

تحلیل تیرها و قاب‌های یک و دو طبقه با طول دهانه برابر با استفاده از دنباله‌های بازگشتی

سید محمد رضا حاجی میرصادقی* (دانشجوی دکتری)

نادر فنائی (استادیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه صنعتی خواجه نصیرالدین طوسی

مهندسی عمران شریف، زمستان ۱۳۹۳ (۱۳۹۳)
دوری ۲ - ۳۱، شماره ۱/۴، ص. ۱۰۶-۹۷ (پادداشت فنی)

قرن‌هاست ریاضی‌دانان از دنباله‌های بازگشتی و توابع مولد آنها برای حل برخی از مسائل در ریاضیات استفاده می‌کنند، ولی استفاده از این بخش زیبای ریاضیات در تحلیل سازه‌ها مهجور مانده است. در این نوشتار، ابتدا برای یک تیر سراسری چنددهانه با طول برابر در حالت‌های انتها مفصل، انتها گیردار و انتها گیردار غلتکی، که تحت اثر لنگر خمشی متمرکز در ابتدای تیر قرار گرفته‌اند، ضابطه‌ی لنگر تکیه‌گاه‌ها به دست آمده و لنگر آن محاسبه شده است. سپس به منظور نشان دادن کاربرد روش ارائه شده، قاب‌های یک و دو طبقه با طول دهانه‌ی برابر در نظر گرفته شده و با صرف نظر کردن از سختی محوری ستون‌ها، از فنرهای پیچشی به جای ستون‌ها استفاده و مجدداً با استفاده از دنباله‌های بازگشتی لنگرهای محل اتصال تیر و ستون محاسبه شده است.

واژگان کلیدی: رابطه‌ی بازگشتی خطی، سختی دورانی، شرایط تکیه‌گاهی، ضریب انتقال لنگر.

nmohammad123@yahoo.com
fanaie@kntu.ac.ir

۱. مقدمه

در این نوشتار از دنباله‌های بازگشتی به منزله‌ی روشی نوآورانه در تحلیل سازه‌ها خاص با بارگذاری لنگر متمرکز بر روی تکیه‌گاه ابتدایی استفاده شده است. با توجه به جستجوی مؤلفان این نوشتار، روش مذکور برای اولین بار در تحلیل سازه‌ها استفاده شده است. در ادامه‌ی مقدمه به صورت مختصر به مبانی ریاضی دنباله‌های بازگشتی خطی پرداخته شده است. سپس در قسمت‌های بعدی به کمک این مبانی و استفاده از روابط موجود در تحلیل سازه‌ها به تحلیل تیرهای سراسری با دهانه‌ی برابر با شرایط تکیه‌گاهی انتهایی مختلف از قبیل: مفصلی، گیردار، و گیردار غلطکی و قاب‌های یک و دو طبقه با دهانه‌ی برابر پرداخته شده است. در نهایت، روابط ارائه شده برای در نظر گرفتن تغییرشکل‌های برشی اصلاح شده است. این تذکر لازم است که در تحلیل تیرهای سراسری با دهانه‌ی برابر در کنار روش دقیق به روش تقریبی با محاسبات ساده‌تر به صورت موازی با روش دقیق پرداخته شده است. در حالت کلی رابطه‌ی بازگشتی خطی به صورت معادله‌ی ۱ است:

$$c_{n+k} a_{n+k} + c_{n+k-1} a_{n+k-1} + \dots + c_n a_n = f_n \quad (1)$$

که در آن، $c_n \neq 0$ ، $c_{n+k} \neq 0$ ، c_i ها ضرایب رابطه هستند و به n بستگی ندارند و a_n ، a_m آمین جمله‌ی رابطه‌ی بازگشتی است. منظور از حل یک رابطه‌ی بازگشتی، پیدا کردن a_n به شکل فرمولی بر حسب n است. این تذکر لازم است که رابطه‌ی مذکور از درجه‌ی $(n+k) - n = k$ است. دنباله‌ی معروف فیبوناچی (رابطه‌ی

* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۲/۱۲/۴، پذیرش ۱۳۹۲/۱۲/۱۸.

(۲) و دنباله‌ی عددی لوکا (رابطه‌ی ۳) نیز جزء روابط بازگشتی خطی هستند: -- دنباله‌ی فیبوناچی:

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad n \geq 2$$

$$F_0 = 0; \quad F_1 = 1$$

دنباله: ۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, ...

(۲)

-- دنباله‌ی لوکا:

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \quad n \geq 3$$

$$a_1 = 1; \quad a_2 = 3$$

دنباله: ۱, ۳, ۴, ۷, ۱۱, ۱۸, ...

(۳)

در رابطه‌ی بازگشتی $a_n = Aa_{n-1} + Ba_{n-2}$ که در آن $n \geq 2$ و A و B دو عدد حقیقی ثابت در نظر گرفته شده‌اند، اگر a_1 و a_0 شرط‌های اولیه مفروض باشند، معادله‌ی $X^2 = AX + B$ ، معادله‌ی مشخصه نامیده می‌شود. در صورتی که r, s ریشه‌های آن باشند، برای هر $n \geq 0$ خواهیم داشت: [۱، ۲]

۱. اگر $r \neq s$ ثابت‌هایی چون c و d یافت می‌شوند، به صورتی که:

$$a_n = cr^n + ds^n$$

۲. اگر $r = s$ ثابت‌هایی چون c و d یافت می‌شوند، به صورتی که:

$$a_n = (c + dn)r^n$$

۲. تحلیل تیرهای سراسری با دهانه‌ی برابر، با استفاده از دنباله‌های بازگشتی

در این قسمت با استفاده از دنباله‌های بازگشتی لنگر تکیه‌گاه‌های مختلف برای یک تیر سراسری چنددهانه، که تحت اثر لنگر خمشی متمرکز در روی تکیه‌گاه اول خود قرار گرفته است، محاسبه شده است. برای این منظور ۲ حالت در نظر گرفته شده است.

الف) حالت انتها مفصل

مطابق شکل ۱، تیری با $K-1$ دهانه با طول دهانه‌های برابر در نظر گرفته شده است. هدف، محاسبه‌ی سهم لنگر هر تکیه‌گاه از لنگری است که روی تکیه‌گاه اول قرار داده شده است.

در علم تحلیل سازه نشان داده می‌شود که سختی خمشی یک تیر دو سر مفصل مطابق شکل ۲، ناشی از یک لنگر متمرکز در محل تکیه‌گاه آن برابر با $\frac{EI}{L}$ و همچنین تحت اثر لنگر متمرکز در تکیه‌گاه، چرخش گره دور نصف چرخش گره‌ی نزدیک است (رابطه‌ی ۴):^[۱]

$$\theta_A = \frac{ML}{3EI} \quad \theta_B = \frac{1}{3} \times \frac{ML}{3EI} \quad (4)$$

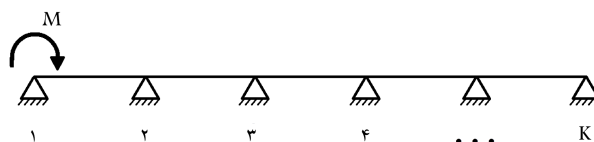
اینک معادله‌ی سازگاری در گره شماره‌ی $n+1$ که همان برابری چرخش در سمت چپ و راست گره مذکور است، بررسی می‌شود (رابطه‌ی ۵):

$$(\theta_{n+1})_L = (\theta_{n+1})_R \quad (5)$$

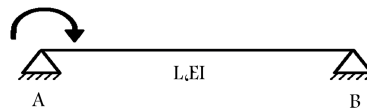
شکل ۳، تفکیک دهانه‌ی شماره‌ی n و دهانه‌ی شماره‌ی $n+1$ (مطابق رابطه‌ی ۶) از شکل ۲ را نمایش می‌دهد:

$$\frac{1}{3} \times \frac{M_n L}{3EI} - \frac{M_{n+1} L}{3EI} = \frac{M_{n+1} L}{3EI} - \frac{1}{3} \frac{M_{n+2} L}{3EI} \quad (6)$$

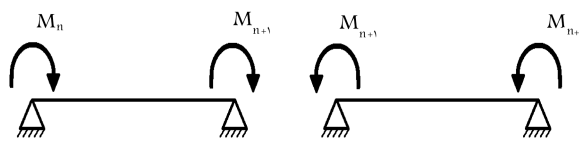
پس از ساده‌کردن رابطه‌ی ۶ و در نظر داشتن معادله مشخصه دنباله بازگشتی مذکور،



شکل ۱. تیر سراسری با انتهای مفصلی تحت اثر لنگر خمشی متمرکز.



شکل ۲. تیر دو سر مفصل تحت اثر لنگر خمشی متمرکز.



شکل ۳. دهانه‌های شماره‌ی n و $n+1$ و لنگرهای آنها.

روابط ۷ الی ۹ به دست می‌آیند:

$$M_n + M_{n+2} = 4M_{n+1} \Rightarrow M_n = 4M_{n+1} - M_{n+2} \quad (7)$$

$$X^2 = 4X - 1 \Rightarrow X = 2 \pm \sqrt{3} \quad (8)$$

$$|M_n| = a_0 X_1^n + a_1 X_2^n \quad (9)$$

دو شرط اولیه موجود است، یکی آنکه لنگر در تکیه‌گاه اول برابر است با M و دوم اینکه، لنگر در تکیه‌گاه انتهایی (تکیه‌گاه شماره‌ی K) برابر با صفر است.

$$\begin{cases} M_1 = a_0(2 + \sqrt{3}) + a_1(2 - \sqrt{3}) = M \\ M_K = a_0(2 + \sqrt{3})^K + a_1(2 - \sqrt{3})^K = 0 \end{cases} \quad (10)$$

در روابط مذکور، a_0 و a_1 مجهول هستند. با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول در رابطه‌ی ۱۰، مقادیر مجهول به صورت (روابط ۱۱) محاسبه می‌شوند:

$$a_0 = \frac{-\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K M}{\left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K\right]}$$

$$a_1 = \frac{M}{\left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K\right]} \quad (11)$$

نهایتاً لنگر تکیه‌گاه n م به صورت رابطه‌ی ۱۲ محاسبه می‌شود:

$$|M_n| = \frac{\left[-\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] M}{\left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K\right]} \quad (12)$$

باید توجه کرد که به دلیل تغییر تقعر در هر دهانه‌ی تیر، علامت لنگر به صورت متوالی عوض می‌شود. از این رو رابطه‌ی ۱۳ را خواهیم داشت:

$$M_n = (-1)^{n+1} \frac{\left[-\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n\right] M}{\left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3})\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K\right]} \quad (13)$$

نتایج به دست آمده برای یک تیر ۹ دهانه با استفاده از فرمول ۱۳ در جدول ۱ ارائه شده است. همچنین با در نظر گرفتن مقطع IPE ۲۴۰ برای این تیر ۹ دهانه با فرض طول دهانه‌ی ۱۰ متر، نتایج به دست آمده با استفاده از نرم‌افزار SAP ۲۰۰۰ در جدول ۲ نمایش داده شده است. خطاهای نسبی در محاسبه بین رابطه‌ی بازگشتی و نتایج نرم‌افزار نیز در جدول ۳ ارائه شده است.

$|M_n|$ در n ثابت برای K صعودی است. برای اثبات این موضوع، $\left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right]^K$ برابر با S در نظر گرفته شده و معادله‌ی ۱۲ به صورت رابطه‌ی ۱۴ بازنویسی می‌شود:

$$|M_n| = \frac{-S(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n}{(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})S} M \quad (14)$$

از این قضیه‌ی ریاضی برای اثبات استفاده می‌شود: اگر تابع F با تعریف $F(n) = a_n$ برای $x \geq 1$ یکنوا باشد، $(x$ یک متغیر حقیقی است)، آن‌گاه دنباله‌ی $\{a_n\}$ نیز یکنواست.

جدول ۱. لنگرهای تکیه‌گاهی یک تیر ۹ دهانه با انتهای مفصلی محاسبه شده توسط روابط بازگشتی.

M	M_1
$0,2679491923 M$	M_T
$-0,07179676902 M$	M_T
$0,01923788388 M$	M_T
$-0,154766309 \times 10^{-2} M$	M_D
$1,381181403 \times 10^{-3} M$	M_F
$-3,699593045 \times 10^{-4} M$	M_V
$9,865581453 \times 10^{-5} M$	M_A
$-2,466395363 \times 10^{-5} M$	M_9
0	M_{10}

جدول ۲. لنگرهای تکیه‌گاهی یک تیر ۹ دهانه با انتهای مفصلی محاسبه شده با نرم افزار SAP ۲۰۰۰.

M	M_1
$0,26606217 M$	M_T
$-0,07078908 M$	M_T
$0,01883429 M$	M_T
$-0,1501108 \times 10^{-2} M$	M_D
$1,33323 \times 10^{-3} M$	M_F
$-3,456 \times 10^{-4} M$	M_V
$9,391 \times 10^{-5} M$	M_A
$-2,233 \times 10^{-5} M$	M_9
0	M_{10}

جدول ۳. خطاهای نسبی محاسبه لنگرهای تکیه‌گاهی برای تیر ۹ دهانه با انتهای مفصلی.

M_1	M_2	M_3	M_4	M_5	M_6	M_7	M_8	M_9	M_{10}
0	$3,6\%$	0	$4,4\%$	0	$5,7\%$	6%	0	$2,14\%$	$2,86\%$

از این رو رابطه‌ی ۱۶ نتیجه گرفته می‌شود:

$$\frac{d|M_n|}{dk} = \frac{d|M_n|}{ds} \times \frac{ds}{dk} > 0 \quad (16)$$

در نتیجه برای افزایش سهم لنگر تکیه‌گاه شماره‌ی n باید تعداد کل تکیه‌گاه‌ها را افزایش داد. در حالتی که K به سمت بی‌نهایت برود، سهم لنگر تکیه‌گاه شماره‌ی n مطابق رابطه‌ی ۱۷ است:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} [M_n] = (2 - \sqrt{3})^{n-1} M \quad (17)$$

در نتیجه بیشینه‌ی لنگری که می‌تواند در تکیه‌گاه شماره‌ی n ایجاد شود، برابر است با $M(2 - \sqrt{3})^{n-1}$. کمینه‌ی مقدار لنگر زمانی اتفاق می‌افتد که $n = K$ باشد و در این حالت M_n برابر صفر می‌شود. حال اگر از مقدار کمینه‌ی صفر صرف‌نظر شود و از تکیه‌گاه شماره‌ی $K - 1$ برای به دست آوردن کمینه‌ی لنگر استفاده شود، روابط ۱۸ را خواهیم داشت:

$$|M_{K-1}| = \frac{\left[- \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right]^{n+1} (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right] M}{\left[(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3}) \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right]^{n+1} \right]}$$

$$(K = n + 1)$$

$$|M_{K-1}| = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^{n-1}}{1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right)^n} M \quad (18)$$

که در آن، K تعداد تکیه‌گاه و n شماره‌ی دهانه است.

اگر $\bar{K} = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}}{1 - \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right)^n}$ نامیده شود، آنگاه رابطه‌ی ۱۹ نتیجه گرفته می‌شود:

$$|M_{K-1}| = \bar{K}(2 - \sqrt{3})^{n-1} M \quad (19)$$

\bar{K} یک تابع نزولی است که مقدار کمینه‌ی آن برابر است با: $0,93 \approx \frac{2\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \approx 0,9282$. با توجه به توضیحات داده شده نتیجه می‌شود به جز حالتی که $n = K$ است، حدود لنگر تکیه‌گاه n به صورت روابط ۲۰ است:

$$\frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}}(2 - \sqrt{3})^{n-1} M < [M_n] < (2 - \sqrt{3})^{n-1} M$$

$$\bar{K}_1 = 1, \quad \bar{K}_2 = 0,9233, \quad \bar{K}_3 = 0,9285, \quad \bar{K}_4 = 0,9282$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{K} = \frac{2\sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} = 0,928203 \quad (20)$$

ب) حالت انتها گیردار

در این حالت تکیه‌گاه شماره‌ی K گیردار شده و معادلات به دست آمده بر این اساس به صورت رابطه‌ی ۲۱ بررسی شده است:

$$|M_n| = b_0 X_1^n + b_1 X_2^n \quad (21)$$

اینکه مقدار لنگر که در تکیه‌گاه اول برابر M است، به عنوان شرط اول همچنان برقرار است؛ ولی شرط دوم دیگر برقرار نیست و باید برای این حالت شرط ثانویه دیگری پیدا کرد. در تحلیل سازه، ضریب انتقال لنگر (نسبت لنگر انتقال یافته به لنگر اعمال شده با رعایت جهت: C.O.F.)^[۱]، در تیر شکل ۴ برابر با $\frac{1}{3}$ است. با توجه

$$\frac{d|M_n|}{dS} = \frac{-(2 + \sqrt{3})^n(2 - \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3})^n(2 + \sqrt{3})}{\left((2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})S \right)^2} M$$

$$= \frac{\left((2 - \sqrt{3})^{n-1} - (2 + \sqrt{3})^{n-1} \right)}{\left((2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3})S \right)^2} M < 0$$

$$\frac{dS}{dk} = \ln \left[\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right] \times \left[\frac{2 - \sqrt{3}}{2 + \sqrt{3}} \right]^K < 0 \quad (15)$$

\bar{K} تابعی صعودی است که حد بالای آن ۲ و مقدار کمینه‌ی آن برابر ۱ است:

$$\begin{aligned} \bar{K}_1 &= 1, \quad \bar{K}_2 = 1,866, \quad \bar{K}_3 = 1,9897 \\ (2 - \sqrt{3})^{n-1} M &< |M_n| < \bar{K}(2 - \sqrt{3})^{n-1} M \\ (2 - \sqrt{3})^{n-1} M &< |M_n| < 2(2 - \sqrt{3})^{n-1} M \end{aligned} \quad (29)$$

روابط به دست آمده برای حالت انتها مفصل و انتها گیردار را می‌توان به صورت دیگر و با نحوی ساده‌تر بیان کرد. در ادامه نشان داده شده است که در تیرهای سراسری با تعداد دهانه‌ی زیاد، تأثیر شرایط تکیه‌گاهی انتهایی فقط در نزدیکی همان تکیه‌گاه‌هاست. در این قسمت، مقادیر لنگرهای تکیه‌گاهی در نزدیکی تکیه‌گاه انتهایی به شکل دیگری بررسی شده است: -- حالت انتها مفصل (رابطه‌ی ۳۰):

$$|M_n| = \frac{\left[- \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right]^K (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n \right] M}{\left[(2 - \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3}) \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right]^K \right]} \quad (30)$$

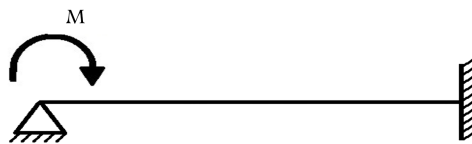
اگر به جای n مقدار $K - Z$ قرار داده شود (که در آن Z شماره‌ی تکیه‌گاه از انتهاست)، روابط ۳۱ نتیجه گرفته خواهد شد:

$$\begin{aligned} |M_n| &= \frac{\left(- \frac{(2-\sqrt{3})^K}{(2+\sqrt{3})^Z} + \frac{(2-\sqrt{3})^K}{(2-\sqrt{3})^Z} \right) M}{(2 - \sqrt{3})(1 - \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right]^{K-1})} \\ &= \frac{\left((2 - \sqrt{3})^{(K-1)}(2 + \sqrt{3})^Z - (2 - \sqrt{3})^Z \right) M}{\frac{(2+\sqrt{3})^{K-1} - (2-\sqrt{3})^{K-1}}{(2+\sqrt{3})^{K-1}}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})^Z - (2 - \sqrt{3})^Z}{(2 + \sqrt{3})^{K-1} - (2 - \sqrt{3})^{K-1}} M \end{aligned} \quad (31)$$

حال اگر $|M_n|$ را بر $(2 - \sqrt{3})^{n-1} M$ تقسیم کنیم، روابط ۳۲ نتیجه گرفته می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{|M_n|}{(2 - \sqrt{3})^{n-1} M} &= \frac{\frac{(2+\sqrt{3})^Z - (2-\sqrt{3})^Z}{(2+\sqrt{3})^{K-1} - (2-\sqrt{3})^{K-1}}}{(2 - \sqrt{3})^{K-Z-1}} \\ &= \frac{(2 + \sqrt{3})^Z - (2 - \sqrt{3})^Z}{(2 + \sqrt{3})^{K-1} - (2 - \sqrt{3})^{K-1}} \frac{(2 - \sqrt{3})^Z}{(2 - \sqrt{3})^{K-1}} \\ &= \frac{1 - (2 - \sqrt{3})^{2Z}}{1 - (2 - \sqrt{3})^{2(K-1)}} = 1 - (2 - \sqrt{3})^{2Z} \end{aligned} \quad (32)$$

$$= \begin{cases} (Z = 0) & \circ \text{ (انتها مفصلی)} \\ (Z = 1) & \circ, 2820 \cong 0,93 \\ (Z = 2) & \circ, 99484 \cong 0,995 \\ (Z = 3) & \circ, 99962 \cong 1 \\ (Z = 4) & \circ, 999973 \cong 1 \\ (Z = K - 1) & 1 \end{cases} \quad (32)$$



شکل ۴. تیر یک سر مفصل یک سر گیردار.

به توضیحات ارائه شده، شرط ثانویه‌ی ۲۲ به دست می‌آید:

$$\begin{cases} M_1 = b_0(2 + \sqrt{3}) + b_1(2 - \sqrt{3}) = M \\ \frac{M_K}{M_{K-1}} = \frac{b_0 \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right)^K + b_1 \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right)^K}{b_0 \left(\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right)^{K-1} + b_1 \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right)^{K-1}} = \frac{1}{r} \end{cases} \quad (22)$$

در روابط مذکور فقط مقادیر b_0 و b_1 مجهول است. با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول در رابطه‌ی ۲۲، مقادیر مجهول به این صورت محاسبه می‌شود (روابط ۲۳):

$$\begin{aligned} b_0 &= \frac{M}{(2 + \sqrt{3}) + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2 - \sqrt{3})} \\ b_1 &= \frac{\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K M}{(2 + \sqrt{3}) + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2 - \sqrt{3})} \end{aligned} \quad (23)$$

در نتیجه مقدار لنگر تکیه‌گاه n م به صورت رابطه‌ی ۲۴ به دست می‌آید:

$$|M_n| = \frac{\left[(2 + \sqrt{3})^n + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2 - \sqrt{3})^n \right] M}{(2 + \sqrt{3}) + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2 - \sqrt{3})} \quad (24)$$

باید توجه کرد که به دلیل عوض شدن جهت تععر در دهانه‌های مجاور، علامت لنگر به صورت متوالی عوض می‌شود. از این رو M_n مطابق رابطه‌ی ۲۵ خواهد بود:

$$M_n = (-1)^{n+1} \frac{\left[(2 + \sqrt{3})^n + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2 - \sqrt{3})^n \right] M}{(2 + \sqrt{3}) + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2 - \sqrt{3})} \quad (25)$$

با روشی مشابه اثبات ذکر شده می‌توان ثابت کرد که برخلاف حالت الف برای n ثابت، M_n با افزایش K نزولی است و در نتیجه کمینه‌ی لنگری که به تکیه‌گاه شماره‌ی n م می‌رسد، مربوط به حالتی است که K به سمت بی‌نهایت برود (رابطه‌ی ۲۶):

$$\lim_{K \rightarrow \infty} |M_n| = (2 - \sqrt{3})^{n-1} M \quad (26)$$

بیشینه‌ی لنگر $|M_n|$ هنگامی اتفاق می‌افتد که $n = K$ باشد (رابطه‌ی ۲۷):

$$\begin{aligned} |M_{n=K}| &= \frac{2(2 + \sqrt{3})^n}{(2 + \sqrt{3}) + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^n (2 - \sqrt{3})} M \\ &= \frac{2(2 + \sqrt{3})^{n-1}}{\left(1 + \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^{n-1} \right)} M = \frac{2(2 - \sqrt{3})^{n-1}}{\left(1 + \left[\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} \right]^{n-1} \right)} M \end{aligned} \quad (27)$$

اگر \bar{K} نامیده شود، رابطه‌ی ۲۸ نتیجه گرفته خواهد شد:

$$|M_{n=K}| = \bar{K}(2 - \sqrt{3})^{n-1} M \quad (28)$$

این تذکر لازم است که برای محاسبه‌ی لنگر تکیه‌گاه گیردار از ضریب انتقال لنگر تیر شکل ۴ استفاده شده است.

۳. محاسبه‌ی سختی دورانی تیرهای سراسری با دهانه‌های برابر

در ادامه، سختی دورانی تیر سراسری با دهانه‌های برابر در ۳ حالت انتها مفصل، انتها گیردار و انتها گیردار غلتکی محاسبه شده است.

۱.۳. حالت انتها مفصل

تیری با $K-1$ دهانه با طول دهانه‌های برابر مطابق شکل ۱ در نظر گرفته شده است. هدف، محاسبه‌ی سختی دورانی (K_θ) این تیر در ابتدای آن است (روابط ۳۷):

$$\theta_1 = \frac{M}{K_1}, \quad \theta_1 = \frac{|M_1|L}{3EI} - \frac{|M_r|L}{6EI}$$

$$\theta_1 = \frac{L}{3EI} (M - \frac{M_r}{2})$$

$$\theta_1 = \left[\frac{ML}{3EI} \left(1 - \frac{\left[- \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^K (2+\sqrt{3})^2 + (2-\sqrt{3})^2 \right]}{2 \left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^K \right]} \right) \right]$$

$$= \frac{ML}{3EI} \left[\frac{\left[\left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^K \left((2+\sqrt{3})^2 - 2(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3})^2 + 2(2-\sqrt{3}) \right) \right]}{2 \left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^K \right]} \right]$$

$$= \frac{ML}{3EI} \left[\frac{\sqrt{3} \left[\left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^K (2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) \right]}{2 \left[(2-\sqrt{3}) - (2+\sqrt{3}) \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^K \right]} \right]$$

$$= \frac{ML}{EI} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\left[1 + \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^{K-1} \right]}{\left[1 - \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^{K-1} \right] (2-\sqrt{3})}$$

$$K_\theta = \frac{6EI}{\sqrt{3}L} \frac{\left[1 - \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^{K-1} \right]}{\left[1 + \left[\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} \right]^{K-1} \right]}$$

$$K_r = \frac{3EI}{L}, \quad K_r = 3,4285 \frac{EI}{L}, \quad K_r = 3,4615 \frac{EI}{L}$$

$$K_0 = 3,4639 \frac{EI}{L}$$

$$K_\infty = \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{EI}{L} = 3,4641 \frac{EI}{L} \quad (37)$$

مشابه روش تقریبی قسمت پیشین نیز می‌توان با دقت بسیار بالایی این سختی‌ها را محاسبه کرد (رابطه‌ی ۳۸). این مقادیر در جدول ۴ ارائه شده است:

$$\theta = \frac{L}{3EI} \left(1 - \frac{\bar{K}(2-\sqrt{3})}{2} \right) \quad (38)$$

اعداد به دست آمده دقت بسیار بالای این روش تقریبی را نشان می‌دهد.

در نتیجه، این حل تقریبی با دقت بسیار بالا برای یک تیر سراسری با انتهای مفصلی قابل ارائه است (روابط ۳۳):

$$|M_n| = \begin{cases} 1 < n < K-2 & (2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K-2 & 0,9995(2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K-1 & 0,93(2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K & 0 \end{cases} \quad (33)$$

-- حالت انتها گیردار $(n = K - Z)$ (روابط ۳۴):

$$|M_n| = \frac{\left[(2+\sqrt{3})^n + \left[\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right]^K (2-\sqrt{3})^n \right] M}{(2+\sqrt{3}) + \left[\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right]^K (2-\sqrt{3})}$$

$$|M_n| = \frac{\left(\frac{(2+\sqrt{3})^K}{(2+\sqrt{3})^Z} + \frac{(2+\sqrt{3})^K}{(2-\sqrt{3})^Z} \right) M}{(2+\sqrt{3}) \left(1 + \left[\frac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}} \right]^{K-1} \right)}$$

$$\Rightarrow |M_n| = \frac{\left((2+\sqrt{3})^{(K-1)} \left((2+\sqrt{3})^Z + (2-\sqrt{3})^Z \right) \right)}{\frac{(2+\sqrt{3})^{K-1} + (2-\sqrt{3})^{K-1}}{(2-\sqrt{3})^{K-1}}} M$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^Z + (2-\sqrt{3})^Z}{(2+\sqrt{3})^{K-1} + (2-\sqrt{3})^{K-1}} M \quad (34)$$

حال اگر $|M_n|$ را بر $(2-\sqrt{3})^{K-Z-1} M$ تقسیم کنیم، روابط ۳۵ نتیجه گرفته می‌شود:

$$\frac{|M_n|}{(2-\sqrt{3})^{K-Z-1} M} = \frac{\frac{(2+\sqrt{3})^Z + (2-\sqrt{3})^Z}{(2+\sqrt{3})^{K-1} + (2-\sqrt{3})^{K-1}} M}{(2-\sqrt{3})^{K-Z-1} M}$$

$$= \frac{(2+\sqrt{3})^Z + (2-\sqrt{3})^Z}{(2+\sqrt{3})^{K-1} + (2-\sqrt{3})^{K-1}} \times \frac{(2-\sqrt{3})^Z}{(2-\sqrt{3})^{K-1}}$$

$$= \frac{1 + (2-\sqrt{3})^{2Z}}{1 + (2-\sqrt{3})^{2(K-1)}} = 1 + (2-\sqrt{3})^{2Z}$$

$$= \begin{cases} (Z=1) & 1,09179 \cong 1,07 \\ (Z=2) & 1,0015 \cong 1,005 \\ (Z=3) & 1,00037 \cong 1 \\ (Z=4) & 1,000026 \cong 1 \\ (Z=K-1) & 1 \end{cases} \quad (35)$$

در نتیجه این حل تقریبی با دقت بسیار بالا برای یک تیر سراسری با انتهای گیردار قابل ارائه است (روابط ۳۶):

$$|M_n| = \begin{cases} 1 < n < K-2 & (2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K-2 & 1,005(2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K-1 & 1,072(2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K & \frac{0,5 \times 1,07}{(2-\sqrt{3})} (2-\sqrt{3})^{n-1} |M_n| = 2(2-\sqrt{3})^{n-1} (\bar{K}=2) |M_n| \end{cases} \quad (36)$$

جدول ۴. محاسبه‌ی سختی تیر با انتهای مفصلی توسط روش تقریبی.

تعداد دهانه	\bar{K}	سختی دورانی $\frac{EI}{L}$
۲	۰٫۹۳	۳٫۴۶۷ $\frac{EI}{L}$
۳	۰٫۹۹۵	۳٫۴۶۱۴ $\frac{EI}{L}$
۴	۱	۳٫۴۶۴۱ $\frac{EI}{L}$

۲.۳. حالت انتها گیردار

مراحل همانند قسمت قبل نمایش داده می‌شود (روابط ۳۹):

$$\theta_1 = \frac{L}{3EI} (M - \frac{M_T}{2})$$

$$\theta_1 = \frac{L}{3EI} \left[M \left(1 - \frac{\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2-\sqrt{3})^2 + (2+\sqrt{3})^2}{2 \left[(2+\sqrt{3}) - (2-\sqrt{3}) \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K \right]} \right) \right]$$

$$= \frac{ML}{3EI} \left[\frac{\left[\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K (2-\sqrt{3})\sqrt{3} - (2-\sqrt{3})^2 - (2+\sqrt{3})\sqrt{3} \right]}{2 \left[(2+\sqrt{3}) + (2-\sqrt{3}) \left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^K \right]} \right]$$

$$= \frac{ML}{EI} \times \frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\left[\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^{K-1} - 1 \right] (2+\sqrt{3})}{\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^{K-1} + 1} (2+\sqrt{3})$$

$$K_\theta = \frac{6EI}{\sqrt{3}L} \left[\frac{\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^{K-1} + 1}{\left[\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \right]^{K-1} - 1} \right], \quad K_T = \frac{4EI}{L}$$

$$K_T = 3,5 \frac{EI}{L}, \quad K_T = 3,4666 \frac{EI}{L}, \quad K_5 = 3,4642 \frac{EI}{L}$$

$$K_\infty = \frac{6}{\sqrt{3}} \frac{EI}{L} = 3,4641 \frac{EI}{L} \quad (39)$$

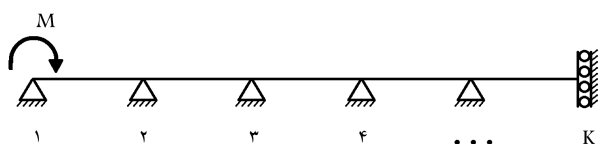
با روش تقریبی مانند قسمت قبل نیز می‌توان با دقت خیلی خوبی این سختی‌ها را محاسبه کرد (روابط ۴۰). این مقادیر در جدول ۵ نمایش داده شده است:

$$\theta = \frac{L}{3EI} \left(1 - \frac{\bar{K}(2-\sqrt{3})}{2} \right) \Rightarrow K_\theta = \frac{\frac{2EI}{L}}{\left(1 - \frac{\bar{K}(2-\sqrt{3})}{2} \right)} \quad (40)$$

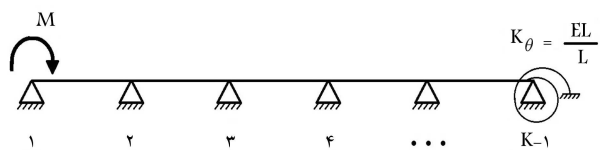
اعداد به‌دست‌آمده دقت بسیار بالای روش تقریبی را نشان می‌دهد. مشاهده می‌شود که بعد از ۳ دهانه، اضافه‌کردن دهانه‌ها تأثیر محسوسی در سختی دورانی تیر ندارد. این تذکر لازم است که برای سایر حالات شرایط انتهایی (گیردار غلتکی و...) می‌توان از ضریب انتقال لنگر قسمت انتهایی به‌عنوان شرط ثانویه معادلات بازگشتی استفاده کرد.

جدول ۵. محاسبه‌ی سختی تیر با انتهای گیردار توسط روش تقریبی.

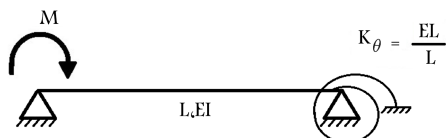
تعداد دهانه	\bar{K}	سختی دورانی $\frac{EI}{L}$
۲	۱٫۰۷۲	۳٫۵۰۳ $\frac{EI}{L}$
۳	۱٫۰۰۵	۳٫۴۶۶۷ $\frac{EI}{L}$
۴	۱	۳٫۴۶۴۱ $\frac{EI}{L}$



شکل ۵. تیر سراسری با انتهای گیردار غلتکی تحت اثر لنگر خمشی متمرکز.



شکل ۶. تیر سراسری با انتهای گیردار غلتکی معادل شده.



شکل ۷. دهانه‌ی انتهایی تیر سراسری $C.O.F. = \frac{1}{\lambda}$, $K_\theta = \frac{EI}{L}$

۳.۳. حالت انتهای گیردار غلتکی

در ادامه، نتایج به‌دست‌آمده برای تیر سراسری با انتهای گیردار غلتکی ارائه شده است (شکل ۵). در این حالت تکیه‌گاه شماره‌ی K ، گیردار غلتکی شده و معادلات به دست‌آمده براین اساس بررسی شده است (رابطه‌ی ۴۱):

$$|M_n| = c_0 X_1^n + c_1 X_2^n \quad (41)$$

این که لنگر تکیه‌گاه ابتدایی همان M است، به‌عنوان شرط اول برقرار است؛ ولی دیگر شرط دوم برقرار نیست و باید برای این حالت شرط ثانویه دیگری پیدا کرد.

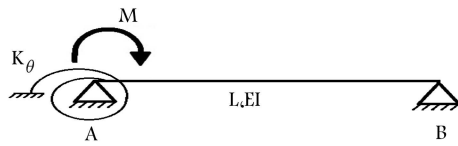
برای پیدا کردن شرط ثانویه جدید دیگر نمی‌توان از ضریب انتقال لنگر تیر انتها گیردار غلتکی استفاده کرد، چون تیر در محل تکیه‌گاه گیردار غلتکی، یک درجه آزادی انتقالی داشته است؛ ولی در سایر تکیه‌گاه‌های تیر، درجه آزادی انتقالی و شرایط تشابهی وجود نداشته است. به همین دلیل تیر سراسری با انتهای گیردار غلتکی به‌صورت تیر شکل ۶ مدل شده است. همچنین از ضریب انتقال لنگر تیر شکل ۷ به‌عنوان شرط ثانویه استفاده شده است.

این حالت معادل این است که یک تکیه‌گاه جدید با ضریب انتقال لنگر $\frac{1}{\lambda}$ در انتها وجود داشته باشد (منظور از انتها، تکیه‌گاه ماقبل آخر است). با توجه به توضیحات داده‌شده می‌توان شرط ثانویه را به‌دست آورد (رابطه‌ی ۴۲):

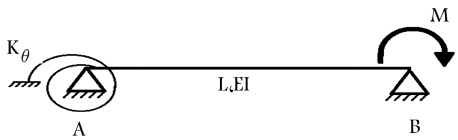
$$\begin{cases} M_1 = c_0 (2 + \sqrt{3}) + c_1 (2 - \sqrt{3}) = M \\ \frac{M_{K-1}}{M_{K-2}} = \frac{c_0 (2 + \sqrt{3})^{K-1} + c_1 (2 - \sqrt{3})^{K-1}}{c_0 (2 + \sqrt{3})^{K-2} + c_1 (2 - \sqrt{3})^{K-2}} = \frac{1}{\lambda} \end{cases} \quad (42)$$

در روابط ۴۲ فقط c_0 و c_1 مجهول است. با حل دستگاه دو معادله و دو مجهول مذکور مقادیر مجهول به‌صورت روابط ۴۳ محاسبه می‌شود:

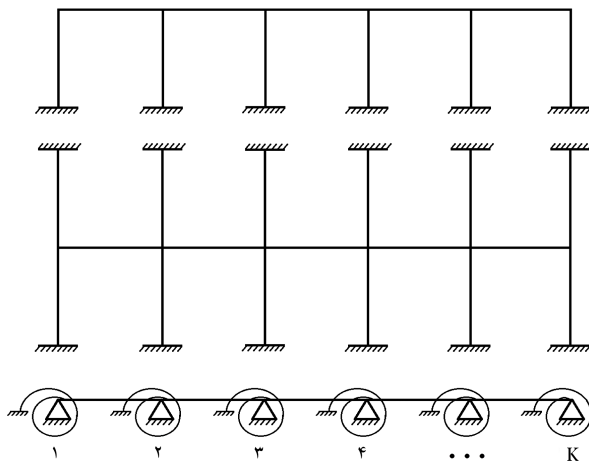
$$|M_n| = \frac{\left[(2 + \sqrt{3})^n + \left(\frac{15 + 8\sqrt{3}}{\lambda\sqrt{3} - 15} \right) \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right]^{K-2} (2 - \sqrt{3})^n \right]}{\left(2 + \sqrt{3} \right) + \left(\frac{15 + 8\sqrt{3}}{\lambda\sqrt{3} - 15} \right) \left[\frac{2 + \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}} \right]^{K-2} (2 - \sqrt{3})} M \quad (43)$$



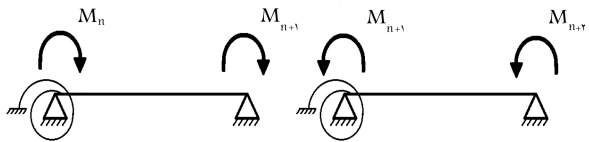
شکل ۸. تیر اول.



شکل ۹. تیر دوم.



شکل ۱۰. قاب‌های ۱ و ۲ طبقه با طول دهانه‌ی برابر (قاب جزء) و تیر معادل آنها.



شکل ۱۱. دهانه‌های شماره‌ی n و n + ۱.

فهرهای پیچشی روی تیر سراسری مدل شده است (شکل ۱۰)، بدین صورت که از فهرهای پیچشی با سختی دورانی $\frac{\nu EI}{L}$ استفاده شده است و البته برای اینکه بتوان از سختی $\frac{\nu EI}{L}$ استفاده کرد، باید از تغییرمکان افقی سقف صرف‌نظر شود، که این فرض برای بارهای ثقلی متقارن با دقت خوبی برقرار است. همچنین از تغییرشکل محوری ستون‌ها صرف‌نظر شده است.

اگر دهانه‌های شماره‌ی n و n + ۱ را از تیر بالا جدا کنیم، و از سازگاری شیب در گره‌ی شماره‌ی n استفاده کنیم، مطابق شکل ۱۱ روابط ۴۸ را خواهیم داشت:

$$(\theta_{n+1})L = (\theta_n + 1)R$$

$$\frac{M_n}{2(K_\theta + \frac{\nu EI}{L})} - \frac{K_\theta + \frac{\nu EI}{L}}{K_\theta + \frac{\nu EI}{L}} \times \frac{M_{n+1}L}{4EI} = \frac{M_{n+1}}{K_\theta + \frac{\nu EI}{L}} - \frac{M_{n+2}}{2(K_\theta + \frac{\nu EI}{L})} \quad (48)$$

معادله‌ی به‌دست‌آمده برای رسیدن به معادله‌ی بازگشتی مرتب شده است (روابط ۴۹):

با اثباتی مشابه اثبات پیشین می‌توان ثابت کرد که در این حالت برای n ثابت، M_n برای K نزولی است. در نتیجه، کمینه‌ی لنگری که به تکیه‌گاه شماره‌ی n ام می‌رسد، در حالتی است که K به سمت بی‌نهایت برود. با محاسبات مشابه برای حل تقریبی با دقت بسیار بالا برای یک تیر سراسری با انتهای گیردار غلتکی این نتایج قابل ارائه می‌شود (روابط ۴۴):

$$|M_n| = \begin{cases} 1 < n < K - 3 & (2 - \sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K - 3 & 0,997(2 - \sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K - 2 & 0,960(2 - \sqrt{3})^{n-1} |M_n| \\ n = K - 1 & 0,448(2 - \sqrt{3})^{n-2} |M_n| \\ n = K & 0,448(2 - \sqrt{3})^{n-2} |M_n| \\ & = 0,5 \times 1,07(2 - \sqrt{3})^{n-1} |M_n| \end{cases} \quad (44)$$

همچنین سختی دورانی را نیز می‌توان مطابق روابط ۴۵ محاسبه کرد:

$$K_r = \frac{EI}{L}, \quad K_r = 3,2 \frac{EI}{L}, \quad K_r = 3,4444 \frac{EI}{L}$$

$$K_5 = 3,4626 \frac{EI}{L}, \quad K_6 = 3,446 \frac{EI}{L}$$

$$K_\infty = \frac{6}{\sqrt{3}} = 3,4641 \frac{EI}{L} \quad (45)$$

۴. تحلیل قاب‌های یک طبقه با طول دهانه‌ی برابر با

استفاده از دنباله‌های بازگشتی

در قسمت پیشین، تحلیل تیرهای سراسری با طول دهانه‌ی برابر توسط دنباله‌های بازگشتی بررسی شده است. در این قسمت از روش مذکور برای تحلیل قاب‌های یک طبقه با دهانه‌ی برابر استفاده شده است. قبل از شروع بحث، روابط دو تیر (شکل‌های ۸ و ۹) که در این بحث کاربرد دارد، بیان شده است.

– تیر اول: با استفاده از معادلات سازگاری برای تیر اول در شکل ۸، روابط ۴۶ به‌دست آمده است:

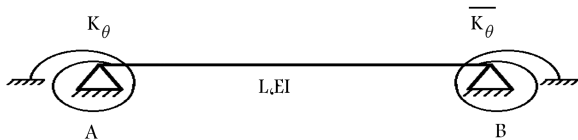
$$\theta_A = \frac{M}{K_\theta + \frac{\nu EI}{L}}$$

$$\theta_B = \frac{1}{2} \theta_A = \frac{M}{2(K_\theta + \frac{\nu EI}{L})} \quad (46)$$

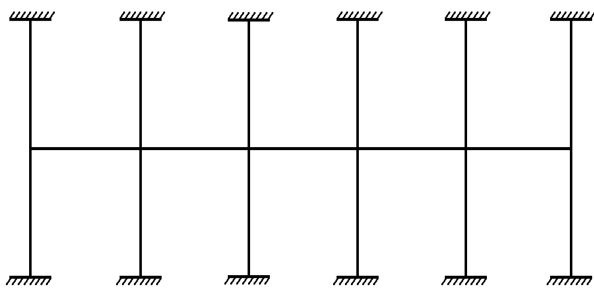
– تیر دوم: با استفاده از معادلات سازگاری برای تیر دوم در شکل ۹، روابط ۴۷ به‌دست آمده است:

$$\theta_A = \frac{M}{2(K_\theta + \frac{\nu EI}{L})}, \quad \theta_B = \frac{K_\theta + \frac{\nu EI}{L}}{K_\theta + \frac{\nu EI}{L}} \times \frac{ML}{4EI} \quad (47)$$

نتایج به‌دست‌آمده از تحلیل‌های آزمایشی متعدد نشان می‌دهد که برای قاب‌های ساختمانی که طرح هندسی بارهای وارد بر آنها به طور نامعقولی غیرمتقارن نیست، اثر انتقال جانبی ناشی از بارهای قائم (ثقلی) قابل چشم‌پوشی کردن است (مخصوصاً در مورد لنگر انتهای تیرهای قاب). در چنین حالتی می‌توان لنگرهای ناشی از بارهای قائم در تیرهای قاب را با دقت کافی از تقسیم قاب اصلی به قاب‌های جزء به‌دست آورد. در این بخش برای تحلیل قاب، سختی دورانی ستون‌ها توسط



شکل ۱۲. تیر معادل دهانه‌ی انتهایی قاب.



شکل ۱۳. قاب جزء.

حالت دوم: قاب یک طبقه با ستون‌های انتهایی مفصلی (روابط ۵۶):

$$K_{\theta} = \frac{3EI}{L}, \quad X_1 = \frac{11 + \sqrt{105}}{4}, \quad X_2 = \frac{11 - \sqrt{105}}{4},$$

$$S = \frac{2}{15} \quad (56)$$

حالت سوم: ستون با انتهای گیردار در بالا و پایین مطابق با شکل ۱۳ (روابط ۵۷):

$$K_{\theta} = \frac{8EI}{L}, \quad X_1 = 4 + \sqrt{15}, \quad X_2 = 4 - \sqrt{15},$$

$$S = \frac{4}{35} \quad (57)$$

اگر سختی تیرها با ستون‌ها تفاوت داشته باشد، فقط کافی است در محاسبه‌ی ضریب انتقال لنگر، این موضوع لحاظ شود و به جای K_{θ} ، سختی دورانی ستون‌ها لحاظ شود و به جای سختی دورانی ستون انتهایی نیز \bar{K}_{θ} در نظر گرفته شود. این تذکر لازم است که مقادیر لنگر محل‌های اتصال تیر و ستون‌ها برای یک قاب ۹ دهانه تحت اثر بارگذاری ثقلی در هر سه حالت فوق با استفاده از روابط به دست آمده محاسبه و مشاهده شده است. این نتایج انطباق بسیار خوبی با نتایج تحلیل دقیق سازه دارد.

۵. تحلیل تیرهای سراسری با دهانه‌ی برابر با استفاده از

دنباله‌های بازگشتی با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی

در این قسمت برای نوشتن معادلات بازگشتی، تغییر شکل‌های برشی در محاسبات جمله‌ی عمومی دنباله‌ی بازگشتی، لحاظ شده است. در تیر شکل ۲ با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی با استفاده از روش بار واحد، روابط ۵۸ برقرار است:

$$1 \times \theta_A = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \cdot m(x) dx + \frac{f}{GA} \int_0^L V(x) \cdot v(x) dx$$

$$M(x) = M \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

$$m(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) \quad (58)$$

$$\frac{M_{n+2}}{2(K_{\theta} + \frac{3EI}{L})} = M_{n+1} \left(\frac{1}{K_{\theta} + \frac{3EI}{L}} + \frac{1}{\frac{3EI}{L}} \times \frac{K_{\theta} + \frac{3EI}{L}}{K_{\theta} + \frac{3EI}{L}} \right) - \frac{M_n}{2(K_{\theta} + \frac{3EI}{L})} = M_{n+1} \left(\frac{1}{K_{\theta} + \frac{3EI}{L}} \left(1 + \frac{K_{\theta} + \frac{3EI}{L}}{\frac{3EI}{L}} \right) \right) - \frac{M_n}{2(K_{\theta} + \frac{3EI}{L})}$$

$$M_{n+2} = 2 \left(\frac{K_{\theta} + \frac{3EI}{L}}{\frac{3EI}{L}} \right) M_{n+1} - M_n$$

$$\Rightarrow M_{n+2} = \left(4 + \frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} \right) M_{n+1} - M_n \quad (49)$$

سپس معادله‌ی مشخصه این رابطه‌ی بازگشتی مشخص شده است (روابط ۵۰):

$$X^2 = \left(4 + \frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} \right) X - 1$$

$$\Rightarrow X = \frac{\left(4 + \frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} \right) \pm \sqrt{\left(4 + \frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} \right)^2 - 4}}{2}$$

$$X = \left(2 + \frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} \right) \pm \sqrt{\left(\frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} \right)^2 + \frac{K_{\theta}}{\frac{3EI}{L}} + 3} \quad (50)$$

سپس با داشتن معادله‌ی مشخصه، به کمک دو شرط اولیه‌ی ذکر شده، جمله‌ی عمومی دنباله‌ی بازگشتی محاسبه شده است:

$$|M_n| = F_1 X_1^n + F_2 X_2^n \quad (51)$$

شرط اولیه: $|M_1| = M$

برای نوشتن شرط دوم، ستون انتهایی با یک فنریجشی مطابق شکل ۱۲ معادل شده و از ضریب انتقال لنگر تیر معادل به عنوان شرط ثانویه استفاده شده است:

$$C.O.F. = \frac{\frac{3EI}{L} \bar{K}_{\theta}}{\bar{K}_{\theta} \left(K_{\theta} + \frac{3EI}{L} \right) + \frac{3EI}{L} \left(K_{\theta} + \frac{3EI}{L} \right)} \quad (52)$$

اگر ضریب انتقال لنگر (C.O.F.)، S نامیده شود (رابطه‌ی ۵۳):

$$C.O.F. = S = \frac{F_1 X_1^K + F_2 X_2^K}{F_1 X_1^{K-1} + F_2 X_2^{K-1}}$$

$$\Rightarrow F_1 X_1^{K-1} (X_1 - S) = F_2 X_2^{K-1} (S - X_2)$$

$$\Rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{K-1} \left(\frac{X_1 - S}{S - X_2} \right) \quad (53)$$

شرط ثانویه: $M = F_1 X_1 + F_2 X_2$

از ترکیب شروط اولیه و ثانویه، معادله‌ی ۵۴ نتیجه شده است:

$$|M_n| = \frac{X_1^n + \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{K-1} \left(\frac{X_1 - S}{S - X_2} \right) X_2^n}{X_1 + \left(\frac{X_1}{X_2} \right)^{K-1} \left(\frac{X_1 - S}{S - X_2} \right)} \quad (54)$$

برای بررسی مسئله، سه حالت در نظر گرفته شده است:

حالت اول: قاب یک طبقه با ستون‌های انتهایی گیردار (روابط ۵۵):

$$K_{\theta} = \frac{4EI}{L}, \quad X_1 = (3 + 2\sqrt{2}), \quad X_2 = (3 - 2\sqrt{2}),$$

$$S = \frac{2}{15} \quad (55)$$

جدول ۶. نتایج به دست آمده برای یک تیر ۹ دهانه با استفاده از دنباله‌های بازگشتی با در نظر گرفتن تغییر شکل‌های برشی.

M_1	M
M_2	$0,2659962859 M$
M_3	$-0,70705402359 M$
M_4	$0,1882030531 M$
M_5	$-0,7006123067 \times 10^{-2} M$
M_6	$1,331579132 \times 10^{-3} M$
M_7	$-3,540785202 \times 10^{-4} M$
M_8	$9,374528096 \times 10^{-5} M$
M_9	$-2,328816517 \times 10^{-5} M$
M_{10}	۰

جدول ۷. درصد خطاهای نسبی با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های برشی.

M_1	$\%$	M_6	$\%$
M_2	$\%$	M_7	$\%$
M_3	$\%$	M_8	$\%$
M_4	$\%$	M_9	$\%$
M_5	$\%$	M_{10}	$\%$

مطابق جدول ۷، خطای روش مذکور با لحاظ کردن تغییر شکل‌های برشی بسیار ناچیز است. اگر مانند قبل از یک روش تقریبی با دقت خیلی خوب برای محاسبات استفاده کنیم، این نتایج حاصل خواهد شد (روابط ۶۲):

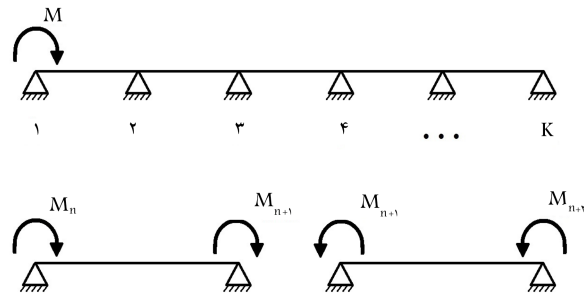
$$|M_n| = \begin{cases} 1 < n < K - 2 & (X_1)^{n-1} \\ n = K - 2 & (1 - (X_1)^2)(X_1)^{n-1} \\ n = K - 1 & (1 - (X_1)^2)(X_1)^{n-1} \\ n = K & 0 \end{cases} \quad (62)$$

محاسبات ارائه شده برای سایر شرایط تکیه‌گاهی انتهایی نیز قابل انجام است، که در اینجا برای جلوگیری از اطاله‌ی کلام از آن چشم‌پوشی شده است.

۶. نتیجه‌گیری

برخی از نتایج مهم این پژوهش عبارت‌اند از:

- بیشینه‌ی سختی دورانی تیرهای سراسری چنددهانه با دهانه‌های برابر L و صلبیت خمشی EI ، که انتهای مفصلی و یا گیردار غلتکی دارند، برابر $\frac{6}{\sqrt{3}} \frac{EI}{L}$ است.
- کمینه‌ی سختی دورانی تیرهای سراسری چنددهانه با دهانه‌های برابر L و صلبیت خمشی EI ، که انتهای گیردار دارند، برابر $\frac{6}{\sqrt{3}} \frac{EI}{L}$ است.



شکل ۱۴. تیر سراسری تحت خمش و برش.

می‌گویند، برای مقاطع I شکل با دقت خیلی خوبی برابر $\frac{A}{A_w}$ است^[۵] و در نتیجه روابط ۵۹ ارائه شده است:

$$\theta_A = \frac{ML}{3EI} + \frac{Mf}{GAL}, \quad \theta_B = \frac{ML}{6EI} - \frac{Mf}{GAL} \quad (59)$$

اگر $\frac{6EIF}{GAL}$ برابر g در نظر گرفته شود، روابط ۶۰ را خواهیم داشت:

$$\theta_A = \frac{ML}{3EI(\frac{1}{1+g})}, \quad \theta_B = \frac{ML}{6EI(\frac{1}{1-g})} \quad (60)$$

مطابق شکل ۱۴، در تیر سراسری با دهانه‌های برابر مورد بحث روابط ۶۱ برقرار است:

$$\begin{aligned} (\theta_{n+1})_L &= (\theta_{n+1})_R \\ \Rightarrow \frac{M_n}{L(\frac{1}{1-g})} - \frac{M_{n+1}}{L(\frac{1}{1+g})} &= \frac{M_{n+1}}{L(\frac{1}{1+g})} - \frac{M_{n+2}}{L(\frac{1}{1-g})} \\ \Rightarrow \frac{2 \times M_{n+1}}{L(\frac{1}{1+g})} - \frac{M_n}{L(\frac{1}{1-g})} &= \frac{M_{n+2}}{L(\frac{1}{1-g})} \\ \Rightarrow 2(2+g)M_{n+1} - (1-g)M_n &= (1-g)M_{n+2} \\ \Rightarrow (1-g)X^2 - 2(2+g)X + (1-g) &= 0 \\ \Rightarrow X &= \frac{2(2+g) \pm \sqrt{4(2+g)^2 - 4(1-g)^2}}{2(1-g)} \\ \Rightarrow X &= \frac{(2+g) \pm \sqrt{6g+3}}{(1-g)} \\ \Rightarrow |M_n| &= \frac{\left[-\left[\frac{X_1}{X_2}\right]^K (X_2)^n + (X_1)^n \right] M}{\left[(X_1) - (X_2) \left[\frac{X_1}{X_2}\right]^K \right]} \\ \Rightarrow M_n &= (-1)^{n+1} \frac{\left[-\left[\frac{X_1}{X_2}\right]^K (X_2)^n + (X_1)^n \right] M}{\left[(X_1) - (X_2) \left[\frac{X_1}{X_2}\right]^K \right]} \quad (61) \end{aligned}$$

با در نظر گرفتن اثر تغییر شکل‌های برشی، لنگرهای محاسبه شده از روابط فوق در جدول ۶ ارائه شده است.

در جدول ۷، درصد خطای نسبی نتایج به دست آمده توسط دنباله‌ی بازگشتی با در نظر داشتن تغییر شکل‌های برشی نسبت به نتایج جدول ۲، که توسط نرم‌افزار SAP ۲۰۰۰ محاسبه شده است، ارائه شده است.

- در یک تیر سراسری چنددهانه با دهانه‌های برابر تحت اثر لنگر خمشی متمرکز در ابتدای تیر، مقادیر لنگر محل تکیه‌گاه‌ها از یک دنباله‌ی بازگشتی تبعیت می‌کند، که می‌توان با دقت خوبی آن را با یک سری هندسی تقریب زد و نکته‌ی جالب این است که تأثیر نوع تکیه‌گاه انتهایی فقط در چند دهانه‌ی آخر تیر معلوم می‌شود.
- با استفاده از روش دنباله‌های بازگشتی می‌توان یک قاب تحت اثر بارگذاری ثقلی را با فرض عدم تغییر مکان جانبی و با جایگزینی فنر پیچشی به جای ستون‌ها در محل اتصال تیر و ستون‌ها تحلیل کرد.
- همچنین این روش برای تحلیل قاب جزء، که در تحلیل دستی قاب‌ها تحت بار ثقلی کاربردی است، قابل استفاده است.

منابع (References)

1. Pasha, E., et al., Mathematics culture, First Edition, Publication of madrese, p.479, (in Persain) (2000).
2. Ralph P. Grimaldi., Discrete and Combinatorial Mathematics on Applied Introduction, 2nd Edition, Addison-Wesley publishing company (in persain) (1989).
3. Hibbeler, R.C., *Structural Analysis*, 8th Edition, Prentice Hall, p. 3 (2012).
4. Hsieh, Y.-Y., *Elementary Theory of Structures*, 2nd Edition, Prentice Hall (1995).
5. J.M. Gere., *Moment Distribution*, D. Van Nostrand, Inc, (in Persain) (1963),