

تحلیل صفحات دایروی گیردار تحت نگرهی تغییر شکل های بزرگ با استفاده از سری های توانی

رضا ضیاء توحیدی* (استادیار)

سجاد واحدی گرده (کارشناس ارشد)

گروه مهندسی عمران، دانشگاه آزاد اسلامی واحد مشهد

مهندسی عمران شریف، تابستان ۱۳۹۴
دربی ۲ - ۳۱، شماره ۲/۲، ص. ۳۷-۲۵

تحلیل خمشی صفحات نازک در برابر بارهای جانبی بزرگ، استفاده از نگرهی تغییر شکل های بزرگ را می طلبد؛ زیرا در این حالت نقاط واقع بر میان صفحه افزون بر چابجایی عمود بر صفحه، چابجایی درون صفحه را نیز تجربه می کنند. معادلات فون کارمن، پاسخ صفحات خمشی در برابر بارهای جانبی را از دیدگاه نگرهی ناخطی هندسی به دست می دهد. این مطالعه، روشی نوین را برای تحلیل عددی معادلات فون کارمن ارائه کرده است. بدین منظور با گزینشی منطقی، مقدار تغییر شکل صفحه در حوزه ناخطی هندسی به صورت تابعی از خیز صفحه در حالت تغییر شکل های کوچک انگاشته شده است. این تقریب موجب تبدیل معادلات دیفرانسیل پارابولی به معادلات جبری ناخطی می شود، که به سهولت قابل حل است و سرعت همگرایی فوق العاده ای نیز دارد. نتایج به دست آمده با بهره گیری از روش ارائه شده در این نوشتار در مقایسه با سایر روش ها قدرت و توانایی راهکار پیشنهادی را آشکار می سازد.

واژگان کلیدی: تغییر شکل بزرگ صفحات، معادلات فون کارمن، صفحات دایروی، تابع خیز.

ziatohidi1049@mshdiau.ac.ir
sajjad.vahedi@gmail.com

۱. مقدمه

که صفحه به عنوان یک جسم سه بعدی پیوسته ای در نظر گرفته شود. لذا بدیهی است که این چنین نگرش دقیقی به دلیل به وجود آمدن دشواری های محاسباتی قابل حل نخواهد بود. مشخصه های تحلیل صفحات (خصوصاً مشخصه های خمشی)، در مقایسه با سایر ابعاد، به طور گسترده ای به ضخامت ورق بستگی دارد. به همین دلیل اساس تحلیل و رابطه نویسی ورق ها، با توجه به نسبت خیز به ضخامت آن ها صورت می گیرد. لذا در تقسیم بندی صفحات برای نوشتن روابط حاکم بر آن ها و همچنین در تحلیل های خمشی، بسته به نسبت خیز به ضخامت صفحه، ورق ها را به ۳ دسته تقسیم می کنند: صفحات نازک با خیزهای کوچک، صفحات نازک با خیزهای بزرگ و صفحات ضخیم. برای تحلیل صفحات نازک با تغییر شکل کوچک، اکثراً از تئوری کلاسیک صفحات یا نگرهی تغییر شکل های کوچک استفاده می شود. نگرهی کلاسیک ورق ها مبتنی بر فرضیات کیرشهف است.^[۱] بر این اساس فرض شده است که صفحات کشسان، همگن^۲، همسانگرد^۳ و تحلیل آن مبتنی بر هندسه ی تغییر شکل نایافته ی سازه است. هنگامی که تغییر شکل جانبی ایجاد شده در ورق از حد معینی فرزون تر شود، فرضیات کیرشهف مقبولیت خود را از دست می دهد و در نتیجه نگرهی کلاسیک نمی تواند مورد استفاده قرار گیرد. به بیان دیگر، چنانچه تغییر شکل های ایجاد شده در صفحات در مقایسه با ضخامت صفحه کوچک نباشند، در این حالت تحلیل صفحات بر اساس تئوری خطی کلاسیک دقت کافی به همراه نخواهد داشت. زیرا در شرایط مذکور، پدیده ی اندرکش میان تنش های غشایی و

استفاده از صفحات در ساختارهای سبک و دو بعدی، اهمیت اقتصادی زیادی دارد. به همین دلیل پیکره بندی اصلی در بسیاری از سازه های صنعتی و عمرانی (ساختمان ها) به صورت جزئی و در بعضی قسمت ها به صورت کامل از صفحات تشکیل شده است. لذا به دلیل داشتن اهمیت اقتصادی (مقرون به صرفه بودن) و همچنین سهولت در استفاده از ورق ها و ساختارهای مشابه آنها، بخصوص در سال های اخیر، اهمیت ویژه ای داشته اند. صفحات و ورق ها عناصری سازه ای هستند که شکل اولیه شان تخت و ضخامت آن ها بسیار کوچک تر از دو بعد دیگر است. ضخامت صفحات در امتداد عمود بر میان صفحه^۱ اندازه گیری می شود. بیشتر سازه های صفحه ای با به کارگیری روابط حاکم بر تئوری کشسانی تحلیل می شوند. در همه ی تحلیل های ساختاری، طراح به دلیل پیچیدگی ساختمان واقعی قطعه (سازه) مجبور است تا ساختار اصلی را به یک مدل ساده شده ای که پارامترهای مهم آن مشابه ساختار اصلی است، تبدیل کند. در مورد صفحات هم باید ساختار اصلی صفحه به یک مدل ساده ای تبدیل شود که در آن پارامترهای هندسه ی صفحه و تکیه گاه های آن، رفتار ماده ای که در صفحه استفاده شده است، نوع بار اعمالی و طریقه ی اعمال آن به صورت دقیق ذکر شده باشند. تحلیل کشسانی دقیق صفحات نیازمند آن است

* نویسنده مسئول

تاریخ: دریافت ۱۳۹۲/۲/۲۵، اصلاحیه ۱۳۹۲/۷/۸، پذیرش ۱۳۹۲/۱۰/۷.

۲. معادلات حاکم و شرایط مرزی

میدان مسئله‌ی مقدار مرزی، یک صفحه دایره‌ای تحت بارهای جانبی گسترده‌ی یکنواخت با لبه‌های گیردار^۸ در نظر گرفته شده است. از آنجا که سازه دارای تقارن محوری است، لذا تابع خیز مستقل از مختصه‌ی زاویه‌ی θ و فقط تابعی از مختصه‌ی شعاعی r است و در نتیجه معادلات حاکم بر تغییرشکل بزرگ صفحات دایره‌ای نازک تحت بارگذاری متقارن محوری به شکل رابطه‌های ۱ و ۲ بازنویسی می‌شود:^[۱]

$$D \frac{d}{dr} (\nabla^r w) = \psi + \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw}{dr} \quad (1)$$

$$\frac{d}{dr} (\nabla^r \Phi) = -\frac{E}{\nu r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^r \quad (2)$$

که در آنها (که به معادلات فون کارمن شهرت یافته‌اند)، پارامترهای E, h, w, Φ و r به ترتیب بیانگر تابع تنش غشایی، خیز عمودی، ضخامت، مدول کشسانی و مختصات شعاعی صفحه هستند. همچنین D, ψ, ∇^r و ν به ترتیب سختی خمشی، تابع بار، عملکرد دیفرانسیل، و ضریب پواسون است، که به صورت رابطه‌های ۳ الی ۵ تعریف می‌شوند:

$$\nabla^r (\dots) = \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left[r \frac{d(\dots)}{dr} \right] \quad (3)$$

$$\psi = \frac{1}{r} \int_0^r q r dr \quad (4)$$

$$D = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (5)$$

شرایط مرزی حاکم برای صفحات دایره‌ای با لبه‌ی گیردار به صورت رابطه‌های ۶ و ۷ است:

$$r = 0 \Rightarrow \frac{dw}{dr} = 0, \quad \sigma_r \text{ is limited} \quad (6)$$

$$r = a \Rightarrow w = 0, \quad \frac{dw}{dr} = 0, \quad \sigma_r = \sigma_0 \quad (7)$$

که در آنها، M_r و σ_r به ترتیب تنش شعاعی و خمش شعاعی هستند که به صورت روابط ۸ و ۹ تعریف می‌شوند:

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \quad (8)$$

$$M_r = -D \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{\nu}{r} \frac{dw}{dr} \right) \quad (9)$$

با توجه به تقارن محوری، تنش‌های غشایی ایجادشده در لبه‌ی گیردار به صورت یکنواخت و برابر با σ_0 در نظر گرفته شده است.

۳. تحلیل معادلات فون کارمن

هنگامی که صفحه‌ی نازک تحت تأثیر بارهای جانبی قرار می‌گیرد، در صورتی که بارهای وارده کوچک باشد، تنش‌های غشایی به وجودآمده در سازه ناچیز است و فرضیات کیرشهف می‌تواند مورد پذیرش قرارگیرد. تئوری کلاسیک خمش صفحات، معادله‌ی حاکم بر خیز جانبی را به صورت رابطه‌ی ۱۰ ارائه می‌کند:

$$\nabla^4 w_s = \frac{p}{D} \quad (10)$$

انحنای گوسی در پاسخ سازه اثرات قابل توجهی را به جای می‌گذارد و در نتیجه، نگره‌ی ناخطی هندسی مورد نیاز خواهد بود. این نگره را که نخستین بار فون کارمن^۴ در سال ۱۹۱۰ ارائه کرده است،^[۱] شامل دو معادله‌ی دیفرانسیل درگیر مرتبه‌ی چهارم با مشتقات پاره‌ی است. فقدان پاسخ تحلیلی برای این معادلات پژوهشگران را بر آن داشته است تا از روش‌های عددی^۵ برای حل این معادلات استفاده کنند. نگره‌ی فون کارمن ارتباط بین نیروهای غشایی و تغییرمکان‌های عرضی را بیان می‌کند. حل دقیق معادلات فون کارمن برای مسئله‌ی خمش ناخطی صفحات نازک در حالت کلی غیرممکن است، بنابراین روش‌های عددی و تقریبی مثل روش بار نموی^[۲]، روش خطی‌سازی عرضی محلی^[۳]، روش اختلال^[۴]، روش تفاضل محدود^[۵]، روش اجزاء محدود^[۶] و روش اجزاء مرزی^[۷] مورد استفاده قرار می‌گیرد.

یکی از روش‌های عددی برای حل معادلات دیفرانسیل در روش بار نموی^۶ است. در این شیوه که در مطالعه‌ی در سال ۲۰۰۴ معرفی شده است،^[۲] بار جانبی به صورت مرحله‌ی وگام به گام به ورق اعمال می‌شود. در هرگام بارگذاری، رفتار صفحه خطی فرض می‌شود و با افزایش بار، رابطه‌ها به شکل مناسبی اصلاح می‌شوند. براساس تحقیقات انجام‌شده در این مطالعه، روش ارائه‌شده توسط پژوهشگران مذکور برای صفحات تحت بارهای با بزرگی متوسط به پاسخ‌های قابل قبول می‌انجامد، درحالی که برای بارهای بزرگ با خطای قابل توجهی همراه است. این تذکر لازم است که این روش برای صفحات دایره‌ای با لبه‌های ساده ارائه شده است.

یکی دیگر از روش‌های تحلیل معادلات فون کارمن، روش خطی‌سازی عرضی محلی^[۳]،^[۷] است. در این روش، سازه‌ی موردنظر به تعداد معدودی از عناصر مش‌بندی شده و تغییرمکان‌های درون صفحه‌ی در هر یک از این عناصر با چندجمله‌ی درجه‌ی دو و تغییرمکان‌های برون صفحه‌ی با چندجمله‌ی درجه سه تخمین زده شده است. با استفاده از این شیوه، معادلات دیفرانسیل ناخطی فون کارمن به معادلات جبری ناخطی تبدیل شده است. این روش در مرحله‌ی اجرا با دشواری‌های فراوانی روبرو می‌شود. تلاش دیگری اخیراً در سال ۲۰۱۱ در ارتباط با مسئله‌ی موردنظر انجام شده است.^[۵] در این روش از معادلات دیفرانسیل حاکم بر پوسته‌های کم عمق کروی برای تحلیل صفحات نازک با نگره‌ی تغییرشکل‌های بزرگ استفاده شده است. بدین منظور، ارتفاع پوسته‌ی کروی به سمت صفر میل داده شده است، تا در نهایت پوسته‌ی کم عمق به صفحه‌ی دایره‌ای تبدیل شود. معادلات تبدیل‌شده با کمک روش تفاضل محدود مورد تحلیل قرار گرفته است.

همچنین در مطالعه‌ی در سال ۲۰۰۱ تحلیل صفحات دایره‌ای نازک با لبه‌های گیردار (برش آزاد) مورد بررسی قرار گرفته است،^[۸] که در آن تابعی که تغییرشکل صفحه را با نگره‌ی تغییرشکل‌های بزرگ مدل می‌کند، متناسب با تابع خیز صفحه در حالت تغییرشکل‌های کوچک فرض شده است. نتایج به دست آمده از مطالعه‌ی مذکور به ازاء بارهای بسیار بزرگ با خطای قابل توجهی روبرو بوده است.

در این مطالعه با انتخاب نوآورانه، تابعی چندجمله‌ی برای تغییرشکل صفحه انتخاب و پاسخ‌های معادلات دیفرانسیل ناخطی فون کارمن محاسبه شده است. تابع در نظر گرفته‌شده برای خیز در حالت تغییرشکل‌های بزرگ تابعی از خیز در حالت تغییرشکل‌های کوچک انتخاب شده است. با به‌کارگیری تقریب مذکور، معادلات دیفرانسیل ناخطی حاکم بر رفتار خمشی صفحات به معادلات جبری ناخطی تبدیل شده و به سهولت تحلیل می‌شود. از ویژگی‌های بارز روش مطرح‌شده در این مطالعه، امکان تعمیم آن برای شرایط مرزی متفاوت و بارگذاری‌های مختلف برای ورق‌های دایره‌ای است. نتایج به دست آمده از تحلیل معادلات دیفرانسیل ناخطی فون کارمن با بهره‌گیری از روش ارائه‌شده در این نوشتار در مقایسه با نتایج حاصل از سایر روش‌ها، صحت و دقت راهکار پیشنهادی را به خوبی آشکار می‌سازد.

در ادامه، به منظور سهولت در ارائه روابط و معادلات، رابطه‌ی ۱۳ به صورت رابطه‌ی ۱۴ نمایش داده شده است:

$$f = \sum_{n=0}^N \alpha_n r^n \quad (14)$$

اگرچه تحلیل دقیق معادلات فون کارمن مستلزم در نظر گرفتن تمامی جملات سری مک لورن است، اما همچنان که در ادامه آشکار خواهد شد، برای نیل به پاسخ نسبتاً دقیق، در نظر گرفتن تعداد معدودی از جملات اولیه‌ی سری ۱۴ کفایت می‌کند و پاسخ مسئله به سرعت به خیز واقعی صفحه همگرا می‌شود.

در ادامه، معادله‌ی ۱۱ به صورت رابطه‌ی ۱۵ بازنویسی می‌شود:

$$w_L = f w_s \quad (15)$$

ویژگی تقارن مرکزی موجود در مسئله، لزوم صفر بودن شیب ورق در مرکز آن را تثبیت می‌کند (رابطه‌ی ۱۶):

$$r = 0 \Rightarrow \frac{dw_L}{dr} = 0 \quad (16)$$

جای‌گذاری رابطه‌ی ۱۵ در معادله‌ی ۱۶، رابطه‌ی ۱۷ را به دست می‌دهد:

$$r = 0 \Rightarrow \frac{df(r)}{dr} w_s(r) + \frac{dw_s(r)}{dr} f(r) = 0 \quad (17)$$

با توجه به غیر صفر بودن تابع w_s و نیز صفر بودن $\frac{dw_s}{dr}$ در مرکز ورق، در حالت کلی برای تحلیل معادله‌ی ۱۷ از رابطه‌ی ۱۸ در نقطه‌ی $r = 0$ استفاده می‌شود:

$$\frac{df(r)}{dr} = 0 \quad (18)$$

با جایگزینی رابطه‌ی ۱۴ در معادله‌ی ۱۸، رابطه‌ی ۱۹ به دست می‌آید:

$$\alpha_1 = 0 \quad (19)$$

اگرچه مطالعات عددی، با در نظر گرفتن ۵، ۴، ۳، ۲، ۱ $N =$ به انجام رسیده است، لیکن به منظور سهولت در ارائه‌ی روش، رابطه‌سازی‌ها به‌ازاء $N = 2$ ارائه شده است.

با توجه به مطالب ذکر شده، تابع فرض شده برای خیز صفحه به‌ازاء $N = 2$ به صورت رابطه‌ی ۲۰ بیان می‌شود:

$$w_L = \sum_{n=0}^{N=2} \alpha_n r^n w_s = (\alpha_2 r^2 + \alpha_0) w_s \quad (20)$$

خیز صفحه در حالت تغییر شکل کوچک براساس شرایط لبه‌ی گیردار به صورت رابطه‌ی ۲۱ محاسبه شده است:^[۱]

$$w_s = \frac{q}{64D} (r^4 - 2r^2 a^2 + a^4) \quad (21)$$

با جای‌گذاری رابطه‌ی ۲۰ در معادله‌ی ۲ و انتگرال‌گیری‌های لازم، تابع $\frac{d\Phi}{dr}$ استخراج می‌شود. ثابت‌های انتگرال‌گیری c_1 و c_2 حاصل از رابطه‌ی ۲۱، با بهره‌گیری از شرایط مرزی حاکم بر مسئله به دست می‌آید. به آسانی می‌توان صفر بودن ضریب ثابت c_2 را با توجه به محدود بودن تنش شعاعی در مرکز صفحه استنباط کرد، در حالی که محاسبه‌ی c_1 نیازمند بهره‌گیری از شرط مرزی حاکم بر مقدار تنش شعاعی بکنواخت موجود در لبه‌ی صفحه‌ی دایروی است (رابطه‌ی ۲۲):

$$\sigma_r \Big|_{r=a} = \sigma_0 \Rightarrow \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \Big|_{r=a} = \sigma_0 \quad (22)$$

که در آن، w_s بیانگر تابع خیز صفحه در حالت تغییر شکل‌های کوچک است. تحلیل معادله‌ی ۱۰ با روش‌های کلاسیک قابل انجام است.

از سوی دیگر، درک فیزیک مسئله مبین آن است که فزونی در مقدار بارهای خارجی، موجب افزایش تنش‌های غشایی در صفحه و اثرگذاری آن در سختی سازه می‌شود، به گونه‌یی که صرف نظر کردن از آن غیر قابل توجیه می‌شود. در این حالت مقبولیت فرضیات کیرشهف به مخاطره افتاده و پاسخ به دست آمده از رابطه‌ی ۱۰ با خطا همراه است. در این صورت، معادلات حاکم بر رفتار صفحه در اثر بارهای بزرگ مطابق با معادلات ۱ و ۲ است. تحلیل معادلات اخیر، مقدار تابع خیز ورق w_L را به دست می‌دهد. زیر نویس L نشان‌دهنده‌ی این واقعیت است که در استخراج تابع خیز و آفت صفحه از نگره‌ی تغییر شکل‌های بزرگ استفاده شده است.

اینک تابع جدید f به شرح رابطه‌ی ۱۱ تعریف می‌شود:

$$f = \frac{w_L}{w_s} \quad (11)$$

تابع f مقدار خیز صفحه را با در نظر گرفتن تنش‌های غشایی نسبت به مقدار خیز در حالتی که از اثرات تنش‌های غشایی صرف نظر شده است، نشان می‌دهد. به سهولت قابل پیش‌بینی است که کمیت f تابعی از مقدار بارهای خارجی وارد بر صفحه است، به گونه‌یی که به‌ازاء بارهای کوچک تابع مذکور متمایل به واحد و به‌ازاء بارهای بزرگ‌تر، مقدار آن رو به کاستی می‌گذارد و انحراف آن از واحد فزونی می‌پذیرد. به عبارت دیگر تابع f کران‌دار است، یعنی $0 < f \leq 1$ است.

از سوی دیگر، f تابعی از مختصه‌ی شعاعی r نیز است. اگرچه براساس پژوهش‌هایی که در این مطالعه به انجام رسیده است، برای محدوده‌ی خاصی از بارها می‌توان مقدار f را مستقل از r و به صورت عدد ثابت در نظر گرفت؛ لیکن در حالت کلی عدم توجه به این نکته موجب بروز خطاهای قابل توجه در پاسخ سازه می‌شود.

در صورتی که نقطه‌ی دلخواه واقع بر ورق دایروی در مختصات قطبی به صورت $z(r, \theta)$ نمایش داده شود، با بهره‌گیری از آنالیز توابع مختلط، نقطه‌ی مذکور را می‌توان به صورت متغیر مختلط z نمایش داد. درک فیزیکی مسئله و نیز توجه به کران‌دار بودن تابع مذکور گویای این مطلب است که تابع f مشتق‌پذیر است و می‌تواند به صورت سری مک لورن (رابطه‌ی ۱۲) مبسوط شود:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n \quad (12)$$

در این صورت تابع $f(z)$ تحلیلی است و تمامی مراتب مشتق را دارد، لذا سری ارائه شده در رابطه‌ی ۱۲ به مقدار $f(z)$ همگرا می‌شود. همچنین می‌توان اثبات کرد که سری مذکور از نوع سری‌های همگرای بکنواخت پیوسته است، لذا می‌توان از آن به صورت جمله به جمله انتگرال‌گیری کرد.^[۹]

با توجه به اینکه سازه تقارن مرکزی دارد، تابع $f(z)$ به‌ازاء $\theta = 0$ به صورت تابع حقیقی رابطه‌ی ۱۳ در می‌آید:

$$f(r) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} r^n \quad (13)$$

با عنایت به مطالب ذکر شده، سری نشان داده شده در رابطه‌ی ۱۳ به مقدار واقعی $f(r)$ همگرا می‌شود و با انتخاب جملات کافی از سری مذکور می‌توان پاسخ سازه را به‌ازاء تمام شرایط بارگذاری و نیز تمامی شرایط لبه‌ی محاسبه کرد.

پس از عبور از مرحله‌ی فوق، عبارت $\frac{d\Phi}{dr}$ مورد شناسایی قرار می‌گیرد. با توجه به اینکه تابع تنش فوق از تحلیل معادله‌ی دوم فون کارمن و نیز با در نظر گرفتن شرایط مرزی مسئله به دست آمده است، لذا تابع نشان داده شده در رابطه‌ی ۲۰، که به عنوان تقریب مناسبی برای خیز ورق پیشنهاد شده است، معادله‌ی ۲ را به صورت کامل ارضاء می‌کند، اما نمی‌تواند معادله‌ی ۱ را به صورت کامل ارضاء کند، زیرا ویژگی مذکور در انحصار پاسخ دقیق مسئله است که در دسترس نیست. به عبارت دیگر، در صورتی که مقدار باقیمانده روی دامنه‌ی Ω به شرح رابطه‌ی ۲۳ باشد:

$$Y = D \frac{d}{dr} \left(\nabla^2 w_L \right) - \psi - \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw_L}{dr} \quad (23)$$

مقدار مذکور فقط در صورتی مطلقاً برابر با صفر خواهد بود که تابع خیز به صورت دقیق، یعنی به ازاء $N = \infty$ برآورد شود. با عنایت به اینکه در فرمولاسیون حاضر $N = 2$ در نظر گرفته شده است، لذا مقدار باقیمانده‌ی ۲۳ روی دامنه‌ی Ω غیر صفر خواهد بود. بهترین تقریب در صورتی به دست می‌آید که ضرایب α_1, α_0 به گونه‌ی تعیین شود که باقیمانده‌ی مورد اشاره کمینه شود. بدین منظور از روش باقیمانده‌ی وزن‌دار استفاده می‌شود.^[۱۰] در این روش، تابع وزن به صورت $\frac{\partial w_L}{\partial \alpha_n}$ در نظر گرفته شده است و معادلاتی که بهترین پاسخ را به دست می‌دهد به صورت رابطه‌ی ۲۴ نمایش داده می‌شود:

$$\int_{\Omega} \frac{\partial w_L}{\partial \alpha_n} Y d\Omega = 0 \quad (24)$$

در حالت $N = 2$ مجهولات مسئله منحصر در پارامترهای α_0, α_1 و σ_0 است. حل این مجهولات نیازمند وجود ۳ معادله‌ی مستقل است، که باید به نحو شایسته‌ی تعیین شود. دو معادله از مجموعه معادلات مورد نیاز با جای‌گذاری $n = 0, 1$ در رابطه‌ی ۲۴ مطابق روابط ۲۵ و ۲۶ به دست می‌آید:

$$\int_0^a \left(D \frac{d}{dr} \left(\nabla^2 w_L \right) - \psi - \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw_L}{dr} \right) w_{Sr} dr = 0 \quad (25)$$

$$\int_0^a \left(D \frac{d}{dr} \left(\nabla^2 w_L \right) - \psi - \frac{h}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{dw_L}{dr} \right) w_{Sr} r dr = 0 \quad (26)$$

پس از فرآوری دو معادله‌ی ۲۵ و ۲۶، کوشش‌های لازم برای استخراج معادله‌ی سوم به شرح معادله‌ی ۲۷ انجام می‌شود:^[۱۱]

$$\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} = \frac{12}{h^2} \frac{dw}{dr} \left[\frac{du}{dr} + \nu \frac{u}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \right] + \frac{1}{Dr} \int_0^r q r dr \quad (27)$$

که در آن، w و u به ترتیب تغییرمکان‌های جانبی و درون صفحه‌ی ورق را نشان می‌دهد. رابطه‌ی ۲۷ به صورت رابطه‌ی ۲۸ بازنویسی می‌شود:

$$\frac{du}{dr} + \frac{\nu}{r} u + F = 0 \quad (28)$$

که در آن F از رابطه‌ی ۲۹ به دست می‌آید:

$$F = \frac{p}{h^2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 - \frac{d^2 w}{dr^2} - \frac{1}{r} \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r^2} \frac{dw}{dr} + \frac{q}{rD} r \quad (29)$$

طرفین معادله‌ی ذکر شده، در عامل انتگرال‌ساز r^ν ضرب می‌شود تا معادله‌ی ۳۰ به دست آید:

$$d(r^\nu u) = -r^\nu F \quad (30)$$

انتگرال‌گیری معین از طرفین رابطه‌ی ۳۰ در بازه‌ی $(0, a)$ با توجه به اینکه تغییرمکان‌های درون صفحه‌ی در لبه‌ی صفحه‌ی دایره‌ی برابر صفر است، به معادله‌ی ساده‌ی ۳۱ می‌انجامد:

$$\int_0^a r^\nu F dr = 0 \quad (31)$$

و بدین وسیله سومین معادله‌ی لازم برای محاسبه‌ی مجهولات مسئله فراهم می‌شود. دستگاه معادلات جبری ناخطی با استفاده از روش‌های تکراری حل می‌شود و مجهولات مسئله و در نهایت تابع خیز به دست خواهد آمد.

۴. نتایج

در این مطالعه، شعاع، ضخامت ورق، مدول کشسانی و نیز ضریب پواسون مصالح مطابق این مقادیر در نظر گرفته شده‌اند:^[۵]

$$E = 2 \times 10^8 \text{ N/m}^2, \quad h = 0.1 \text{ m}, \quad a = 1 \text{ m}, \quad \nu = 0.3$$

بار اعمالی نیز به صورت بار گسترده‌ی یکنواخت است.

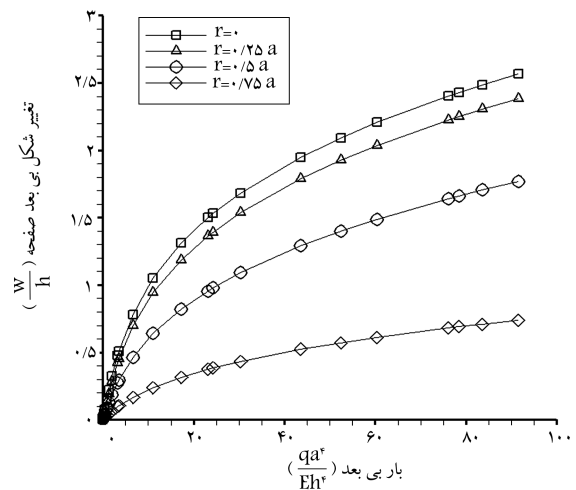
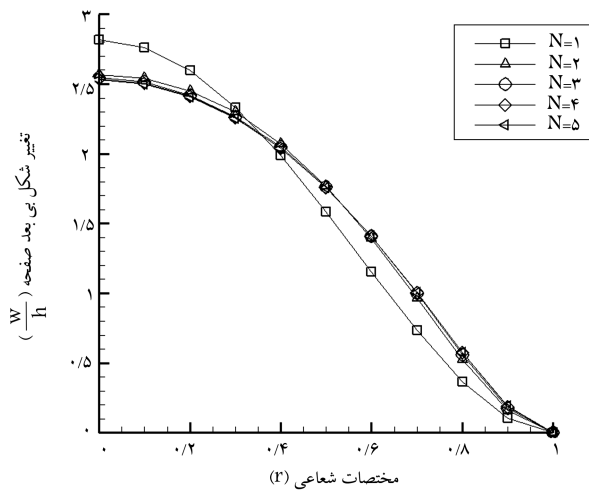
در جدول ۱ نتایج به دست آمده از روش پیشنهادی با نتایج حاصل از روش‌های موجود مورد مقایسه قرار گرفته است. مطالعه‌ی جدول مذکور و مقایسه‌ی پاسخ‌های به دست آمده از روش پیشنهادی با پاسخ‌های به دست آمده توسط تیموشنکو و دیگران تأییدکننده‌ی روش ارائه شده در این مطالعه است.

در شکل ۱، پاسخ سازه در نقاط مختلف صفحه ارزیابی شده است، که براساس آن (همچنان که مورد انتظار است) رابطه‌ی بار - تغییرشکل به صورت ناخطی است. به عبارت دیگر، افزایش بار اعمالی بر سازه موجب افزایش سختی خمشی صفحه است. فزونی سختی مذکور ناشی از نیروهای غشایی کششی ایجاد شده در صفحه است.

شکل ۲، تغییرات آفت مرکزی صفحه را با استفاده از روش پیشنهادی، روش تقریبی تیموشنکو و روش خطی‌سازی محلی (LTL) بر حسب مقدار بار اعمالی نشان می‌دهد. با توجه به نمودار مورد اشاره، به ازاء بارهای بزرگ، پاسخ مستخرج از روش پیشنهادی کوچک‌تر از پاسخ‌های به دست آمده از روش‌های

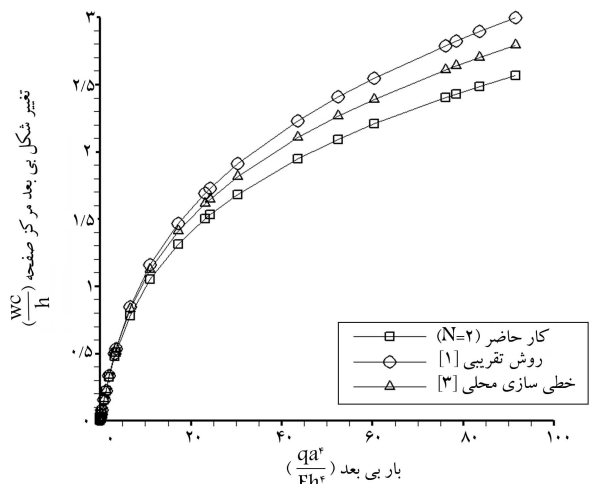
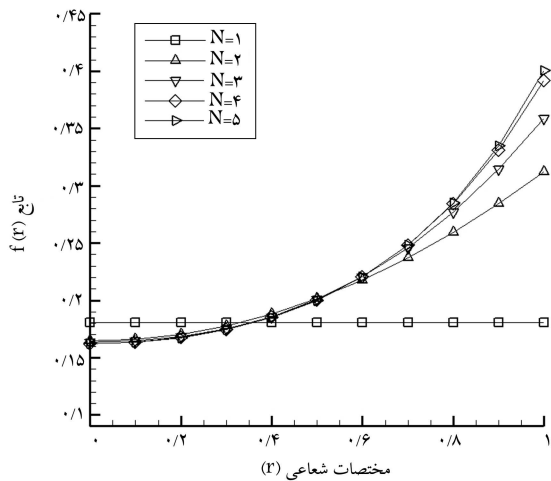
جدول ۱. خیز بی بعد مرکز صفحه‌ی دایره‌ی گیردار تحت بار گسترده یکنواخت.

$\frac{qa^4}{Eh^3} = 10$	$\frac{qa^4}{Eh^3} = 3$	$\frac{qa^4}{Eh^3} = 1$	
0.9953	0.4467	0.1672	کار حاضر ($N = 2$)
1.0509	0.4583	0.1678	روش تفاضل محدود ^[۵]
1.0512	0.4588	0.1680	روش اجزاء مرزی ^[۶]
1.0937	0.4655	0.1687	روش تقریبی تیموشنکو ^[۱]
1.0646	0.4653	0.1714	روش خطی‌سازی عرضی محلی ^[۳]
1.07062	0.5119	0.1706	نگره‌ی کلاسیک ^[۱]



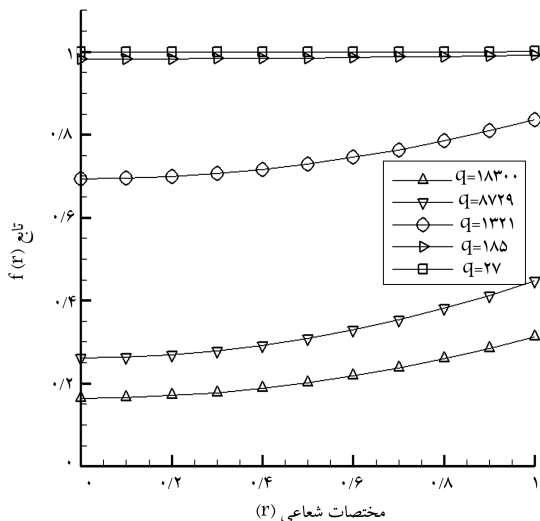
شکل ۱. نمودار تغییر شکل نقاط مختلف صفحه‌ی دایروی با لبه‌ی گیردار در مقابل بار عرضی یکنواخت به ازاء $(N = 2)$.

شکل ۲. مقایسه‌ی نمودار تغییر شکل مرکز صفحه‌ی دایروی با استفاده از روش‌های مختلف.



شکل ۳. تغییرات تابع $f(r)$ بر حسب مختصه‌ی شعاعی به ازاء تعداد جملات در نظر گرفته شده در سری مک‌لورن.

شکل ۴. تغییرات تابع $f(r)$ بر حسب مختصه‌ی شعاعی به ازاء تعداد جملات در نظر گرفته شده در سری مک‌لورن.



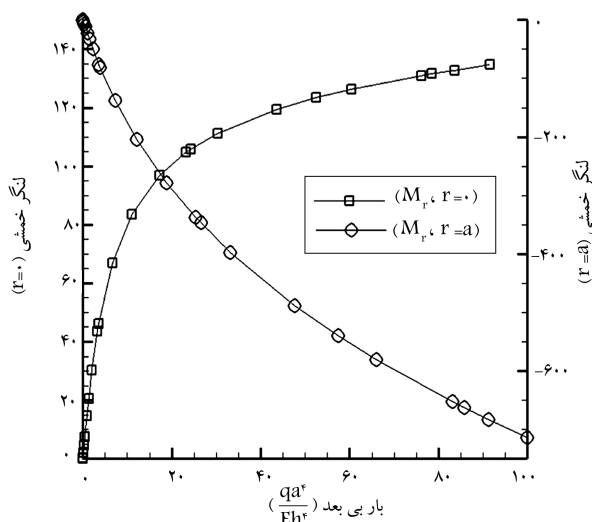
شکل ۵. تغییرات تابع $f(r)$ بر حسب مختصه‌ی شعاعی به ازاء بارهای مختلف برای $(N = 2)$.

تقریبی تیموشنکو و خطی‌سازی است. از آنجا که تقریب به‌کار رفته در این نوشتار، دقیق‌تر و جامع‌تر از تقریب‌های به‌کار رفته در روش‌های فوق‌الذکر است، لذا چنین به نظر می‌رسد که روش‌های تقریبی پاسخ‌های محافظه‌کارانه‌ی را به دست می‌دهد.

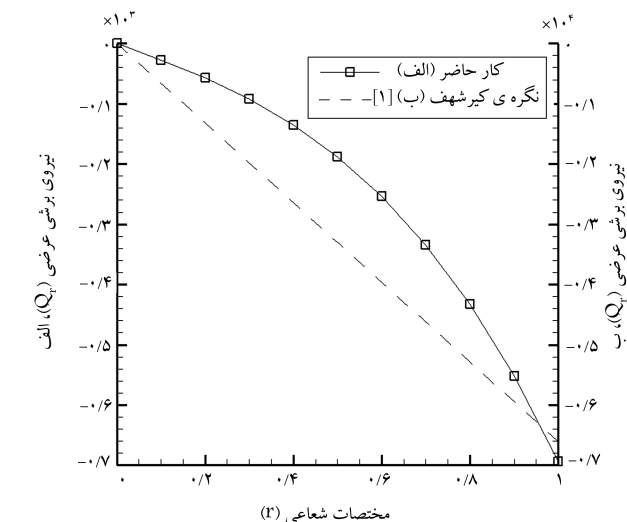
شکل ۳، تغییرات پاسخ سازه را بر حسب N در نقاط مختلف و با ازاء بار گسترده‌ی معین نشان می‌دهد. همچنان که مشهود است با انتخاب تعداد جملات کم‌تری در سری مک‌لورن می‌توان همگرایی را در پاسخ سازه رصد کرد.

از زاویه‌ی دیگری با توجه به شکل ۴ نیز می‌توان به نتیجه‌ی فوق دست یافت. در نمودار مذکور تغییرات تابع $f(r)$ بر حسب مختصه‌ی شعاعی به‌ازاء تعداد جملات در نظر گرفته شده در سری مک‌لورن نشان داده شده است. بر این اساس برای نیل به پاسخ دقیق، در نظر گرفتن تعداد معدودی از جملات اولیه‌ی سری f کفایت می‌کند و پاسخ مسئله به سرعت به خیز واقعی صفحه همگرا می‌شود.

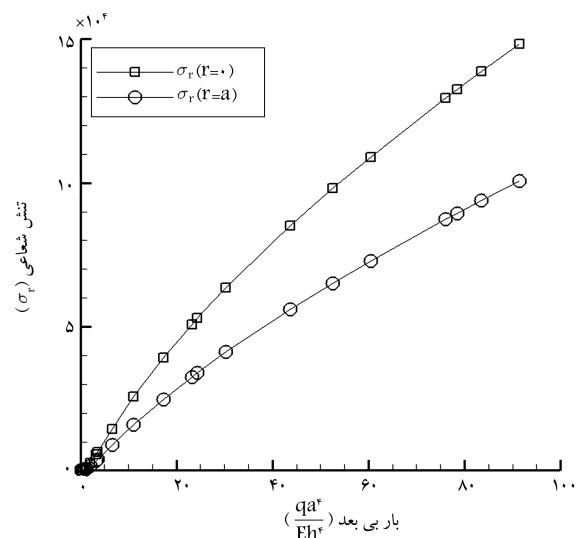
شکل ۵، تغییرات تابع $f(r)$ را به ازاء مقادیر مختلف بار عرضی اعمالی نمایش می‌دهد. بر اساس این نمودار به ازاء بارهای کوچک فرض ثابت بودن مقدار f که در



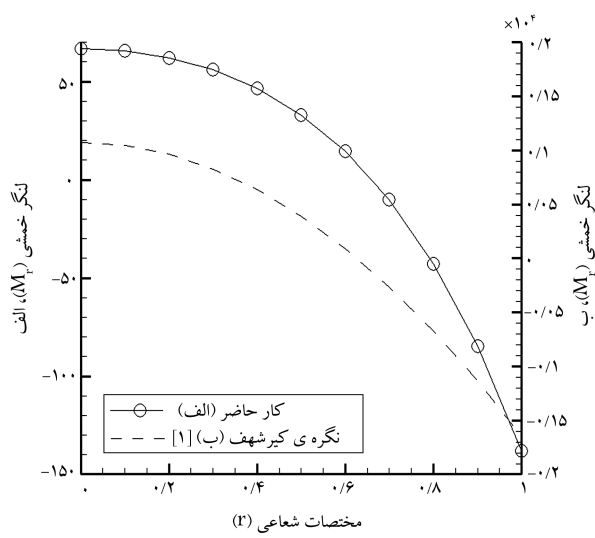
شکل ۸. تغییرات لنگر خمشی شعاعی در مرکز و لبه‌ی ورق بر حسب بار وارده به ازا (N = ۲).



شکل ۶. تغییرات نیروی برشی بر حسب مختصه‌ی شعاعی با استفاده از روش کلاسیک و روش پیشنهادی (N = ۲).



شکل ۹. تغییرات تنش شعاعی در مرکز و لبه‌ی ورق بر حسب بار وارده به ازا (N = ۲).



شکل ۷. تغییرات لنگر خمشی شعاعی بر حسب مختصه‌ی شعاعی با استفاده از روش کلاسیک و روش پیشنهادی (N = ۲).

موجب بزرگ‌تر شدن تنش‌های غشایی شده است و در نتیجه در نظر گرفتن نگره‌ی تغییرشکل‌های بزرگ در تحلیل خمشی صفحات امری لازم و ضروری است. در جدول ۲، مقادیر خیز مرکزی با استفاده از تئوری کلاسیک خطی و روش پیشنهادی حاضر به ازا درج‌های مختلف N نشان داده شده است. بر این اساس چنانچه تعداد ارقام معنادار مورد نیاز برای مقادیر پاسخ سازه برابر با ۳ رقم گزینش شود و همچنین خطای مورد قبول تا ۳٪ باشد، درجه‌ی مورد نیاز N بر اساس نتایج جدول ۲ به این صورت پیشنهاد می‌شود:

الف) تئوری کلاسیک خطی، در صورتی که $\frac{w_c}{h} \leq 0.2$.

ب) $N = 1$ در صورتی که $0.2 < \frac{w_c}{h} \leq 0.7$.

ج) $N = 2$ در صورتی که $0.7 < \frac{w_c}{h} \leq 0.8$.

با توجه به مطالب مذکور در بالا، اتخاذ روش مناسب برای تحلیل خمشی صفحات نازک، نیازمند آگاهی از مقدار نسبی خیز مرکزی به ضخامت ورق آن است.

روش پیشنهادی و نتسل [۸] و لی [۲] مورد استناد واقع شده است، می‌تواند به عنوان یکی از فرضیات حل مسئله معتبر دانسته شود؛ اما همزمان با افزایش بار وارده، فرضیه‌ی استقلال تابع مذکور از مختصه‌ی شعاعی متزلزل می‌شود و لازم است به صورت تابع درجه‌ی N مطابق رابطه‌ی ۱۴ اصلاح شود.

در شکل‌های ۶ و ۷، مقادیر نیروی برشی و لنگر خمشی در نقاط مختلف سازه با استفاده از روش کلاسیک، که مبتنی بر فرضیات کیرشفت است، با نتایج حاصل از روش پیشنهادی مورد مقایسه قرار گرفته است. با توجه به نمودارهای فوق، در نظر گرفتن تئوری تغییرشکل‌های بزرگ امری ضروری و اجتناب‌ناپذیر است، زیرا پاسخ‌های حاصل از روش کلاسیک حدود ۱۰٪ برابر بزرگ‌تر از پاسخ‌های حاصل از روش پیشنهادی به دست آمده است.

همچنین در شکل‌های ۸ و ۹ مقادیر لنگر خمشی و تنش شعاعی به ازا بارهای مختلف در مرکز و لبه‌ی ورق نشان داده شده است. بر اساس شکل ۹، تنش غشایی در مرکز ورق بزرگ‌تر از تنش به دست آمده در لبه‌هاست و افزایش بار اعمالی

جدول ۲. تغییرشکل بی بعد مرکز صفحه‌ی دایروی با کمک نگره‌های خطی و ناخطی تحت بارگذاری‌های مختلف.

qa^4/Eh^4	نگره‌ی کلاسیک ^[۱]	$N = 1$	$N = 2$	$N = 3$	$N = 4$	$N = 5$
۰٫۱	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۷	۰٫۱۶
۰٫۲۵	۰٫۴۳	۰٫۴۳	۰٫۴۳	۰٫۴۳	۰٫۴۳	۰٫۴۳
۰٫۴۵	۰٫۷۷	۰٫۷۷	۰٫۷۶	۰٫۷۶	۰٫۷۶	۰٫۷۶
۰٫۷	۱٫۱۹	۱٫۱۹	۱٫۱۸	۱٫۱۸	۱٫۱۸	۱٫۱۸
۱	۱٫۷۱	۱٫۶۸	۱٫۶۷	۱٫۶۷	۱٫۶۷	۱٫۶۷
۱٫۲۵	۲٫۱۳	۲٫۰۹	۲٫۰۷	۲٫۰۷	۲٫۰۷	۲٫۰۷
۱٫۷۵	۲٫۹۹	۲٫۸۵	۲٫۸۲	۲٫۸۳	۲٫۸۳	۲٫۸۳
۲	۳٫۴۱	۳٫۲۲	۳٫۱۸	۳٫۱۹	۳٫۱۹	۳٫۱۹
۲٫۵	۴٫۲۶	۳٫۹۲	۳٫۸۵	۳٫۸۶	۳٫۸۷	۳٫۸۷
۲٫۷۵	۴٫۶۹	۴٫۲۵	۴٫۱۶	۴٫۱۸	۴٫۱۹	۴٫۱۹
۳٫۲۵	۵٫۵۴	۴٫۸۸	۴٫۷۶	۴٫۷۸	۴٫۷۹	۴٫۷۹
۳٫۵	۵٫۹۷	۵٫۱۸	۵٫۰۴	۵٫۰۷	۵٫۰۷	۵٫۰۷
۴	۶٫۸۲	۵٫۷۴	۵٫۵۷	۵٫۶۰	۵٫۶۱	۵٫۶۰
۵	۸٫۵۳	۶٫۷۶	۶٫۵۲	۶٫۵۶	۶٫۵۷	۶٫۵۶
۶٫۵	۱۱٫۰۹	۸٫۰۸	۷٫۷۹	۷٫۷۷	۷٫۷۹	۷٫۷۸
۷٫۵	۱۲٫۷۹	۸٫۸۴	۸٫۴۵	۸٫۴۸	۸٫۴۹	۸٫۴۹
۸٫۵	۱۴٫۵۰	۹٫۵۴	۹٫۰۹	۹٫۱۲	۹٫۱۳	۹٫۱۲
۱۰	۱۷٫۰۶	۱۰٫۴۸	۹٫۹۵	۹٫۹۷	۹٫۹۸	۹٫۹۸
۱۱	۱۸٫۷۶	۱۰٫۵	۱۰٫۴۸	۱۰٫۴۹	۱۰٫۴۹	۱۰٫۴۹
۱۵	۲۰٫۵۵۹	۱۳٫۰۱	۱۲٫۲۷	۱۲٫۲۵	۱۲٫۲۴	۱۲٫۲۴
۱۷٫۲۵	۲۰٫۹۴۳	۱۳٫۹۴	۱۳٫۱۲	۱۳٫۰۸	۱۳٫۰۷	۱۳٫۰۷
۲۳	۳۰٫۹۲۴	۱۵٫۹۷	۱۴٫۹۵	۱۴٫۸۷	۱۴٫۸۵	۱۴٫۸۵
۲۴	۴۰٫۹۵	۱۶٫۲۸	۱۵٫۲۳	۱۵٫۱۵	۱۵٫۱۲	۱۵٫۱۲
۳۰	۵۰٫۱۱۸	۱۷٫۹۷	۱۶٫۷۵	۱۶٫۶۴	۱۶٫۵۹	۱۶٫۵۹
۴۳٫۵	۷۰٫۴۲۲	۲۰٫۱۰۳	۱۷٫۹۴	۱۷٫۹۳۰	۱۷٫۹۲۳	۱۷٫۹۲۲
۵۲٫۵	۸۰٫۹۵۷	۲۰٫۲۷۰	۲۰٫۹۲	۲۰٫۷۵	۲۰٫۶۶	۲۰٫۶۴
۶۰	۱۰۰٫۲۳۷	۲۰٫۳۹۴	۲۰٫۲۰۰	۲۰٫۱۸۲	۲۰٫۱۷۲	۲۰٫۱۶۹
۷۵	۱۲۰٫۷۹۶	۲۰٫۶۱۱	۲۰٫۳۸۹	۲۰٫۳۷۰	۲۰٫۳۵۸	۲۰٫۳۵۴
۸۵	۱۴۰٫۵۰۳	۲۰٫۷۴۰	۲۰٫۵۰۰	۲۰٫۴۸۱	۲۰٫۴۶۸	۲۰٫۴۶۳
۹۵	۱۶۰٫۲۰۹	۲۰٫۸۵۸	۲۰٫۶۰۲	۲۰٫۵۸۳	۲۰٫۵۶۹	۲۰٫۵۶۴
۱۰۰	۱۷۰٫۰۶۳	۲۰٫۹۱۴	۲۰٫۶۵۰	۲۰٫۶۳۱	۲۰٫۶۱۷	۲۰٫۶۱۱
۲۰۰	۳۴۰٫۱۲۵	۳۰٫۷۵۸	۳۰٫۳۷۴	۳۰٫۳۶۲	۳۰٫۳۴۱	۳۰٫۳۲۹
۵۰۰	۸۵۰٫۳۱۲	۵۰٫۱۹۳	۴۰٫۶۰۰	۴۰٫۶۱۰	۴۰٫۵۷۲	۴۰٫۵۵۹
۱۰۰۰	۱۷۰۰٫۶۲۵	۶۰٫۵۹۴	۵۰٫۷۹۸	۵۰٫۸۳۴	۵۰٫۷۷۴	۵۰٫۷۶۷

بدهی است تا قبل از انجام تحلیل، هیچ‌گونه آگاهی از این نسبت در دست نیست، لذا تحلیل ناخطی هندسی سازه ماهیتی تکراری دارد.

در اولین گام، تحلیل خمشی صفحه در پرتو نگره‌ی کلاسیک خطی انجام می‌پذیرد و در پایان، نسبت خیز مرکز ورق به ضخامت آن به دست می‌آید. چنانچه نسبت مذکور در بازه‌ی $0.2 \leq \frac{w_c}{h}$ باشد، پاسخ به دست آمده به عنوان پاسخ نسبتاً دقیق لحاظ می‌شود؛ در غیر این صورت لازم است از تحلیل ناخطی هندسی صفحات استفاده شود.

در ادامه $N = 1$ می‌تواند به عنوان دومین گام از مراحل تحلیل خمشی صفحات تلقی شود. بدین منظور تابع f مستقل از مختصات شعاعی فرض می‌شود و پاسخ سازه به دست می‌آید:

مقبولیت این پاسخ، منوط به قرارگیری نسبت خیز مرکزی ورق به ضخامت آن در بازه‌ی $0.2 \leq \frac{w_c}{h} < 0.7$ است. در صورتی که $\frac{w_c}{h} > 0.7$ باشد، لازم است از تعداد جملات بیشتری در سری مک‌لورن استفاده شود.

بدین منظور عملیات لازم برای تخمین تابع f به انجام می‌رسد. پس از محاسبه‌ی تابع فوق‌الذکر، خیز مرکزی ورق به دست می‌آید و با توجه به دقت موردنظر، پاسخ به دست آمده مورد ارزیابی قرار می‌گیرد و در معرض ابرام یا تردید واقع می‌شود.

برای مثال تحلیل ورق به ازاء بار نسبتاً بزرگ $\frac{qa^4}{Eh^4} = 4$ با $N = 2$ به پاسخ دقیق همگرا می‌شود، در حالی که اگر این مسئله به روش کلاسیک تحلیل شود، پاسخ به دست آمده نسبت به جواب دقیق فوق‌الذکر، خطای 22.44% و در صورتی که با $N = 1$ تحلیل شود، خطای 3.05% دارد. برای بارهای خیلی بزرگ پاسخ دقیق با افزایش تعداد جملات بیشتری در سری مک‌لورن محقق می‌شود، به عنوان نمونه برای $\frac{qa^4}{Eh^4} = 1000$ ، پاسخ به دست آمده با کمک $N = 5$ نسبت به جواب تئوری کلاسیک، خطای بسیار زیادی دارد؛ در حالی که اگر صفحه با $N = 1$ و $N = 2$ مورد تحلیل قرار گیرد، نسبت به پاسخ $N = 5$ به ترتیب خطاهای 1.34% و 0.537% خواهد داشت. با توجه به مثال‌های ارائه‌شده، طراح قادر خواهد بود براساس مقدار خطای قابل اغماض، تعداد جملات را در سری مک‌لورن انتخاب کند.

۵. نتیجه‌گیری و پیشنهادات

در این مطالعه، با استفاده از سری‌های توانی و بسط مک‌لورن، دستگاه معادلات فون کارمن برای ورق‌های دایره‌ای با لبه‌ی گیردار مورد تجزیه و تحلیل قرار گرفته است. در روش پیشنهادشده در این مطالعه، تابع خیز ورق در مقایسه با روش‌های تحلیلی موجود با دقت بیشتری برآورد شده است. روش‌های عددی موجود به ازاء بارهای کوچک تا متوسط می‌تواند پاسخ را با دقت قابل قبولی به دست دهد، لیکن براساس پژوهش‌های ارائه‌شده در این نوشتار، به ازاء بارهای بزرگ، خطای زیادی را نتیجه می‌دهد.

روش پیشنهادشده با توجه به بزرگی بار اعمالی، تحلیل صفحات دایره‌ای در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ را با انتخاب مناسب پارامتر N ادامه می‌دهد تا با توجه به میزان دقت موردنیاز، پاسخ را به دست دهد.

به عنوان مثال، تحلیل صفحه‌ی دایره‌ای تحت تأثیر بار $\frac{qa^4}{Eh^4} = 10$ در حوزه‌ی تغییرشکل‌های بزرگ، به ازاء نگره‌ی کلاسیک خطایی فزون‌تر از 7% را نشان می‌دهد و حال آنکه به ازاء $N = 1$ ، میزان خطا به محدوده‌ی 5% نزدیک می‌شود.

ویژگی بارز روش پیشنهادی، سهولت مبانی تحلیلی آن و نیز قابلیت تعمیم آن برای شرایط مرزی متفاوت و بارگذاری‌های مختلف همراه با سرعت همگرایی بسیار بالای آن است، به گونه‌ی که آن را در مقایسه با روش‌های تحلیلی موجود ممتاز می‌کند.

با عنایت به ویژگی‌های فوق، تحلیل ورق‌های دایره‌ای واقع بر شرایط لبه‌ی گیردار، ساده و ارتجاعی تحت تأثیر بار متمرکز و نیز تحلیل صفحات دایره‌ای حلقوی مستقر بر لبه‌های گیردار، ساده، آزاد و ارتجاعی تحت تأثیر بارهای گسترده می‌تواند عناوین مناسبی برای پژوهش‌های آینده تلقی شود.

همچنین از آنجا که یکی از فرضیات اساسی این مطالعه، پذیرش رفتار ارتجاعی برای مصالح سازه است، با توجه به اینکه در اثر بروز تغییرشکل‌های بزرگ، بخش‌هایی از صفحه به منطقه‌ی خمیری مصالح ورود پیدا می‌کند، تحلیل خمشی صفحات با در نظر گرفتن رفتار ناخطی هندسی و ناخطی مصالح می‌تواند یکی از زمینه‌های مناسب برای پژوهش‌های آینده پیشنهاد شود.

پانویس‌ها

1. middle plane
2. homogeneous
3. isotrope
4. Von karmen
5. numerical methods
6. incremental load
7. locally transversal linearization
8. clamped edge

منابع (References)

1. Timoshenko, S.P. and Woinowsky-kreiger, S., *Theory of Elastic Plates and Shells*, 2nd edition, McGraw- Hill, New York, p. 417 (1959).
2. Li, Q.S., Liu, J. and Xiao, H.B. "A new approach for bending analysis of thin circular plates with large deflection", *International Journal of Mechanical Sciences*, **46**(2), pp. 173-180 (2004).
3. Ramachandra, L.S. and Roy, D. "A novel technique in

- the solution of axisymmetric large deflection analysis of a circular plate”, *Journal of Applied Mechanics, ASME*, **68**(5), pp. 814-816 (2001).
4. Cao, J.J. “Computer-extended perturbation solution for the large deflection of a circular plate, 2, central loading with clamped edge”, *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **50**, pp. 333-347 (1997).
 5. Altekin, M. and Yükseler, R.F. “Large deflection analysis of clamped circular plates”, *Proceedings of the World Congress on Engineering*, III WCE, London, U.K. (6-8 July 2011).
 6. DaSilva, P.P. and Krauth, W. “Numerical solution of the von Karman equations for a thin plate”, *International Journal of Modern Physics C*, **8**(2), pp. 427-434 (1997).
 7. Ye, J. “Large deflection analysis of axisymmetric circular plates with variable thickness by the boundary element method”, *Applied Mathematical Modelling*, **15**(6), pp. 325-328 (June 1991).
 8. Ventsel, E. and Krauthammer, T., *Thin Plates and Shells: Theory, Analysis, and Applications*, McGraw-Hill, New York, p. 666 (2001).
 9. Kreyszig, E., *Advanced Engineering Mathematics*, 2nd edition, McGraw- Hill, New York, p. 1264 (2010).
 10. Zienkiewicz, O.C. and Morgan, k., *Finite Elements and Approximation*, John Wiley, New York, p. 328 (1983).