Original Article

مهندسی عمران شریف، (پاییز ۱۳۹۴)
دوره‌ی ۲ - ۳۱، شماره‌ی ۳/۲، ص. ۳۲-۲۹

تحلیل انتشار صفحه‌یی ترک هیدرولیکی در سنگ شکننده‌ی نفوذناپذیر با درنظرگرفتن اثر اینرسی سیال

علی عسگری (دانشجوی دکتری)
علی‌اکبر گلشنی* (استادیار)
دانشکده‌ی مهندسی عمران و محیط زیست، دانشگاه تربیت مدرس

در این پژوهش، یک روش تحلیلی برای تعیین میزان انتشار، بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در محیط کشسان به‌طور مثال برای سنگ‌های شکننده در حالت کرنش صفحه‌یی ارائه شده است. سیال به صورت نیوتنی و غیر قابل تراکم با گرانروی ناچیز تحت نرخ ثابت در ترک تزریق می‌شود. در بیشتر مطالعات پیشین، اثر اینرسی در میزان رشد و بازشدگی ترک نادیده گرفته‌شده است. در این نوشته، روش تحلیلی اغتشاش هموتوپی[۱] برای درنظرگرفتن این اثر پیشنهاد شده است. در این حالت مقادیر سختی محیط نسبت به اینرسی و گرانروی سیال بیشتر است. این روش نه فقط کارایی درنظرگرفتن اثرات اینرسی، بلکه اثرات دیگری همچون سختی بالای محیط کشسان و گرانروی بالای سیال را نیز دارد. برای تأیید و اعتبارسنجی، این پژوهش با کارهای انجام‌شده‌ی پیشین مقایسه شده است.

واژگان کلیدی: شکست هیدرولیکی، سنگ‌های نفوذناپذیر شکننده، اینرسی، روش اغتشاش هموتوپی.

ali.asgari@modares.ac.ir
golshani@modares.ac.ir

۱. مقدمه

مکانیزم شکست ـ به‌عنوان ابزاری مهم ـ در دانش ژئوتکنیک برای تحلیل پدیده‌ی شکست در توده‌ی سنگ است. هر چند نتایج تئوری این مکانیزم در مقایسه با تئوری‌های کلاسیک شکست هیدرولیکی برای سنگ‌های ایده‌آل شکننده تا حدودی رضایت‌بخش هستند، اما همچنان اختلافات غیر قابل اغماضی وجود دارد. برای کاهش این اختلافات نیاز است که فرضیات مسئله را منطبق بر واقعیت مدل در نظر گرفت. هر چند این کار موجب پیچیده‌ترشدن روابط و تحلیل آن می‌شود.

بدون شک عبور سیال از ترک‌ها باعث افزایش شدت رشد ترک‌ها می‌شود. نادیده گرفتن اثرات اینرسی ممکن است باعث دست پایین‌گرفتن فرآیند گسترش ترک شود. امروزه در بسیاری ازکارهای مهندسی، بررسی رفتار هم‌بسته مربوط به پدیده‌ی شکست هیدرولیکی از قبیل موارد زیر حائز اهمیت است:

- پایه‌های سد، تونل‌های حمل و نقل شهری و انتقال انرژی؛
- ایجاد مخازن نگهداری زیرزمینی گاز در سنگ نمک؛
- تعیین تنش‌های برجا در عملیات سدسازی، احداث تونل‌های آب، راه و معدنی؛
- صنایع محیط زیست به منظور دفن مواد زائد و مضر زیست‌محیطی و دفن زباله‌های هسته‌یی.

در حل تحلیلی این پدیده، چه از لحاظ هندسه‌ی مدل و چه از لحاظ رفتار محیط، مسائل چالش‌برانگیزی به‌وجود می‌آید. بخشی از چالش‌ها از روش حل معادلات هم‌بسته‌ی انتگرالی جریان و تعادل و تغییرات شرایط مرزی با زمان[۲] در ناحیه‌ی انتگرالی است و بخشی دیگر را می‌توان ناشی از ساختار غیرخطی معادله‌ی حاکم بر جریان سیال در داخل شکستگی دانست.[۱]

گسترش ترک هیدرولیکی به‌صورت کرنش صفحه‌یی با فرض ناچیزبودن تأثیر گرانروی سیال، قبلاً در سال ۱۹۹۰ مورد بررسی قرارگرفته است، که در آن با فرض حاکم‌بودن نیروی اینرسی سیال در مقابل نیروی دراگ سیال، روش حل خودمتشابه[۳] برای رشد ترک گسترش یافته است.[۲]

برخی از پژوهشگران فرض کرده‌اند که اثرات اینرسی سیال در انتشار ترک و یا جریان سیال در ترک (حتی تحت شرایطی که گرانروی سیال خیلی ناچیز است) ناچیز است،[۳و۴] و جریان سیال را با استفاده از تئوری جریان مدل کرده‌اند.[۵]

هر چند برخی دیگر، اثرات اینرسی و گرانروی سیال را با استفاده از روش‌های حل اغتشاش[۴] و خودمتشابه در نظر گرفته‌اند، اما برای کاهش خطای تحلیل و هم‌گرایی مدل از روش استاندارد درکنار روش‌های اغتشاش و خودمتشابه استفاده کرده‌اند.[۶] همچنین در روش حل به روش اغتشاش همواره برای حل معادلات همبسته مدل شکست، نیاز به فرض کوچک‌بودن اثر گرانروی و یا اینرسی سیال است.

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۲/۲۲، اصلاحیه ۱۳۹۳/۱/۱۷، پذیرش ۱۳۹۳/۲/۱۵.

در این مطالعه با استفاده از روابط مقیاس کردن،[۶-۸] و به‌کارگیری روش اغتشاش هموتوپی، که در پژوهشی در سال ۱۹۹۹ پیشنهاد شده است،[۹] اثرات اینرسی سیال بدون فرض کوچک‌بودن مقادیر در نظر گرفته شده است.

۲. معرفی مسئله و فرضیات آن

در این پژوهش، حل تحلیلی انتشار ترک به‌طول $2l(t)$ در یک محیط سنگی (مطابق شکل ۱) با فرض کرنش صفحه‌یی بررسی شده است. ویژگی‌های مکانیکی سنگ با مدول یانگ E، ضریب پواسون υ و سختی یا چقرمگی K_{IC} مشخص شده است. یک سیال با گرانروی μ و نرخ جریان $Q(t)$ در وسط ترک تزریق شده است. فشار حفره‌یی $p_f(x,t)$ ترک ناشی از تزریق، تابعی از مکان x و زمان t است. از طرفی دیگر، محیط محدود به تنش برجای σ_0 است. مجهولات در این مسئله عبارت‌اند از:

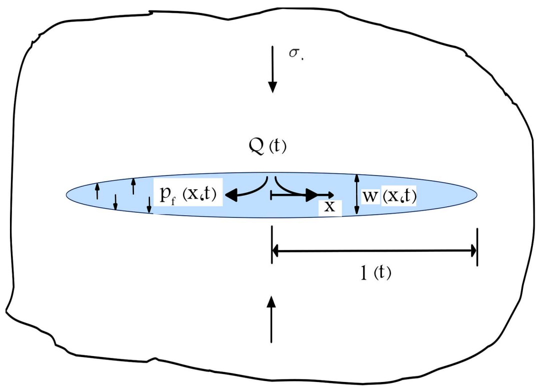
۱. میزان بازشدگی ترک که با $w(x,t)$ نمایش می‌دهند؛

۲. فشار خالص در ترک که برابر با $p = p_f(x,t) - \sigma_0$ است؛

۳. طول ترک $2l(t)$، که تابعی از زمان است.

فرضیات حل تحلیلی برای حل این مدل، به این صورت خلاصه شده است:

- تنش برجا به‌صورت عمود بر صفحه‌ی ترک به‌صورت یکنواخت فرض شده است؛
- شعاع چاه هیدرولیکی در مقابل طول ترک ناچیز فرض شده و در واقع تزریق سیال از یک نقطه‌ی متمرکز در وسط ترک انجام شده است؛
- سرعت انتشار ترک و نرخ بازشدگی خیلی کوچک هستند، بنابراین جریان آرام فرض شده و از قانون مکعبی جریان[۵] استفاده شده است؛
- ترک کاملاً از سیال پر شده است، بنابراین سیال در هر زمان به نوک ترک منطبق است. به‌عبارت دیگر، عقب افتادگی (Lag) سیال در نوک ترک وجود ندارد؛
- سیال غیرقابل تراکم فرض شده و هیچ‌گونه تغییر حالتی در سیال رخ نمی‌دهد؛
- محیط کشسان و نفوذناپذیر است؛
- گسترش ترک در چارچوب مکانیک شکست به‌صورت کشسان خطی (LEFM) بیان می‌شود و از آنجایی که ترک تحت نیروی کششی رشد پیدا می‌کند، بنابراین فقط مود شکست اول در نظر گرفته شده است.



شکل ۱. شماتیک مدل شکست هیدرولیکی با فرض کرنش صفحه‌یی.

این تذکر لازم است که می‌توان با کاهش فرض‌های مذکور، مسئله را به شکل واقعی‌تری مدل و تحلیل کرد. به‌طور مثال، اخیراً برخی از پژوهشگران با فرض نفوذپذیربودن محیط یا وجود عقب‌افتادگی سیال و همچنین با فرض غیرنیوتنی سیال، مسئله را مدل کرده‌اند.[۱،۷،۱۰و۱۱]

۳. فرمول‌بندی و معادلات حاکم

مطابق با فرض‌های مذکور، معادلات حاکم به‌صورت متقارن برای نصف طول ترک $0 \leq x \leq l$، به این صورت بیان می‌شود:

۱. معادله‌ی بقای جرم برای میزان سیال ورودی (رابطه‌ی ۱):

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_x^l w\,dx = wv,$$
$$\int_0^l w\,dx = \frac{1}{2}V(t),$$
$$V(t) = \int_0^l Q\,dt. \qquad (1)$$

که در آن، $v(x,t)$ سرعت متوسط سیال در جهت نرمال بر مسیر جریان است و $v(x=l,t)$ همان نرخ رشد طول ترک است.

۲. معادله‌ی بقای حرکت سیال (رابطه‌ی ۲):[۳و۵]

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2}\frac{\partial v^2}{\partial x} = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\mu' v}{w^2}\right) \qquad (2)$$

که در آن،ρ معرف جرم مخصوص سیال است.

۳. معادله‌ی انتگرالی ارتباط بین فشار خالص p و بازشدگی ترک w (رابطه‌ی ۳):[۱۲]

$$w(x,t) = \frac{4}{\pi E'}\int_0^l G\left(\frac{x}{l},\, \frac{x'}{l}\right)p(x',t)dx',$$
$$G\left(\xi,\, \xi'\right) = \ln\left|\frac{\sqrt{1-\xi^2}+\sqrt{1-\xi'^2}}{\sqrt{1-\xi^2}-\sqrt{1-\xi'^2}}\right|. \qquad (3)$$

که در آن، $\xi = \frac{x}{l(t)}$ محور بدون بُعد است.

۴. معیار شبه استاتیکی انتشار ترک (رابطه‌ی ۴):

$$w = \frac{K'}{E'}\sqrt{(l-x)} \qquad l - x << l.$$
$$E' = \frac{E}{1-\upsilon^2}, \qquad \mu' = 12\mu, \qquad K' = 4\sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)}K_{IC}. \qquad (4)$$

با مقیاس‌کردن معادلات ذکرشده که در منابع موجود[۱،۷،۱۰و۱۱] آمده است، می‌توان مسئله را برای حل تحلیلی آماده‌سازی کرد.

۴. مقیاس‌سازی[۶] معادلات حاکم

برای راحتی در حل معادلات حاکم، آن‌ها را با یک دسته از تغییر متغیرها، بدون بُعد

می‌کنند. این دسته از تغییر متغیرها به‌صورت روابط ۵ تعریف می‌شوند:

$$
\begin{aligned}
&w\left(x,t\right)=\varepsilon\left(t\right)L\left(t\right)\Omega\left(\xi,t\right),\\
&p\left(x,t\right)=\varepsilon\left(t\right)E'\,\Pi\left(\xi,t\right),\\
&l\left(t\right)=L\left(t\right)\gamma\left(t\right),\ \varepsilon\left(t\right)=L^{-2}\left(t\right)\ V\left(t\right),\\
&v\left(x,t\right)=t^{-1}L\left(t\right)\vartheta\left(\xi,t\right),\\
&\bar{\Omega}\left(\xi,t\right)=\Omega\left(\xi,t\right)/\gamma\left(t\right),\\
&\bar{\vartheta}\left(\xi,t\right)=\vartheta\left(\xi,t\right)/\gamma\left(t\right).
\end{aligned}
\tag{۵}
$$

که در آن، Ω، Π، γ و ϑ به ترتیب بازشدگی، فشار خالص، نصف طول ترک و سرعت سیال در حالت بدون بُعد هستند. همچنین $L(t)$ در آن مقیاس طول ترک است. با جای‌گذاری روابط ذکرشده در معادلات حاکم، به معادلات حاکم مقیاس‌شده و بدون بُعد به‌این صورت می‌رسیم:

معادله‌ی پیوستگی (بقای جرم) (رابطه‌ی ۶):

$$
\begin{aligned}
&\frac{t\dot{V}}{V}\int_{\xi}^{1}\bar{\Omega}d\xi+\frac{t\dot{L}}{L}\xi\,\bar{\Omega}+\Psi_T=\bar{\Omega}\bar{\vartheta},\\
&\int_{0}^{1}\bar{\Omega}d\xi=\frac{1}{2\gamma^{2}},
\end{aligned}
\tag{۶}
$$

معادله‌ی مومنتم سیال (رابطه‌ی ۷):

$$
-\frac{\partial\Pi}{\partial\xi}=G_\rho\gamma^{2}\bar{\vartheta}\left[\frac{t\dot{L}}{L}\left(1-\frac{\xi}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}\right)-1+\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}+\Phi_T\right]+G_m\frac{\bar{\vartheta}}{\bar{\Omega}^{2}},
\tag{۷}
$$

معادله‌ی انتگرالی و معیار کشسان شکست خطی (رابطه‌ی ۸):

$$
\begin{aligned}
&\bar{\Omega}\left(\xi,t\right)=L^{-1}\left\{\Pi\right\}\left(\xi,t\right)=\frac{4}{\pi}\int_{\xi}^{1}G\left(\xi,\xi'\right)\Pi\left(\xi',t\right)d\xi',\\
&\lim_{x\to\infty}\left(1-\xi\right)^{-0.5}\bar{\Omega}=G_k\gamma^{-0.5},\\
&\Psi_T=t\int_{\xi}^{1}\left[\dot{\bar{\Omega}}+\frac{\dot{\gamma}}{\gamma}\left(\bar{\Omega}-\xi\frac{\partial\bar{\Omega}}{\partial\xi}\right)\right]d\xi,\\
&\Phi_t=\frac{t\dot{\gamma}}{\gamma}\left(1-\frac{\xi}{\bar{\vartheta}}\frac{\partial\bar{\vartheta}}{\partial\xi}\right)+\frac{t\dot{\bar{\vartheta}}}{\bar{\vartheta}}.
\end{aligned}
\tag{۸}
$$

که در آن، Ψ_T و Φ_T به ترتیب بخش گذار یا ناپا در معادلات پیوستگی و مومنتم هستند. همچنین در آن G_k، G_m و G_ρ به‌عنوان سه گروه مقیاس‌شده به‌صورت رابطه‌ی ۹ تعریف می‌شوند، که به ترتیب اثرات کیفی نسبی سختی جامد، گرانروی سیال و اینرسی سیال را بیان می‌کنند:

$$
\begin{aligned}
&G_k=\frac{K'}{E'}\frac{L^{1.5}}{V},\\
&G_m=\frac{\mu'}{E'}\frac{L^{6}}{tV^{3}},\\
&G_\rho=\frac{\rho}{E'}\frac{L^{4}}{t^{2}V}.
\end{aligned}
\tag{۹}
$$

برای ثابت نگه‌داشتن طول مقیاس‌شده‌ی ترک L، به‌طور قراردادی می‌توان یک قید جبری به‌صورت $G_k^aG_m^bG_\rho^c=1$ به این گروه اعمال کرد. با فرض رابطه‌ی توانی بین سرعت تزریق و زمان ($V\sim t^\alpha$)، طول مقیاس‌شده‌ی ترک و فرم نهایی گروه بدون بُعد، که از قید مذکور نتیجه می‌شود، به‌صورت توانی از زمان خواهند بود. در نهایت، می‌توان اپراتور مشتق نسبت به زمان $t\partial(.)/\partial t$ را در معادلات ۶ الی ۸ به‌صورت رابطه‌ی ۱۰ جایگزین کرد:

$$
\begin{aligned}
t\frac{\partial}{\partial t}=&\left(\frac{t\,\dot{G}_k}{G_k}\right)G_k\frac{\partial}{\partial G_k}+\left(\frac{t\,\dot{G}_m}{G_m}\right)G_m\frac{\partial}{\partial G_m}\\
&+\left(\frac{t\dot{G}_\rho}{G_\rho}\right)G_\rho\frac{\partial}{\partial G_\rho}
\end{aligned}
\tag{۱۰}
$$

که در آن، ضرایب داخل پرانتز مقادیر ثابتی نسبت به زمان هستند.

۵. روش اغتشاش هموتوپی

در دهه‌های اخیر، روش‌های تحلیلی زیادی برای حل معادلات غیرخطی مشتقات جزئی و انتگرالی معرفی و در پدیده‌های فیزیکی و مهندسی مورد استفاده قرار گرفته‌اند.[۱۳-۱۵] برخی از این روش‌ها به دلیل محدودیت هم‌گرایی و مشکلات ارضاءکردن شرایط مرزی، در حل برخی از معادلات قابل کاربرد نیستند. در نتیجه روش HPM توسط هی،[۹و۱۴] پیشنهاد و توسعه یافته است. برای حل یک معادله‌ی غیرخطی از روش HPM به این صورت عمل می‌شود:[۱۴]

به‌طور کلی فرم یک معادله‌ی غیرخطی به‌صورت رابطه‌ی ۱۱ است:

$$
\begin{aligned}
&N\left[f(\xi,G_i)\right]=0,\quad i=k,m,\rho\\
&f(\xi,G_i)=\left\{\bar{\Omega}(\xi,G_i),\Pi(\xi,G_i),\bar{\vartheta}(\xi,G_i),\gamma(G_i)\right\}
\end{aligned}
\tag{۱۱}
$$

که در آن، N یک اپراتور غیرخطی و $f(\xi,G_{i=k,m,\rho})$ یک دسته توابع نامعلوم هستند. با به‌کارگیری روش اغتشاش هموتوپی، که توسط هی معرفی شده است، معادله به‌صورت رابطه‌ی ۱۲ تغییر می‌کند:

$$
H(f,p)=(1-p)L\left[f(\xi,G_i;p)-f_0(\xi,G_i)\right]+pN\left[f(\xi,G_i;p)\right]
\tag{۱۲}
$$

که در آن، $p\in[0,1]$ یک پارامتر فرضی، $f_0(\xi,G_i)$ و L به ترتیب حدس اولیه از $f(\xi,G_i)$، و اپراتور خطی کمکی هستند. بدیهی است که برای $p=0$ و $p=1$ روابط $f(\xi,G_i;0)=f_0(\xi,G_i)$ و $f(\xi,G_i;1)=f(\xi,G_i)$ برقرار است. بنابراین با افزایش مقدار p از ۰ تا ۱ حل $f(\xi,G_i;p)$ منجر به تعیین حدس اولیه‌ی $f_0(\xi,G_i)$ و $f(\xi,G_i)$ می‌شود. با بسط $f(\xi,G_i;p)$ بر حسب p رابطه‌ی ۱۳ را خواهیم داشت:

$$
f(\xi,G_i;p)=f_0(\xi,G_i)+\sum_{m=1}^{+\infty}f_m(\xi,G_i)p^m
\tag{۱۳}
$$

اگر اپراتور خطی و حدس تابع اولیه به‌طور کاملاً مناسبی انتخاب شوند، سری معادله‌ی ۱۳ در $p=1$ هم‌گرا می‌شود. در نتیجه رابطه‌ی ۱۴ را خواهیم داشت:

$$
f(\xi,G_i)=f_0(\xi,G_i)+\sum_{m=1}^{+\infty}f_m(\xi,G_i)
\tag{۱۴}
$$

که در آن، m مرتبه‌ی تقریب است. در همین راستا، برنامه‌یی تحت روش فوق در محیط Maple برای حل معادلات غیرخطی وابسته‌ی شکست هیدرولیکی نوشته شده است.

۶. معادلات هم‌بسته با حاکمیت سختی ($G_k = 1$) و گرانروی خیلی ناچیز ($G_m = 0$)

با ثابت درنظرگرفتن نرخ تزریق و ناچیز فرض‌کردن گرانروی سیال، معادلات هم‌بسته‌ی ۶ الی ۸ در مقیاس سختی به‌صورت رابطه‌ی ۱۵ به‌دست می‌آیند:

$$\int_{\xi}^{1} \bar{\Omega} d\xi + \frac{2}{3}\xi \bar{\Omega} + \Psi_T = \bar{\Omega}\bar{\vartheta},$$
$$\int_{0}^{1} \bar{\Omega} d\xi = \frac{1}{2\gamma^2},$$
$$-\frac{\partial \pi}{\partial \xi} = -\frac{1}{3} G_p \gamma^2 \bar{\vartheta} \left[1 + \frac{G_p}{\gamma\bar{\vartheta}} \frac{\partial \gamma\bar{\vartheta}}{\partial G_p} + \left(\left[2 - \frac{G_p}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial G_p}\right] \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} - 3\right) \frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi}\right],$$
$$\bar{\Omega}(\xi) = L^{-1}\{\Pi\}(\xi),$$
$$\lim_{\xi \to 1} (1-\xi)^{-0.5} \bar{\Omega} = \gamma^{-0.5},$$
$$\Psi_T = -\frac{1}{3} \int_{\xi}^{1} \left[G_\rho \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial G_\rho} + \frac{G_\rho}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial G_\rho} \left(\bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi}\right)\right] d\xi \qquad (15)$$

این تذکر لازم است که وقتی $G_k = 1$ در نظر گرفته شود، در نتیجه مطابق با معادله‌ی ۹، طول مقیاس‌شده به‌دست می‌آید. با در دست‌داشتن طول مقیاس‌شده، ضریب اینرسی معادل $G_\rho = \frac{\rho E'^{\frac{5}{3}} V^{\frac{5}{3}}}{K'^{\frac{8}{3}} t^2} \sim t^{-\frac{1}{3}}$ خواهد شد. همچنین معادله‌ی ۱۰، به‌صورت $t(\partial/\partial t) = (-1/3) G_\rho (\partial/\partial G_\rho)$ ساده می‌شود. به منظور حل معادلات هم‌بسته از روش اغتشاش هموتوپی، معادلات ۱۵ را در معادله‌ی ۱۲ جای‌گذاری می‌کنیم، که در آن‌صورت روابط ۱۶ به‌دست می‌آید:

$$H_1 = (1-p)\left[\int_{\xi}^{1} \left(\bar{\Omega} - \frac{1}{3} G_\rho \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial G_\rho}\right) d\xi + \frac{2}{3}\xi\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\bar{\vartheta}\right]$$
$$+ p\left[\int_{\xi}^{1} \bar{\Omega} d\xi + \frac{2}{3}\xi\bar{\Omega} - \bar{\Omega}\bar{\vartheta} - \frac{1}{3}\int_{\xi}^{1} \left[G_\rho \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial G_\rho} + \frac{G_\rho}{\gamma} \frac{\partial \gamma}{\partial G_\rho}\left(\bar{\Omega} - \xi \frac{\partial \bar{\Omega}}{\partial \xi}\right)\right] d\xi\right]$$
$$H_2 = (1-p)\left[2\gamma^2 \int_{0}^{1} \bar{\Omega} d\xi - 1\right] + p\left[2\gamma^2 \int_{0}^{1} \bar{\Omega} d\xi - 1\right],$$
$$H_3 = (1-p)\left[\frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right] + p\left[-\frac{1}{3} G_\rho \gamma^2 \bar{\vartheta} \times \left[1 + \frac{G_\rho}{\gamma\bar{\vartheta}} \frac{\partial \gamma\bar{\vartheta}}{\partial G_\rho} + \left(\left[2 - \frac{G_\rho}{\gamma}\frac{\partial \gamma}{\partial G_\rho}\right] \times \frac{\xi}{\bar{\vartheta}} - 3\right)\frac{\partial \bar{\vartheta}}{\partial \xi}\right] + \frac{\partial \Pi}{\partial \xi}\right],$$
$$H_4 = (1-p)\left[\bar{\Omega}(\xi) - L^{-1}\{\Pi\}(\xi)\right] + p\left[\bar{\Omega}(\xi) - L^{-1}\{\Pi\}(\xi)\right],$$
$$H_5 = (1-p)\left[\lim_{\xi \to 1}(1-\xi)^{-0.5}\bar{\Omega} - \gamma^{-0.5}\right] + p\left[\lim_{\xi \to 1}(1-\xi)^{-0.5}\bar{\Omega} - \gamma^{-0.5}\right]. \qquad (16)$$

با فرض $f_m(\xi, G_i) = G_i^m g_m$ و مطابق با معادله‌ی ۱۳، روابط ۱۷ را خواهیم داشت:

$$\bar{\Omega}(\xi, G_\rho; p) = \sum_{m=0}^{+\infty} G_\rho^m \bar{\Omega}_m p^m,$$
$$\Pi(\xi, G_\rho; p) = \sum_{m=0}^{+\infty} G_\rho^m \Pi_m p^m,$$
$$\vartheta(\xi, G_\rho; p) = \sum_{m=0}^{+\infty} G_\rho^m \vartheta_m p^m,$$
$$\gamma(G_\rho; p) = \sum_{m=0}^{+\infty} G_\rho^m \gamma_m p^m. \qquad (17)$$

با توجه به معادلات حاکم، γ فقط تابعی از G_ρ است. با جای‌گذاری معادلات ۱۷ در معادلات ۱۶ و مرتب کردن آن برحسب توان‌هایی از p، روابط ۱۸ و ۱۹ را خواهیم داشت:

$$p^0 : \; 2\int_{\xi}^{1} \bar{\Omega}_0 d\xi + 2\xi\bar{\Omega}_0 - 3\bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_0 = 0,$$
$$2\gamma_0^2 \int_{0}^{1} \bar{\Omega}_0 d\xi - 1 = 0, \qquad \frac{\partial \Pi_0}{\partial \xi} = 0,$$
$$\bar{\Omega}_0(\xi) = L^{-1}\{\Pi_0\}(\xi),$$
$$\lim_{\xi \to 1}(1-\xi)^{-0.5}\bar{\Omega}_0 = \gamma_0^{-0.5}. \qquad (18)$$

$$p^1 : \; 3\bar{\Omega}_1\bar{\vartheta}_0 - 2\int_{\xi}^{1} \bar{\Omega}_1 d\xi - 2\xi\bar{\Omega}_1 + 3\bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_1 = 0,$$
$$2\gamma_1 \int_{0}^{1} \bar{\Omega}_0 d\xi + \gamma_0 \int_{0}^{1} \bar{\Omega}_1 d\xi = 0,$$
$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \xi} = \frac{1}{3}\gamma_0^2 (2\xi - 3\bar{\vartheta}_0)\left(\frac{\partial \bar{\vartheta}_0}{\partial \xi}\right) + \frac{1}{3}\gamma_0^2 \bar{\vartheta}_0,$$
$$\bar{\Omega}_1(\xi) = L^{-1}\{\Pi_1\}(\xi), \qquad \gamma_1 = \lim_{\xi \to 1}\left(-\frac{2\bar{\Omega}_1\gamma_0}{\bar{\Omega}_0}\right). \qquad (19)$$

معادلات مربوط به توان دوم از p در پیوست ارائه شده است. دستگاه معادلات انتگرالی ذکرشده با استفاده از نرم‌افزار Maple به‌صورت هم‌بسته حل شده است (روابط ۲۰):

$$\bar{\Omega}_0 = \frac{1}{2}\pi^{\frac{1}{3}}\sqrt{1-\xi^2}, \qquad \Pi_0 = \frac{\pi^{\frac{1}{3}}}{8},$$
$$\bar{\vartheta}_0 = \frac{1}{6}\xi + \frac{1}{2}\frac{\cos^{-1}(\xi)}{\sqrt{1-\xi^2}}, \qquad \gamma_0 = \frac{2}{\pi^{\frac{2}{3}}}. \qquad (20)$$

به روابط ۲۰، حل بی‌اینرسی[7] گفته می‌شود. در صورتی که مقیاس سختی حاکم باشد، به بقیه‌ی ترم‌ها در صورت وجود اینرسی سیال، حل اصلاحی (با اینرسی) گفته می‌شود (رابطه‌ی ۲۱):

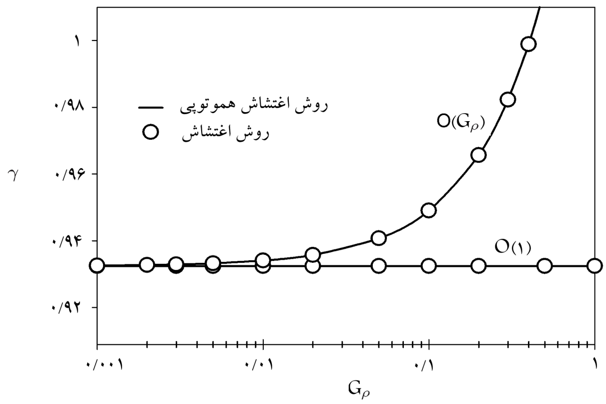
$$\Pi_1 = -\frac{2\ln(2)}{\pi^{4/3}} + \frac{5}{18}\frac{\xi^2}{\pi^{4/3}} + \frac{1}{6}\frac{1+2\xi^2}{\pi^{4/3}(\xi^2-1)} \times \arccos(\xi)^2 + \frac{\arccos(\xi)\,\xi}{\pi^{4/3}\sqrt{1-\xi^2}} + 0.195207,$$
$$\bar{\Omega}_1 = L^{-1}\{\Pi_1\}, \qquad \gamma_1 = 0.166199. \qquad (21)$$

این روابط مشابه فرمول‌های تعیین‌شده‌ی گاراگاش،[۱۶] هستند. تفاوت عمده‌ی آن در توابع ϑ_1 و $g_m = \{\bar{\Omega}_m, \Pi_m, \bar{\vartheta}_m, \gamma_m\}$ برای مقادیر $m \geq 2$ است، که در بخش بعدی به اختصار اشاره شده است. این تذکر لازم است که افزایش m، باعث پیچیدگی بسیار زیاد مسئله خواهد شد؛ که در این صورت لازم است یک روش عددی برای حل دستگاه معادلات به‌کارگرفته شود.

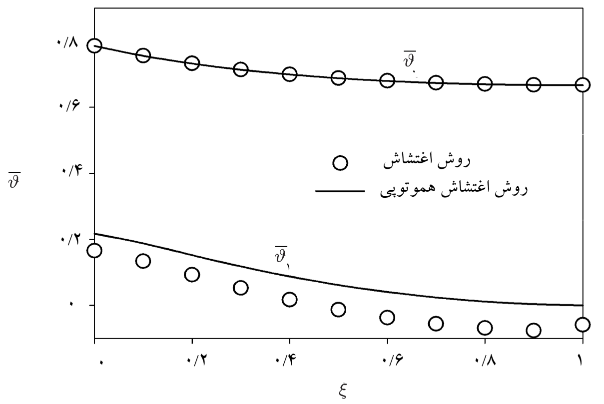
۷. بحث و نتایج

شکل‌های ۲ و ۳ مقایسه‌ی بین دو روش اغتشاش،[۱۶] و روش اغتشاش هموتوپی را نشان می‌دهد. همان‌طورکه در شکل ۲ مشاهده می‌شود، اختلافی بین طول نیم‌ترک محاسبه‌شده از دو روش برای حل بی‌اینرسی $O(1)$ و با اینرسی $O(G_\rho)$ وجود ندارد.

اختلافاتی در سرعت نرمال‌شده‌ی سیال از حل با اینرسی در شکل ۳ مشاهده می‌شود. این اختلاف ناشی از افزودن ترم $\frac{1}{3}\int_{\xi}^{1} G_\rho \partial\bar{\Omega}/\partial G\rho d\xi$ در رابطه‌ی H_1 است. این ترم باعث حل دقیق‌تری از تحلیل معادلات دیفراسیل ـ انتگرالی در روش اغتشاش هموتوپی می‌شود. مطابق با پیوست، ϑ_1 در $g_m = \{\bar{\Omega}_m, \Pi_m, \bar{\vartheta}_m, \gamma_m\}$ برای $O(G_\rho^2)$ یا $m \geq 2$ تأثیرگذار است. در نتیجه در این پژوهش، اصلاح برای ترم‌های با اینرسی صورت گرفته است.



شکل ۲. مقایسه‌ی طول نیم‌ترک از دو روش اغتشاش،[۱۶] و روش اغتشاش هموتوپی: $O(1)$ حل بی‌اینرسی و بی گرانروی، $O(G_\rho)$ حل با اینرسی مطابق با رابطه‌ی ۱۷ ($m = 1$).



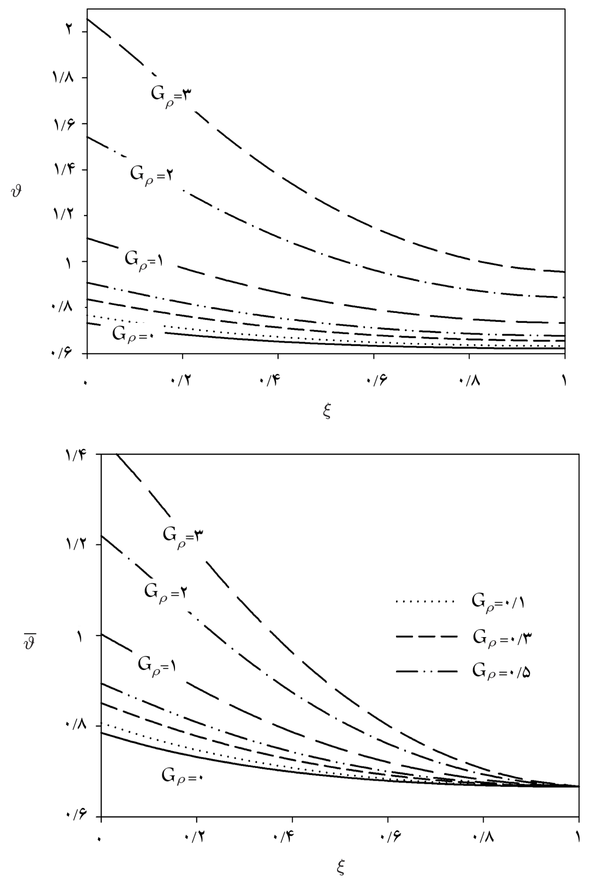
شکل ۳. مقایسه‌ی سرعت نرمال‌شده‌ی سیال در داخل ترک از دو روش اغتشاش،[۱۶] و روش اغتشاش هموتوپی از حل مرتبه‌ی صفر و یک.

شکل ۴، سرعت نرمال‌شده‌ی $\bar{\vartheta}$ و سرعت بی‌بُعد سیال $\vartheta = \gamma\bar{\vartheta}$ در داخل ترک را مطابق با رابطه‌ی ۱۷ ($m = 1$)، برای مقادیر مختلف G_ρ نشان می‌دهد. سرعت سیال با افزایش میزان جرم مخصوص سیال افزایش پیدا کرده است، که باعث افزایش سرعت رشد ترک شده است. با افزایش G_ρ، سرعت بی‌بُعد سیال در نوک ترک $\xi = 1$ مطابق با شکل ۴ افزایش یافته است، که ارتباط مستقیم با نرخ رشد ترک دارد (سرعت سیال در نوک ترک برابر با سرعت رشد ترک است).

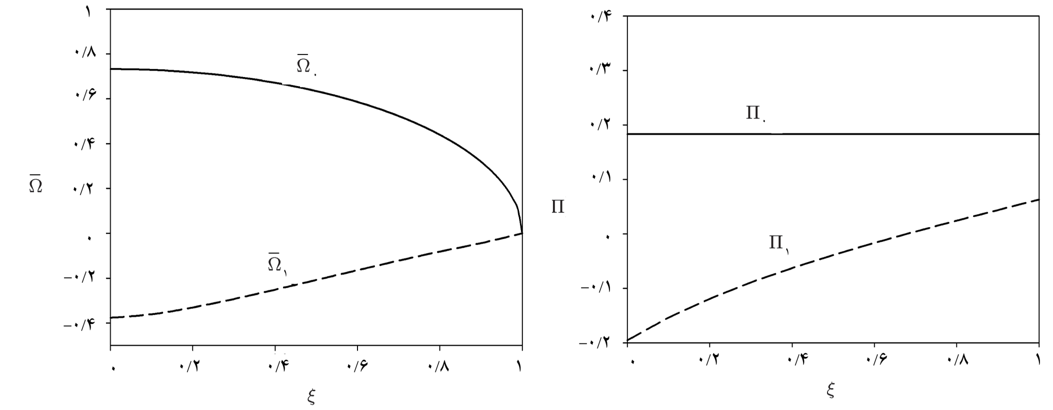
شکل ۵، میزان بازشدگی نرمال‌شده و فشار خالص سیال مقیاس‌شده‌ی ترک از حل مرتبه‌ی صفر و یک، G_ρ را نشان می‌دهد. میزان بازشدگی از حل مرتبه‌ی اول، مقادیر $\bar{\Omega}_0$ از تحلیل بی‌اینرسی را کاهش می‌دهد. به عبارتی دیگر، ترم اصلاحی اثر کاهنده‌یی در میزان بازشدگی ترک دارد.

شکل ۶، میزان بازشدگی ($\Omega = \gamma\bar{\Omega}$) و فشار خالص سیال ($\Pi$) مقیاس‌شده‌ی ترک از حل مرتبه‌ی صفر و یک، مطابق با رابطه‌ی ۱۷، $m = 1$، را برای مقادیر مختلفی از پارامتر اینرسی سیال $G_\rho = \{0, 0.1, 0.3, 0.5, 1.0\}$ نشان می‌دهد. با توجه به شکل مذکور، فشار خالص در جهت رشد ترک افزایش یافته است. این اثر مطابق با قاعده‌ی برنولی قابل توجیح است.[۲] به عبارت دیگر، سرعت بی‌بُعد سیال در جهت رشد ترک کاهش یافته است (مطابق شکل ۴)، که در نتیجه منجر به افزایش فشار خالص شده است.

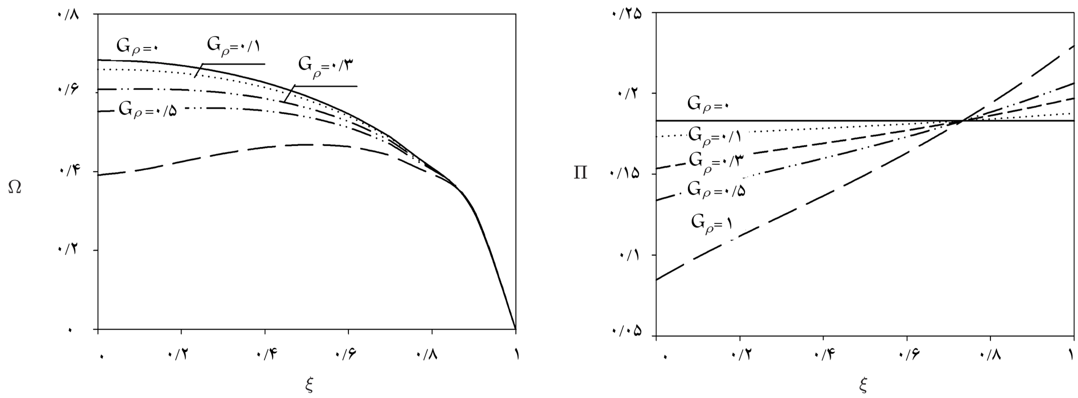
با توجه به اینکه با افزایش پارامتر اینرسی سیال، G_ρ اختلاف بین فشار خالص در نوک ترک و محل تزریق سیال زیاد و همچنین در مقادیر بالاتری از پارامتر اینرسی



شکل ۴. سرعت نرمال‌شده‌ی $\bar{\vartheta}$ و سرعت بدون بُعد سیال $\vartheta = \gamma\bar{\vartheta}$ در داخل ترک مطابق با رابطه‌ی ۱۷، ($m = 1$)، برای مقادیر مختلف G_ρ.



شکل ۵. میزان بازشدگی نرمال‌شده و فشار خالص سیال مقیاس‌شده‌ی ترک از حل مرتبه‌ی صفر و یک، G_ρ به ترتیب از چپ به راست.



شکل ۶. میزان بازشدگی، $\Omega = \gamma\bar{\Omega}$، و فشار خالص سیال، Π، مقیاس‌شده‌ی ترک از حل مرتبه‌ی صفر و یک مطابق با رابطه‌ی ۱۷، $m = ۱$، برای مقادیر مختلف G_ρ.

فشار خالص در محل تزریق منفی شده است؛ در نتیجه محل بازشدگی بیشینه تمایل به سمتی دارد که در آن فشار خالص بیشینه است و محل تزریق رو به بسته‌شدن پیش رفته است، که نهایتاً شکل بازشدگی در مقادیر بالاتری از G_ρ شبیه قطره‌ی اشک شده است. این یافته‌ها مشابه نتایج مرجع[۱۶] است.

۸. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، روش تحلیلی اغتشاش هموتوپی برای تعیین میزان انتشار، بازشدگی و فشار سیال داخلی ترک در سنگ‌های شکننده در حالت کرنش صفحه‌یی به‌کار گرفته شده است. اثر اینرسی در میزان رشد و بازشدگی ترک برای مقادیر مختلفی از G_ρ مورد بررسی قرار گرفته است. از این روش می‌توان برای درنظرگرفتن اثر گرانروی سیال ($G_m \neq ۰$) در میزان رشد و بازشدگی ترک نیز استفاده کرد و در نهایت اثر این دو را به‌طور هم‌زمان، مطابق با اصل جمع آثار قوا با فرض $G_k = ۱$ در نظر گرفت.

برای تأیید و اعتبارسنجی، نتایج این پژوهش با مرجع[۱۶] مقایسه شده است، که از لحاظ کمّی و کیفی مورد قبول است. به‌طورکلی، افزایش G_ρ باعث افزایش سرعت سیال و اختلاف فشار خالص می‌شود، که در نتیجه منجر به قطره‌یی‌شدن شکل ترک می‌شود.

همچنین با افزایش G_ρ، میزان بازشدگی کاهش و باعث سرعت بخشیدن به رشد ترک می‌شود، که باید در طراحی در نظر گرفته شود. نادیده‌گرفتن اثرات اینرسی ممکن است باعث دست‌پایین‌گرفتن فرآیند گسترش ترک شود.

تقدیر و تشکر

نویسندگان از توضیحات ارزنده‌ی پروفسور دمتری گاراگاش (Dmitry Garagash) از دانشگاه Dalhousie کانادا برای واضح‌ترشدن روند این پژوهش سپاسگزارند.

پانوشت‌ها

1. Homotopy perturbation method (HPM)
2. moving boundary
3. self similar solution (SS)
4. perturbation method (PM)
5. poiseuille equation
6. scaling
7. zero-inertia sloution

منابع (References)

1. Kovalyshen, Y., *Fluid-Driven Fracture in Poroelastic Medium*, University of Minnesota (2010).
2. Huang, N.C., Szewczyk, A.A. and Li, Y.C. "Self-similar solution in problems of hydraulic fracturing", *Journal of Applied Mechanics*, **57**(4), p. 877-881 (1990).
3. Nilson, R.H. "Gas-driven fracture propagation", *Journal of Applied Mechanics*, **48**(4), p. 757-762 (1981).
4. Spence, D.A. and Sharp, P.W. "Self-similar solutions for elastohydrodynamic cavity flow", *Proceedings of the Royal Society of London, A. Mathematical and Physical Sciences*, **400**(1819), pp. 313-319 (1985)
5. Batchelor, G., *An Introduction to Fluid Dynamics*, Cambridge Univ. Press, Bentley House, London (1967).
6. Garagash, D.I. and Detournay, E. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture: Small toughness solution", *Journal of Applied Mechanics*, **72**(6), pp. 916-9286 (2005).
7. Adachi, J.I. and Detournay, E. "Plane strain propagation of a hydraulic fracture in a permeable rock", *Engineering Fracture Mechanics*, **75**(16), pp. 4666-4694 (2008).
8. Detournay, E. "Propagation regimes of fluid-driven fractures in impermeable rocks", *International Journal of Geomechanics,* **4**, pp. 35-45 (2004).
9. He, J.-H. "Homotopy perturbation technique", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, **178**(3-4), pp. 257-262 (1999).
10. Garagash, D.I. "Propagation of a plane-strain hydraulic fracture with a fluid lag: Early-time solution", *International Journal of Solids and Structures*, **43**(18-19), pp. 5811-5835 (2006).
11. Adachi, J. and Detournay, E. "Self similar solution of a plane strain fracture driven by a power law fluid", *International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, **26**(6), pp. 579-604 (2002).
12. Sneddon, I.N., Lowengrub, M. and Mathematician, P., *Crack Problems in the Classical Theory of Elasticity*, Wiley, New York (1969).
13. Asgari, A., Bagheripour, M. and Mollazadeh, M. "A generalized analytical solution for a nonlinear infiltration equation using the exp-function method", *Scientia Iranica,* **18**(1), pp. 28-35 (2011).
14. He, J.H. "Homotopy perturbation method for solving boundary value problems", *Physics Letters A*, **350**(1-2), pp. 87-88 (2006).
15. Moghaddam, M.Y., Asgari, A. and Yazdani, H. "Exact travelling wave solutions for the generalized nonlinear Schrodinger (GNLS) equation with a source by Extended tanh-coth, sine-cosine and Exp-Function methods", *Appl. Math. Comput.,* **210**(2), pp. 422-435 (2009).
16. Garagash, D.I. "Plane-strain propagation of a fluid-driven fracture during injection and shut-in: Asymptotics of large toughness", *Engineering Fracture Mechanics,* **73**(4), pp. 456-481 (2006).

پیوست

$$p^2:\ \bar{\Omega}_0\bar{\vartheta}_2+\bar{\Omega}_2\bar{\vartheta}_0-\frac{2}{3}\xi\bar{\Omega}_1+\frac{\gamma_1}{3G_\rho\gamma_0}\int_\xi^1\left(\bar{\Omega}_0-\xi\frac{\partial\bar{\Omega}_0}{\partial\xi}\right)d\xi$$

$$+\bar{\Omega}_1\bar{\vartheta}_1-\frac{1}{3}\int_\xi^1\bar{\Omega}_2 d\xi=0,$$

$$\gamma_0^2\int_0^1\bar{\Omega}_2 d\xi+2\gamma_0\gamma_2\int_0^1\bar{\Omega}_0 d\xi+2\gamma_0\gamma_1\int_0^1\bar{\Omega}_1 d\xi$$

$$+\gamma_1^2\int_0^1\bar{\Omega}_1 d\xi=0,$$

$$\frac{\partial\Pi_2}{\partial\xi}=-\frac{1}{3}\gamma_0\left(-2\gamma_1\bar{\vartheta}_0-4\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_0}{\partial\xi}\right)\xi\gamma_1-2\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_0}{\partial\xi}\right)\xi\gamma_0\right.$$

$$+6\gamma_1\bar{\vartheta}_0\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_0}{\partial\xi}\right)+3\gamma_0\bar{\vartheta}_0\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_1}{\partial\xi}\right)-\gamma_0\bar{\vartheta}_1$$

$$\left.+3\gamma_0\bar{\vartheta}_1\left(\frac{\partial\bar{\vartheta}_0}{\partial\xi}\right)\right),$$

$$\bar{\Omega}_2(\xi)=L^{-1}\{\Pi_2\}(\xi),$$

$$\gamma_2=\lim_{\xi\to 1}\left(-\frac{2\bar{\Omega}_1\gamma_1}{\bar{\Omega}_0}-\frac{2\bar{\Omega}_2\gamma_0}{\bar{\Omega}_0}-\frac{\bar{\Omega}_1^2\gamma_2}{\bar{\Omega}_0^2}\right).$$