اینجا زاویه‌ی ورود) کشیده می‌شود. مکان‌های پیک در طیف همان مقادیر تخمین زده شده برای پارامتر مورد نظر (زاویه) است. از طرف دیگر، در روش‌های پارامتریک از روش جست‌وجوی هم‌زمان پارامترها برای تخمین کمیت مورد نظر استفاده می‌شود. روش‌های پارامتریک (مانند DML، SML، ESPRIT و...) معمولاً از دقت بیشتری در تخمین برخوردارند، ولی پیچیدگی و حجم محاسبات

بیشتری دارند.<sup>[۴]</sup> روش‌های طیفی خود بر دو دسته‌اند: روش‌های شکل‌دهندهی پرتو و روش‌های مبتنی بر زیرفضا.

### روش‌های شکل‌دهندهی پرتو

ایده‌ی اصلی این روش‌ها ایجاد پرتو توسط آرایه‌ها (المان‌ها) با استفاده از وزن‌دهی مناسب ( $\bar{w}$ ) و جاروب فضا به‌وسیله‌ی این پرتو است. در زمان جاروب پرتو، توان خروجی از آرایه‌ها اندازه‌گیری می‌شود. زاویه‌هایی که بیشترین توان خروجی را ایجاد می‌کنند نشان‌دهندهی زاویه‌ی منابع هستند. تفاوت روش‌های مختلف شکل‌دهندهی پرتو در نحوه‌ی انتخاب وزن‌دهی آرایه‌هاست.

نمودار ۱ نمای کلی یک آنتن آرایه‌یی را نشان می‌دهد  $x_i$  ها سیگنال القاء شده به المان‌ها، و  $w_i$  ها وزن اعمال شده به المان‌ها را نشان می‌دهند؛  $y$  نشان‌گر خروجی آرایه است. با تعریف بردارهای  $\bar{x}$  و  $\bar{w}$  ارتباط ورودی و خروجی آرایه عبارت خواهد بود از:

$$\bar{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_M]^T$$

$$\bar{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_M]^T$$

$$y = w_1 \cdot x_1 + w_2 \cdot x_2 + \dots + w_M \cdot x_M = \bar{w}^T \cdot \bar{x}$$

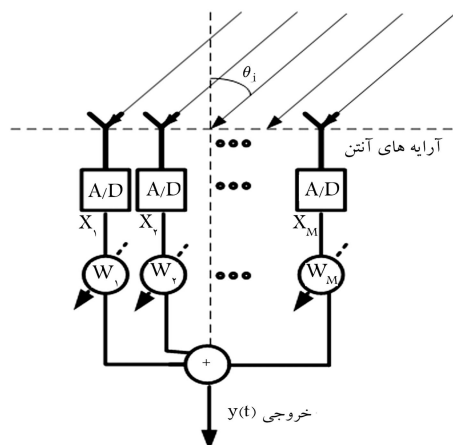
توان متوسط خروجی آرایه بعد از وزن‌دهی مطابق معادله ۱ محاسبه می‌شود:

$$P(\bar{w}) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N |y(t)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{w}^T \bar{x}(t) \bar{x}^H(t) \bar{w}^* = \bar{w}^T R_{xx} \bar{w}^* \quad (۱)$$

که در آن  $R_{xx}$  ماتریس کوواریانس (هم‌بستگی) آرایه‌ها است:

$$R_{xx} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{x}(t) \bar{x}^H(t) \quad (۲)$$

عناصر این ماتریس نشان‌گر هم‌بستگی بین المان‌های مختلف است. برای مثال،  $R_{ij}$  نشان‌گر هم‌بستگی بین المان‌های  $i$ ام و  $j$ ام و  $i=j$  است، و  $N$  تعداد نمونه‌های دریافتی از آرایه است. معروف‌ترین روش‌های شکل‌دهندهی پرتو عبارت‌اند از: بارتلت<sup>۶</sup>، کاپون<sup>۷</sup>، و روش پیش‌بینی خطی<sup>۸</sup> (LP) که در ادامه به تشریح آنها می‌پردازیم.



نمودار ۱. نمای کلی یک آنتن آرایه‌یی.

### الف) روش Bartlett

در این روش که به روش شکل‌دهندهی متعارف<sup>۹</sup> (CBF) نیز معروف است، ضرایب وزن‌دهی چنان انتخاب می‌شوند که توان دریافتی آنتن،  $P(\bar{w})$ ، از زاویه‌ی  $\theta$  بیشتر شود:

$$\bar{w}_B = \arg\{\max_{\bar{w}}\{P(\bar{w})\}\} \rightarrow \bar{w}_B = \bar{a}_\theta \quad (۳)$$

که در آن  $\bar{a}_\theta$  همان بردار پاسخ آرایه یا بردار نشان‌دهندهی جهت  $\theta$  است. بردار نشان‌دهندهی جهت  $\theta$  یک بردار مختلط است که حاوی پاسخ هر المان به سیگنال در جهت  $\theta$  است.<sup>[۶]</sup>

با استفاده از جایگذاری  $\bar{w}_B$  در فرمول توان (رابطه‌ی ۱)، تابع طیف توان بارتلت مطابق رابطه‌ی ۴ به دست می‌آید:

$$P_B(\theta) = \bar{a}_\theta^H R_{xx} \bar{a}_\theta \quad (۴)$$

محدودیت این روش، پایین بودن قدرت تفکیک در آن است. قدرت تفکیک در الگوریتم‌های تخمین زاویه‌ی ورود به‌صورت توانایی الگوریتم در تشخیص منابع نزدیک به هم تعریف می‌شود. این روش منابع نزدیک‌تر از پهنای پرتو آنتن را از هم تشخیص نمی‌دهد.<sup>[۲]</sup>

### ب) روش پیش‌بینی خطی (LP)

در این روش سعی می‌شود خروجی یک المان را با استفاده از ترکیب خطی خروجی باقی‌مانده تخمین زده و خطای ناشی از این تخمین (اختلاف مقدار واقعی با مقدار تخمین زده‌شده) را کمینه کنیم. با این شرایط به وزن‌هایی که خطا را کمینه می‌کنند دست خواهیم یافت.<sup>[۸]</sup> وزن‌ها و توان طیفی ارائه‌شده در این روش عبارت‌اند از:

$$\bar{w}_{LPj} = \frac{R^{-1} U_j}{U_j^H R_{xx}^{-1} \bar{a}_\theta} \quad (۵)$$

$$P_{LPj}(\theta) = \frac{U_j^H R_{xx}^{-1} U_j}{|U_j^H R_{xx}^{-1} \bar{a}_\theta|^2} \quad (۶)$$

$U_j$  برداری است که المان  $j$ ام آن معادل ۱ و بقیه المان‌ها برابر صفرند. موقعیت ۱ در بردار مشخص‌کنندهی المان انتخاب‌شده از بین المان‌های آرایه‌یی است که می‌خواهیم خروجی‌اش را تخمین بزنیم. روش مشخصی برای انتخاب موقعیت ۱ در بردار وجود ندارد، ولی انتخاب آن بر دقت و کارایی الگوریتم اثرگذار است.<sup>[۸]</sup>

### ج) روش کاپون

در این روش وزن‌ها به‌گونه‌یی انتخاب می‌شوند که توان خروجی المان را کمینه سازد؛ با این فرض که بهره آنتن در جهت پرتو اصلی آنتن مقدار ثابتی (مثلاً ۱) داشته باشد.<sup>[۶]</sup>

$$\begin{cases} \bar{w}^H \bar{a}_\theta = 1 \\ \min P(\bar{w}) \end{cases} \rightarrow \bar{w}_{Cap} = \frac{R_{xx}^{-1} \bar{a}_\theta}{\bar{a}_\theta^H R_{xx}^{-1} \bar{a}_\theta} \quad (۷)$$

وزن‌های به دست آمده از این روش در واقع یک فیلتر فضای تیز به وجود می‌آورد. با جایگذاری وزن بالا در فرمول توان (رابطه‌ی ۱)، توان طیفی حاصله عبارت خواهد بود از:

$$P_{Cap}(\theta) = \frac{1}{\bar{a}_\theta^H R_{xx}^{-1} \bar{a}_\theta} \quad (۸)$$

شده استفاده کرد:<sup>[۱]</sup>

$$P_{W-MU}(\theta) = \frac{1}{|\bar{a}_\theta^H \Pi^\perp W \Pi^\perp \bar{a}_\theta|}$$

$$\Pi^\perp = E_n E_n^H \quad (۱۲)$$

با انتخاب ماتریس  $W$ ، در شرایطی که MUSIC خوب جواب نمی‌دهد، می‌توان کارایی را بهبود بخشید. مثلاً با انتخاب  $W = U_1 U_1^H$  به تابع طیف ۱۳ می‌رسیم:

$$P_{MN}(\theta) = \frac{1}{|\bar{a}_\theta^H E_n E_n^H U_1|} \quad (۱۳)$$

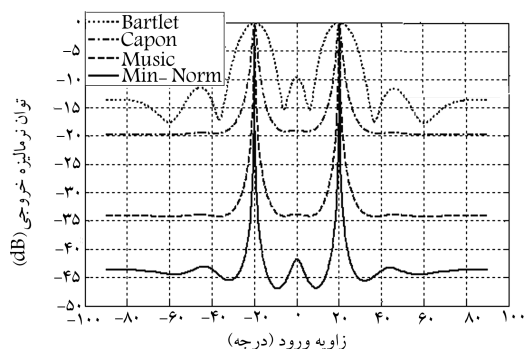
روش فوق که به مینیمم نرمالیزه (Min-Norm) معروف است، نسبت به روش MUSIC بایاس کمتری دارد، مخصوصاً هنگامی که از آرایه‌های خطی یکنواخت<sup>۱۶</sup> استفاده می‌کنیم.<sup>[۱۷]</sup>

### نتایج شبیه‌سازی و مقایسه‌ی الگوریتم‌ها

در این قسمت نتایج شبیه‌سازی الگوریتم‌های فوق در شرایط گوناگون ارائه شده است که در درک بهتر مزایا و معایب هر روش کمک شایانی می‌کند. شبیه‌سازی‌ها همگی در محیط MATLAB انجام شده‌اند و نتایج حاصل اجرای متعدد هر برنامه است، تا بدین ترتیب نشان‌گر آماری بازدهی هر الگوریتم باشد. به‌علت بازدهی پایین الگوریتم‌های PHD، از ارائه‌ی نتایج شبیه‌سازی این الگوریتم‌ها اجتناب می‌کنیم. در اینجا، المان‌ها را به‌صورت خطی یکنواخت و با فاصله‌ی نصف طول موج سیگنال‌ها قرار داده‌ایم.

نمودار ۲ طیف توان الگوریتم‌های طیفی بحث‌شده را برای دو منبع غیرهم‌بسته در شرایط  $\theta_{1,2} = \pm 20^\circ$  و  $SNR = 10 \text{ dB}$ ، و تعداد المان  $M = 8$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که روش‌های طیفی مبتنی بر زیرفضا (MUSIC, Min-Norm) پیک‌های تیزتری نسبت به روش‌های شکل‌دهنده‌ی پرتو (Bartlett, Capon) ایجاد کرده‌اند؛ و بنابراین از توانایی بیشتری در تفکیک منابع نزدیک به هم برخوردارند. نمودارهای ۳ تا ۵ نشان‌گر آثار پارامترهای مختلف بر الگوریتم‌ها هستند. معیار مقایسه‌ی الگوریتم‌ها انحراف از معیار تخمین آنها در شرایط مختلف است. در اینجا دو منبع غیرهم‌بسته در زوایای  $\theta_1 = 20^\circ$  و  $\theta_2 = -20^\circ$  قرار گرفته‌اند.

در نمودار ۳ حساسیت الگوریتم‌ها نسبت به هم‌بستگی منابع بررسی شده‌اند. نکته‌ی بسیار جالب عدم حساسیت الگوریتم‌های شکل‌دهنده‌ی پرتو، خصوصاً



نمودار ۲. طیف توان الگوریتم‌های مختلف طیفی  $\theta_1 = 20^\circ$ ،  $\theta_2 = -20^\circ$  و  $M=8$  و  $SNR=10 \text{ dB}$

قدرت تفکیک در روش کاپون نسبت به روش بارتلت و پیش‌بینی خطی (LP) بهبود یافته است و دقت بهتری خواهیم داشت.<sup>[۱]</sup>

### روش‌های مبتنی بر زیرفضا

اساس کار این روش‌ها، تقسیم ماتریس کوواریانس به دو زیرفضای نویز و زیرفضای سیگنال است. به‌دست آوردن زیرفضاها با استفاده از محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس کوواریانس صورت می‌گیرد. بردارهای ویژه‌ی متناظر با  $D$  عدد از بزرگترین مقادیر ویژه، زیرفضای سیگنال ( $E_s$ ) را تشکیل می‌دهند ( $D$  تعداد منابع سیگنال است). باقی بردارهای ویژه ( $M$  تا  $D$ ) زیرفضای نویز ( $E_n$ ) را تشکیل می‌دهند ( $M$  تعداد المان‌ها را مشخص می‌کند). در این روش‌ها ضروری است تعداد منابع ( $D$ ) از قبل معین باشد؛ همچنین باید تعداد منابع کم‌تر از تعداد المان‌ها باشد ( $D < M$ ).

### الف) روش تجزیه هارمونیک‌های پیمزانکو (PHD)

در این الگوریتم از کمینه‌کردن متوسط مربعات خطا در خروجی المان‌ها استفاده می‌شود، با این شرط که میانگین وزن‌های به‌دست آمده برابر ۱ باشد. برای تحقق این شرط، از بردار ویژه‌ی متناظر با کوچک‌ترین مقدار ویژه‌ی ماتریس کوواریانس برای به دست آوردن طیف توان ( $\bar{e}_1$ ) استفاده می‌شود.<sup>[۹]</sup> طیف توان در این روش چنین تعریف می‌شود:

$$P_{PHD}(\theta) = \frac{1}{|\bar{a}_\theta^H \cdot \bar{e}_1|^2} \quad (۹)$$

### ب) روش طبقه‌بندی چندگانه علائم (MUSIC)

روش MUSIC از شناخته‌شده‌ترین و محبوب‌ترین روش‌های تخمین زاویه‌ی ورود است و تخمینی بدون بایاس ارائه می‌دهد. در این روش MUSIC از این واقعیت که بردارهای ویژه‌ی متناظر با زیرفضای نویز همگی بر بردارهای نشان‌دهنده‌ی متناظر با زوایای منابع سیگنال<sup>۱۲</sup> عمودند استفاده می‌شود.<sup>[۶]</sup>

$$E_n \cdot \bar{a}_\theta = 0 \quad (۱۰)$$

$$\theta \in \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \dots, \theta_D\}$$

البته باید توجه داشت که شرط یادشده فقط در شرایط غیروابسته بودن منابع برقرار است. به‌همین دلیل، روش MUSIC در فضاهای با منابع وابسته به‌خوبی جواب نمی‌دهد و باید از روش‌های غیرهم‌بسته<sup>۱۳</sup> ماتریس کوواریانس در این‌گونه فضاها (مانند روش میانگین‌گیری مستقیم - معکوس<sup>۱۴</sup> و روش هموارسازی فضایی<sup>۱۵</sup>) استفاده کرد. MUSIC با استفاده از رابطه‌ی ۱۰ تابع طیف توان زیر را پیشنهاد می‌دهد:

$$P_{MU}(\theta) = \frac{1}{|\bar{a}_\theta^H E_n E_n^H \bar{a}_\theta|} \quad (۱۱)$$

### روش‌های مبتنی بر MUSIC

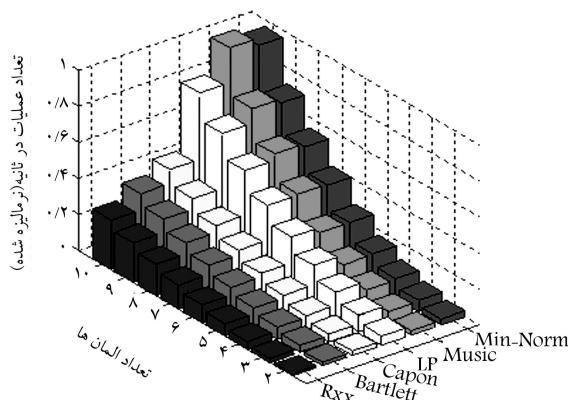
برای بهبود روش MUSIC در شرایطی که SNR پایین است، یا تعداد نمونه‌های دریافتی کم است و یا منابع هم‌بسته هستند می‌توان از روش MUSIC وزن‌دهی

کوواریانس واقعی نزدیک تر شده و دقت الگوریتم‌ها افزایش می‌یابد. همچنین افزایش تعداد نمونه‌ها را می‌توان به افزایش SNR بر روی هر المان تعبیر کرد که به افزایش دقت در الگوریتم‌ها می‌انجامد.

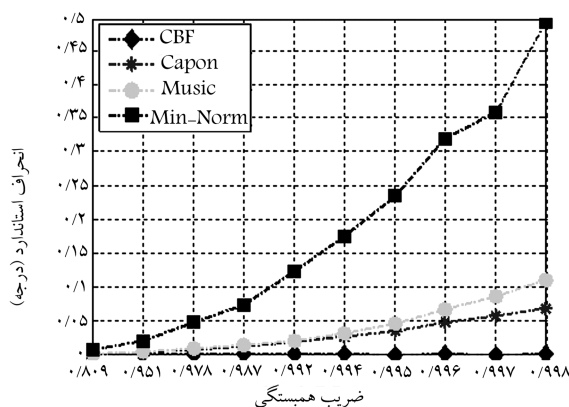
در نمودار ۵ حساسیت الگوریتم‌ها نسبت به تعداد المان‌ها بررسی شده است. با افزایش تعداد المان‌ها از عرض پرتو آرایه کاسته می‌شود، ولی دقت الگوریتم‌ها خصوصاً دقت روش‌های شکل دهنده‌ی پرتو که به عرض پرتو آنتن حساس‌اند، افزایش می‌یابد. در نمودار ۶ حجم عملیات لازم (FLOPS) برای محاسبه‌ی ماتریس کوواریانس ( $R_{xx}$ ) و طیف توان الگوریتم‌های مختلف با هم مقایسه شده‌اند. الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا (Min Norm و MUSIC)، به علت محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه از حجم محاسباتی بالایی برخوردارند. حجم محاسباتی تجزیه‌ی یک ماتریس  $M \times M$  به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه، حدوداً از درجه‌ی  $O(M^3)$  است. پس با افزایش تعداد المان‌ها حجم محاسباتی این الگوریتم‌ها به شدت افزایش می‌یابد. مثلاً اگر تعداد المان‌ها ۲ برابر شود، پیچیدگی محاسبات ۸ برابر خواهد شد. الگوریتم‌های کاپون و LP نیز به علت نیاز به محاسبه‌ی معکوس ماتریس کوواریانس، حجم محاسباتی نسبتاً بالایی دارند. از طرف دیگر، الگوریتم بارتلت نیازی به بردارهای ویژه یا معکوس ماتریس کوواریانس ندارد، و در نتیجه از حجم محاسباتی پایینی برخوردار است.

در نمودار ۷ حجم عملیات مورد نیاز برای محاسبه‌ی معکوس ماتریس و تجزیه‌ی ماتریس به مقادیر ویژه و بردارهای ویژه  $17$  با هم مقایسه شده‌اند. مشاهده می‌شود که با افزایش تعداد المان‌ها و در نتیجه افزایش ابعاد ماتریس کوواریانس، حجم محاسبات مقادیر ویژه و بردارهای ویژه برای ماتریس کوواریانس به شدت افزایش می‌یابد. در نتیجه، حجم محاسبات الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا نیز افزایش خواهد یافت.

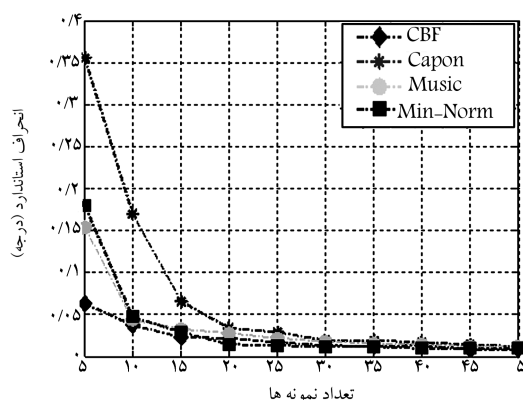
شبیه‌سازی‌های انجام شده با توجه به نتایج حاصله، نشان‌گر این نکته است که الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا توانایی بیشتری در تشخیص منابع نزدیک به هم دارند (قدرت تفکیک بالاتر). همچنین از بین روش‌های مبتنی بر زیرفضا، الگوریتم MUSIC کارایی بهتری نسبت به سایر روش‌ها دارد. باید توجه داشت دقت بالاتر در الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا موجب پیچیدگی و حجم محاسباتی بیشتر این الگوریتم‌ها نسبت به الگوریتم‌های شکل دهنده‌ی پرتو است. حجم محاسبات مخصوصاً در تعداد المان‌ها بالا، به علت محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه‌ی ماتریس کوواریانس بسیار بالا خواهد بود. از طرف دیگر الگوریتم‌های شکل دهنده‌ی پرتو از حجم محاسباتی کم‌تری برخوردارند و همچنین حساسیت کم‌تری نسبت به منابع هم‌بسته دارند. با توجه به این خصوصیات، در ادامه به ارائه‌ی الگوریتمی با حجم محاسباتی کم و دقت بالا می‌پردازیم.



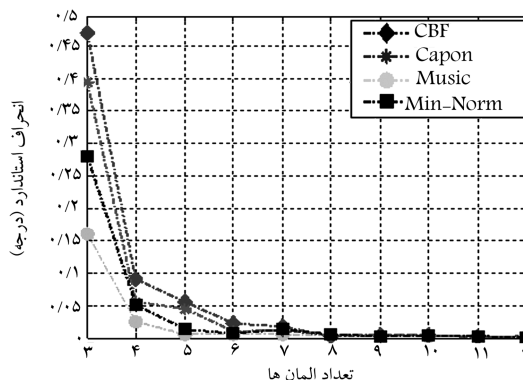
نمودار ۶. مقایسه حجم محاسبات الگوریتم‌های مختلف.



نمودار ۳. مقایسه‌ی الگوریتم‌های مختلف نسبت به هم‌بستگی منابع.



نمودار ۴. مقایسه الگوریتم‌های مختلف نسبت به تعداد نمونه‌ها.



نمودار ۵. مقایسه الگوریتم‌های مختلف نسبت به تعداد المان‌ها.

بارتلت، به هم‌بستگی منابع است. علت این امر آن است که هم‌بستگی منابع روی مقادیر ویژه‌ی ماتریس کوواریانس اثر گذاشته و تفکیک آن به زیرفضای نویز و سیگنال با خطا همراه خواهد بود. ولی در روش‌های شکل دهنده‌ی پرتو از آنجا که پرتو ایجاد شده ارتباطی با مقادیر ویژه ندارد، هم‌بستگی منابع تأثیری بر عملکرد این الگوریتم‌ها ندارد. در ادامه، از این خاصیت روش‌های شکل دهنده‌ی پرتو برای ارائه‌ی الگوریتمی مقاوم در برابر هم‌بستگی استفاده می‌کنیم.

در نمودار ۴ حساسیت الگوریتم‌ها نسبت به تعداد نمونه‌ها ( $N$  در فرمول ۲) بررسی شده‌اند. با افزایش تعداد نمونه‌ها تخمین ماتریس کوواریانس به ماتریس

خیلی سنگین باشد. برای کاهش حجم محاسباتی می‌توان با ایجاد پرتوهای ثابتی در فضا، از فضای المان‌ها به فضای پرتوها برویم و فضای جست‌وجو را از  $M$  بُعد (تعداد المان‌ها) به  $B$  بُعد (تعداد پرتوها) محدود کنیم.<sup>[۱۳]</sup> نمودار ۸ نشان‌دهنده ۹ پرتو ایجاد شده توسط ۱۲ المان خطی یکنواخت است که با فاصله‌های ثابت فضا را پوشش داده‌اند.

نمودار ۹ بلوک دیاگرام پردازشگر فضای پرتو را نشان می‌دهد. چنان‌که مشاهده می‌شود، پردازش‌گر در حوزه‌ی پرتو از یک طبقه‌ی اضافی برخوردار است که از طریق ایجاد پرتو در فضا، داده‌های دریافتی از المان‌ها را به فضایی با ابعاد کم‌تر می‌برد. سپس خروجی این طبقه به تخمین‌گر زاویه داده می‌شود و زاویه‌ها به دست می‌آیند. مشابه روش‌های مبتنی بر فضای المان که در آن ماتریس کوواریانس ( $R_{xx}$ ) را تعریف کردیم، در فضای پرتو هم می‌توانیم ماتریس کوواریانس ( $R_{yy}$ ) را مطابق رابطه‌ی ۱۴ تعریف کنیم:

$$R_{yy} = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \bar{y}(t) \bar{y}^H(t)$$

$$\bar{y}(t) = [y_1 \ y_2 \ \dots \ y_B]^T \quad (14)$$

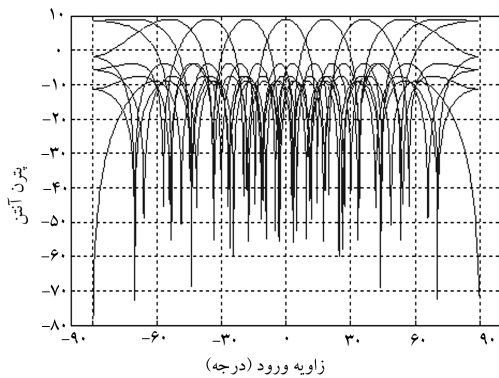
که در آن بردار  $\bar{y}(t)$  خروجی شکل‌دهنده‌های پرتو را نشان می‌دهد. این‌گونه به دست می‌آید:

$$\bar{y}(t) = W_{BF} \cdot \bar{x}(t) \quad (15)$$

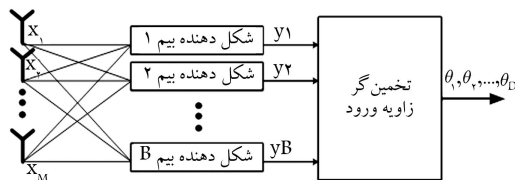
در این رابطه  $W_{BF}$  ماتریس تشکیل‌دهنده‌ی پرتوها است (حاوی  $B$  بردار تشکیل‌دهنده‌ی پرتو است). با جایگذاری رابطه‌ی ۱۵ در رابطه‌ی ۱۴ خواهیم داشت:

$$R_{yy} = W_{BF} R_{xx} W_{BF}^H \quad (16)$$

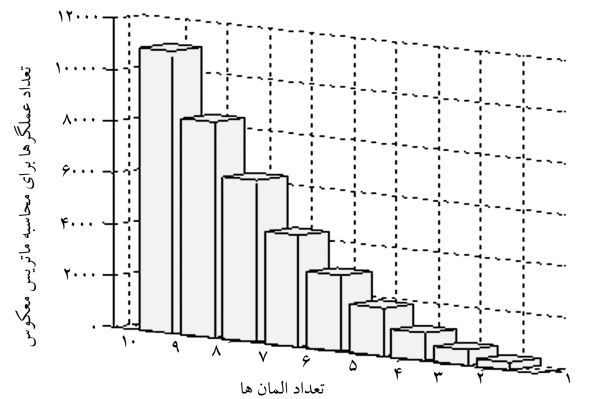
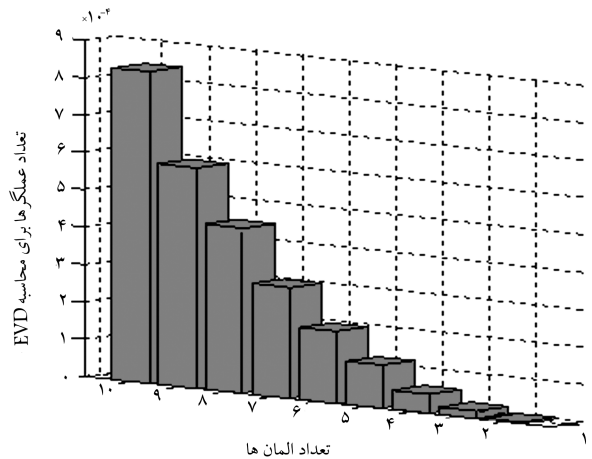
که در آن  $R_{yy}$  را می‌توان مانند  $R_{xx}$  به دو زیرفضای نویز و سیگنال تجزیه کرد و از روش‌های مبتنی بر زیرفضا نیز برای تخمین موقعیت منابع استفاده کرد. در این



نمودار ۸. پرتوهای ثابت ایجاد شده در فضا توسط المان‌های خطی یکنواخت  
( $B=9, M=12$ )



نمودار ۹. بلوک دیاگرام پردازشگر فضای پرتو.



نمودار ۷. مقایسه حجم محاسبات مقادیر و بردار ویژه و معکوس‌گیری ماتریس.

## ارائه‌ی الگوریتمی با دقت بالا و حجم محاسباتی کم

از مقایسه‌های انجام شده پیداست که الگوریتم‌های مبتنی بر زیرفضا، خصوصاً MUSIC، نسبت به الگوریتم‌های شکل‌دهنده‌ی پرتو از دقت و قدرت تفکیک بالاتری برخوردارند. اما در این الگوریتم‌ها، به علت محاسبه‌ی مقادیر ویژه و بردارهای ویژه ماتریس حجم محاسباتی بالا است. برای کم کردن حجم محاسبات هم‌زمان با برخوردار شدن از دقت مناسب، روش‌های مبتنی بر فضای پرتو<sup>[۱۸]</sup> ارائه شده‌اند که با ایجاد پرتوهای ثابت در فضا، ابعاد فضای جست‌وجوی الگوریتم‌ها را از  $M$  به  $B$  (تعداد پرتوها) کاهش می‌دهند. این کار به مثابه کاهش تعداد المان‌ها از  $M$  به  $B$  است. از آنجا که الگوریتم‌ها روی خروجی گرفته شده از  $B$  پرتو کار می‌کنند، حجم محاسباتی هم از  $O(M^3)$  به  $O(B^3)$  کاهش می‌یابد. در ادامه، ابتدا خلاصه‌ای از روش پرتو فضایی MUSIC ارائه می‌شود و سپس الگوریتم پیشنهادی و نتایج شبیه‌سازی آورده می‌شود.

## روش BEAMSPACE MUSIC

پیش‌تر روش MUSIC را مطرح، و مشاهده کردیم که الگوریتم MUSIC (و سایر روش‌های مطرح شده) مستقیماً روی داده‌های دریافتی از المان‌ها کار می‌کنند که اصطلاحاً به این روش‌ها، فضای المان<sup>[۱۹]</sup> می‌گویند. چنان‌که قبلاً اشاره شد پردازش در حوزه‌ی المان‌ها در آرایه‌های با تعداد المان بالا ممکن است از نظر حجم محاسباتی

حالت طیف توان BeamSpace-Music را می‌توان چنین نوشت: [۱۴]

$$P_{BS-MUSIC}(\theta) = \frac{1}{\left[ \left[ W_{BF} \bar{a}(\theta) \right]^H E_{BN} E_{BN}^H \left[ W_{BF} \bar{a}(\theta) \right] \right]} \quad (17)$$

که در آن  $E_{BN}$  زیرفضای نویز ماتریس  $R_{yy}$  است.

### الگوریتم پیشنهادی (Bartlett-MUSIC)

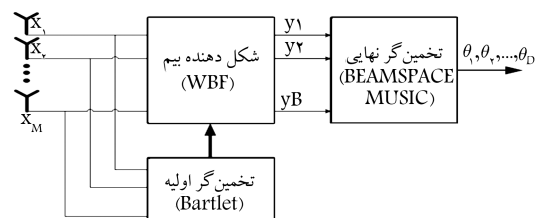
دیدیم که می‌توان با ایجاد پرتوهای در فضا، بعد جست‌وجو را از فضای المان به فضای پرتو برد و از حجم محاسبات کاست. حال اگر موقعیت تقریبی منابع را بدانیم، می‌توانیم با ایجاد پرتوهای فقط در آن نواحی علاوه بر کاهش حجم محاسبات، دقت تخمین را نیز بالا ببریم. با این کار در واقع SNR منابع را افزایش داده‌ایم و در نتیجه قدرت الگوریتم در تفکیک منابع نزدیک به هم زیاد خواهد شد. [۱۵] برای تخمین تقریبی اهداف می‌توانیم از الگوریتم‌های شکل‌دهنده پرتو که حجم محاسباتی کمی دارند (مانند الگوریتم بارلت) استفاده کنیم. استفاده از الگوریتم بارلت مزیت دیگری نیز دارد. همان‌طور که پیش‌تر بررسی شد، این الگوریتم در برابر هم‌بستگی منابع بسیار مقاوم است و می‌تواند تخمین بسیار خوبی از منابع هم‌بسته نیز ارائه دهد. نمودار ۱۰ بلوک دیاگرام پردازشگر پیشنهاد شده را نشان می‌دهد. ابتدا با استفاده از الگوریتم بارلت موقعیت تقریبی اهداف با دقت پایین (مثلاً ۱ درجه) تخمین زده می‌شود (حجم محاسباتی کم و مقاوم در برابر هم‌بستگی). سپس در نواحی تخمین زده شده پرتوهای ایجاد می‌شود که تنها پیک‌های طیف بارلت را پوشش می‌دهد. نیازی نیست پرتوها کل فضا را پوشش دهند، پس در اینجا تعداد پرتوهای لازم نیز کم‌تر خواهد بود ( $B$  کوچک‌تر است). در آخر نیز با استفاده از الگوریتم MUSIC موقعیت دقیق منابع مشخص خواهد شد. رسم طیف MUSIC برای کل فضا ضرورت نخواهد داشت، و فقط لازم است طیف را برای محدوده‌ی پیک‌های طیف بارلت رسم کنیم. همین امر، حجم محاسبات را باز هم کاهش خواهد داد. خلاصه‌ی مراحل الگوریتم چنین خواهد بود:

۱. تخمین حدودی منابع با استفاده از الگوریتم بارلت؛

۲. ایجاد پرتوهای نزدیک به هم در محدوده‌ی منابع؛

۳. به‌کار بردن الگوریتم MUSIC روی خروجی پرتوهای ساخته شده و تخمین دقیق موقعیت منابع. شبیه‌سازی‌های انجام شده دقت بالای الگوریتم فوق را نشان می‌دهد.

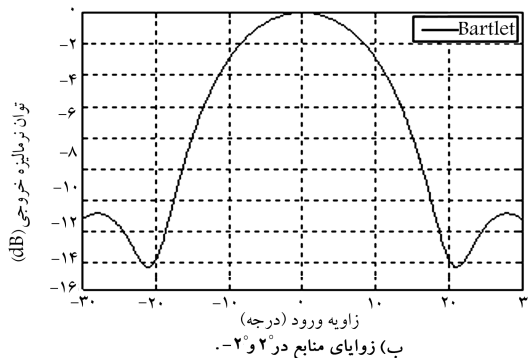
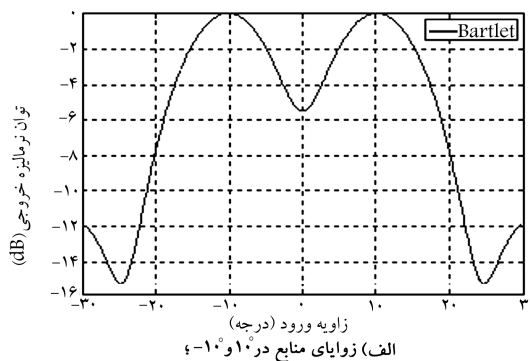
حجم محاسبات این الگوریتم از دو نظر کاهش یافته است: ۱. با کاهش بُعد جست‌وجو از  $M$  به  $B$ ؛ ۲. با جست‌وجو فقط در اطراف پیک‌های طیف توان بارلت (نیازی به جاروب کل فضا نداریم). شبیه‌سازی‌های انجام شده دقت بالای الگوریتم فوق را نشان می‌دهد.



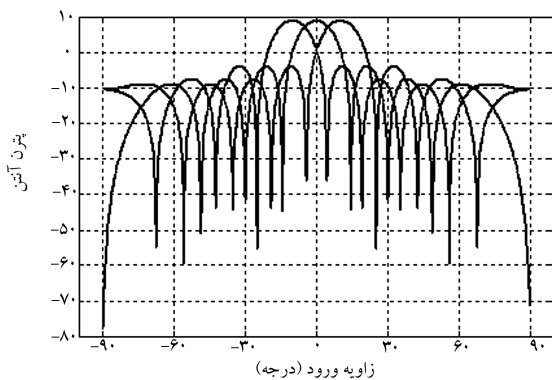
نمودار ۱۰. بلوک دیاگرام پردازشگر پیشنهاد شده.

### نتایج شبیه‌سازی الگوریتم پیشنهادی

برای ارائه‌ی نتایج شبیه‌سازی الگوریتم، یک آرایه خطی یکنواخت را در نظر می‌گیریم. تعداد المان‌ها  $10^\circ$ ، و فاصله‌ی المان‌ها برابر نصف طول موج سیگنال خواهد بود. دو منبع سیگنال ( $SNR = 10 dB$ ) را در نظر می‌گیریم. اگر فاصله‌ی منابع به اندازه‌ی کافی دور باشد (بیشتر از عرض پرتو آنتن) الگوریتم بارلت تخمین مناسبی از موقعیت منابع می‌دهد. در نمودار ۱۱ الف دو منبع در فاصله‌ی  $10^\circ = \theta_1$  و  $10^\circ = \theta_2$  قرار گرفته‌اند که با استفاده از طیف توان بارلت موقعیت آنها مشخص شده‌اند. ولی اگر فاصله‌ی منابع خیلی نزدیک شوند، بارلت قادر به تفکیک منابع از هم نخواهد بود. نمودار ۱۱ ب طیف توان بارلت برای دو منبع را در زاویه‌های  $2^\circ = \theta_1$  و  $2^\circ = \theta_2$  نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بارلت نتوانسته منابع را از هم تشخیص دهد، اما موقعیت تقریبی منابع ( $0^\circ$ ) را به ما نشان داده



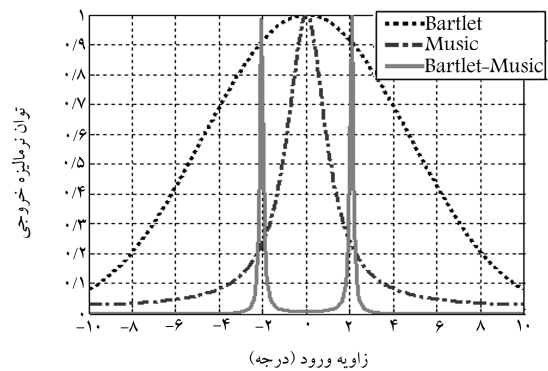
نمودار ۱۱. طیف توان الگوریتم Bartlett برای دو منبع.



نمودار ۱۲. سه پرتو ایجاد شده در  $5^\circ = \theta_1$ ,  $0^\circ = \theta_2$ ,  $-5^\circ = \theta_3$ .

نیست، در حالی که Bartlett-MUSIC منابع را به خوبی از هم تشخیص داده است.

دقت شود که برای تخمین DOA  $2^\circ$  (زاویه ورود) فقط لازم است نزدیک پیک طیف بارنلت ( $-5 < \theta < 5$ ) را جست‌وجو کنیم و نیازی به جست‌وجوی کل فضا نیست. همچنین به جای کار در حوزه‌ی المان و محاسبه‌ی مقادیر و بردارهای ویژه برای یک ماتریس  $10 \times 10$ ، محاسبات را در حوزه‌ی پرتو انجام داده‌ایم که فقط لازم است مقادیر و بردارهای ویژه برای یک ماتریس  $3 \times 3$  محاسبه شود ( $O(10^3) \rightarrow O(3^3)$ ). با توجه به نمودار ۷ می‌توان مشاهده کرد که این امر تأثیر بسیار زیادی بر کاهش حجم محاسبات دارد.



نمودار ۱۳. طیف‌های توان برای دو منبع  $\theta_1 = 2^\circ, \theta_2 = -2^\circ$ .

### نتیجه‌گیری

در این نوشتار الگوریتم‌های مختلف طیفی با هم مقایسه شدند. از نتایج شبیه‌سازی‌های برای ارائه‌ی الگوریتم پیشنهادی استفاده شد (قدرت تفکیک الگوریتم MUSIC، حجم محاسبات کم و عدم حساسیت به هم‌بستگی الگوریتم بارنلت و مزایای کار در حوزه پرتو). روش پیشنهادی علاوه بر حجم محاسباتی کم‌تر، دقت بیشتری در هم تفکیک منابع نزدیک به هم ارائه داد.

است. حال با ایجاد ۳ پرتو در نزدیکی  $(\theta_1 = 5^\circ, \theta_2 = -5^\circ, \theta_3 = 0^\circ)$  نمودار ۱۲ از بعد  $10^\circ$  المان به بعد ۳ پرتو می‌رویم. سپس خروجی این ۳ پرتو را به الگوریتم Beamspace MUSIC که در قسمت قبل معرفی شد می‌دهیم. نتایج حاصله در نمودار ۱۳ ارائه شده است. در این نمودار طیف توان MUSIC هم رسم شده است. مشاهده می‌شود که MUSIC نیز قادر به تفکیک منابع از هم

### پانویس

1. beamforming method
2. subspace based
3. snapshots
4. spectral
5. parametric
6. bartlett method
7. capon method
8. linear prediction (LP)
9. conventional beamformer (CBF)
11. multiple signal classification
12. steering vectors
13. decorrelation methods
14. Forward-Backward Averaging
15. spatial smoothing
16. uniform linear array
17. eigen value decomposition(EVD)
18. beamspace methods
19. element space
20. direction of arrival

### منابع

1. Godara, L.C. "Application of antenna arrays to mobile communications", Part II: Beam-Forming and Direction-of-Arrival Considerations, *Proceedings of the IEEE*, **85**, pp.1031-1060 (July 1997).
2. Krim, H. and Viberg, M. "Two decades of array signal processing research," *IEEE Signal Processing Magazine*, **13**, (4), pp.67-94 (JULY 1996).
3. Wojciech, J. and Krzysztof, M. "Comparison & examination the methods of direction-of-arrival

estimation" *Antenna Int. Symposium*, **4A**, pp.154-157 (2005).

4. Jianguo Huang and Jianfeng Chen, "Statistical performance comparison of high resolution doa estimation methods" *3rd International Conference on Signal Processing*, **1**, pp.505-508 (August 1996).
5. Ermolaev, V.T. and Gershman, A.B., Fast algorithm for minimum-norm direction-of-arrival estimation, *IEEE Trans. Signal Process* **42**, Issue 9, pp.2389-2394 (1994).
6. Godara, L. C. "Smart antennas," CRC Press. (2004), Chapter 6, pp.210-220 (2004).
7. Balanis C. A. and Ioannides P. I. "Introduction to smart antennas," Morgan & Claypool. (2007), Chapter 5, pp.340-383 (2007).
8. Johnson D. "The application of spectral estimation methods to bearing estimation problems," *Proceedings of the IEEE*, **70**, Issue 9, pp.1018-1028 (Sept. 1982).
9. Gross F. B. "Smart antennas for wireless communications," McGraw-Hill, chapter 12, pp.300-700 (2005).
10. Rias Muhamed, and Theodore S. Rappaport, "Comparison of conventional subspace-based DOA estimation algorithms with those employing property-restoration technique", *IEEE* **2**, pp.1004-1008 (1996).
11. Michael D. Zoltowski, Gregory M. Kautz, and Seth D. Silverstein, "Beamspace root-MUSIC", *IEEE Transactions on Signal Processing*. **41**(1) (JANUARY 1993).
12. Harry B. Lee, and Michael D. Zoltowski, "Resolution threshold of beamspace MUSIC for two closely spaced emitters", *IEEE Transactions On Acoustics Speech and Signal Processing* **38**(9), pp.300-400 (SEPTEMBER 1990).
13. Gregory M. Kautz, and Michael D. Zoltowski, "Performance analysis of MUSIC employing conjugate symmetric beamformers", *IEEE Transactions on Signal Process*, **43**, (3), pp.300-340 (March 1995).