

اثر شرایط تکیه‌گاهی در ارتعاش اعضاء محوری (تیرهای کش) و تحلیل حساسیت پارامترهای مؤثر در ارتعاش

محسن گرامی* (دانشیار)

دانشکده‌ی مهندسی عمران، دانشگاه سمنان

نوید سیاه‌پلو (استادیار)

گروه مهندسی عمران، جهاد دانشگاهی خوزستان

مهندسی عمران شریف، (بهار ۱۳۹۵)
دوری ۲ - ۳۲، شماره ۱/۱، ص. ۸۹-۷۷، (پادداشت فنی)

کاربرد المان‌های مهاری (کش‌ها) در ساختمان‌های تاریخی از گذشته رایج بوده است و برای تأمین پایداری قوس‌ها، حد فاصل پای قوس اجرا می‌شود. بازبینی المان کش از نظر نیروی موجود برای بررسی نیاز به تعویض آن با یک المان جدید در فرایند کنترل سلامت سازه، امری ضروری است. در این پژوهش ضمن بررسی ویژگی دینامیکی کش‌ها، تأثیر شرایط تکیه‌گاهی، طول تیرکش، سختی محوری و خمشی و نیروی محوری در بسامد ارتعاشی آن ارزیابی و گراف‌های کاربردی برای برآورد نیروی محوری موجود تیر متناظر با شرایط تکیه‌گاهی مختلف تهیه شده است. از طرفی برای شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم، نیروی محوری و سختی خمشی حاصل از روش تحلیلی با مقادیر آزمایشگاهی مندرج در برخی تحقیقات^[۱] مقایسه شده است. نتایج به دست آمده، نشان دهنده‌ی تأثیر پارامترهای مذکور در بسامد اصلی تیر است. از طرفی نیروی محوری فشاری و کششی حاصل از روش تحلیلی با نتایج آزمایشگاهی پژوهش‌های مشابه^[۱] تطابق خوبی را نشان داده است. همچنین با افزایش نیروی محوری فشاری، سختی خمشی دو انتهای تیر از شرایط گیرداری کامل فاصله می‌گیرد. به علاوه رابطه‌ی پیشنهادی نیومارک می‌تواند تقریب قابل قبولی از نیروی محوری موجود در تیرکش را ارائه کند.

واژگان کلیدی: المان کش، بسامد ارتعاشی، شرایط تکیه‌گاهی، سختی خمشی، نیروی محوری.

mgerami@semnan.ac.ir
n_siahpolo@mjdtkh.ac.ir

۱. مقدمه

تأمین می‌شود. نتایج پژوهش‌ها بر روی یک ساختمان تاریخی متعلق به قرن نوزدهم، به‌خوبی تأثیر وجود کش‌ها در حد فاصل قوس دهانه‌های سقف را اثبات کرده است. بررسی‌های صورت‌گرفته در بیشتر ساختمان‌های تاریخی مؤید این نکته است که این المان‌های مهاری معمولاً از چوب و فولاد با کیفیت کم ساخته شده‌اند. در تیر کش فولادی، مقطع آن فاقد یک شکل منظم و دقیق است، زیرا در گذشته عملیات نورد فولاد را آهنگران انجام می‌دادند. به دلیل نبود تکنولوژی پیشرفته در فرایند تولید فولاد، این المان‌ها فاقد مقاومت کششی کافی بوده‌اند. نکته‌ی دیگر، نحوه‌ی اتصال این المان‌ها به قوس است. فرم‌های مختلفی در این خصوص وجود داشته است، که معمولاً مکانیزم آن‌ها شبیه اتصال گیردار بوده است. امروزه به دلیل در دسترس بودن انواع پروفیل‌های صنعتی و ساختمانی معمولاً از مقطع دایره یا مربع به‌عنوان المان مهاری استفاده می‌شود. می‌توان به نمونه‌های مختلفی همچون بنای تاریخی ماربا آسونتا در پرتغال، ساختمان قصر ولادیسلاو در پراگ و بنای لودویکو ال مورو در ایتالیا اشاره کرد. در تمامی این بناها از المان مهاری با مقطع مربع استفاده شده است (شکل ۱).

استفاده از کش‌ها از دیرباز در ساختمان‌های تاریخی برای تأمین پایداری جانبی قوس در برابر بارهای سرویس و بعضاً بارهای جانبی همچون زلزله و باد کاربرد داشته است. بنابراین بازرسی مداوم این المان‌ها به‌صورت دوره‌ی بسیار اهمیت دارد و تعیین نیروی محوری موجود در آنها امری ضروری است. بدیهی است با کاهش نیروی محوری کششی موجود، این مسئله مطرح می‌شود که حرکت جانبی قوس افزایش و به دنبال آن نیروی کششی المان به حرکت قوس کاهش می‌یابد. از طرفی در صورت نشست غیرمتقارن قوس، مؤلفه‌ی افقی نیروی وارد بر قوس شکل می‌گیرد و به دلیل سختی خمشی کم برون‌صفحه در قوس‌های آجری، مجموعه‌ی سازه یا بخشی از آن دچار گسیختگی می‌شود. اگر یک المان افقی با مقاومت کششی بالا استفاده شود، نیروی نامتوازن شکل‌گرفته توسط آن تحمل می‌شود و به نوعی پایداری سازه

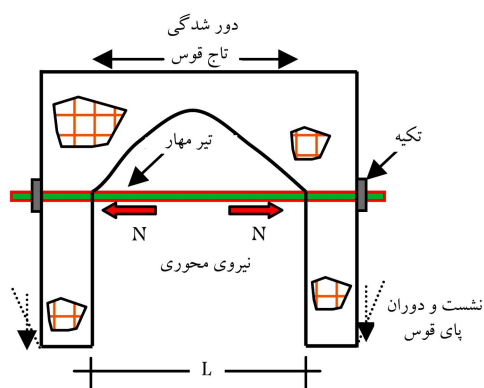
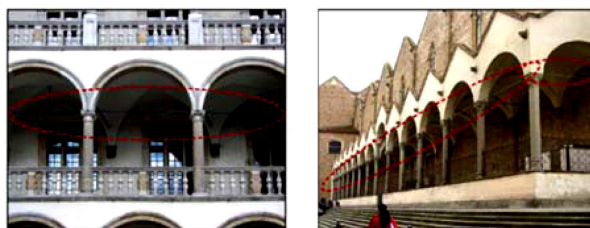
* نویسنده مسئول

تاریخ دریافت: ۱۳۹۲/۶/۱۹، اصلاحیه ۱۳۹۳/۲/۱۴، پذیرش ۱۳۹۳/۳/۳۱.

خمش - محوری المان را در محاسبات منظور کرد. بدین منظور تیر به صورت دو سر ساده با تعریف فنرهای پیچشی در دو انتهای المان مدل‌سازی و برای تعیین نیروی محوری از روش‌های عددی، که مبتنی بر کمینه‌سازی تابع خطای محاسباتی است، استفاده شده است. سپس برای ارزیابی صحت مدل پیشنهادی، ضمن ساخت مدل در نرم‌افزار اجزاء محدود، نتایج حاصل با نتایج آزمایش درجا کنترل شده است.^[۷] در پژوهش دیگری در سال ۱۹۹۵، نیروی محوری کششی براساس ۳ بسامد اول ارتعاشی تیر و به کمک تخمین کمینه‌ی مربعات وزنی، و از طرفی نیروی کششی، سختی خمشی و سختی محوری با استفاده از بسامدهای طبیعی المان مهاری و با انجام روش تشخیص دینامیکی محاسبه شده است.^[۱۶] همچنین در سال ۲۰۰۶ شرایط تکیه‌گاهی تیر به صورت دو سر ساده به همراه فنرهای پیچشی در دو انتها مدل‌سازی و صحت نتایج با نتایج حاصل از کار آزمایشگاهی کنترل شده است.^[۸] پژوهش‌های دیگری نیز در این زمینه انجام شده است.^[۱۷-۲۰] روش دیگری هم در پژوهشی در سال ۲۰۱۰، برای محاسبه‌ی نیروی محوری کششی مهار در محل انجام آزمایش ارائه شده است، که در آن با اعمال ضربه توسط چکش، اولین بسامد طبیعی ارتعاش به کمک تابع پاسخ بسامدی محاسبه و سپس به کمک روش وزن‌دهی اختلاف بین نتایج تئوری و عملی، تأثیر پارامترهای مجهول در بسامد کاهش داده شده است. مهم‌ترین نقطه ضعف روش مذکور، وقت‌گیر بودن فرایند کمینه‌سازی است، که نیازمند محاسبه‌ی حجم گسترده‌ی مسئله‌ی مقدارویژه است. مهم‌ترین ویژگی آن قابلیت استفاده‌ی درجا از این آزمایش است.^[۲۱]

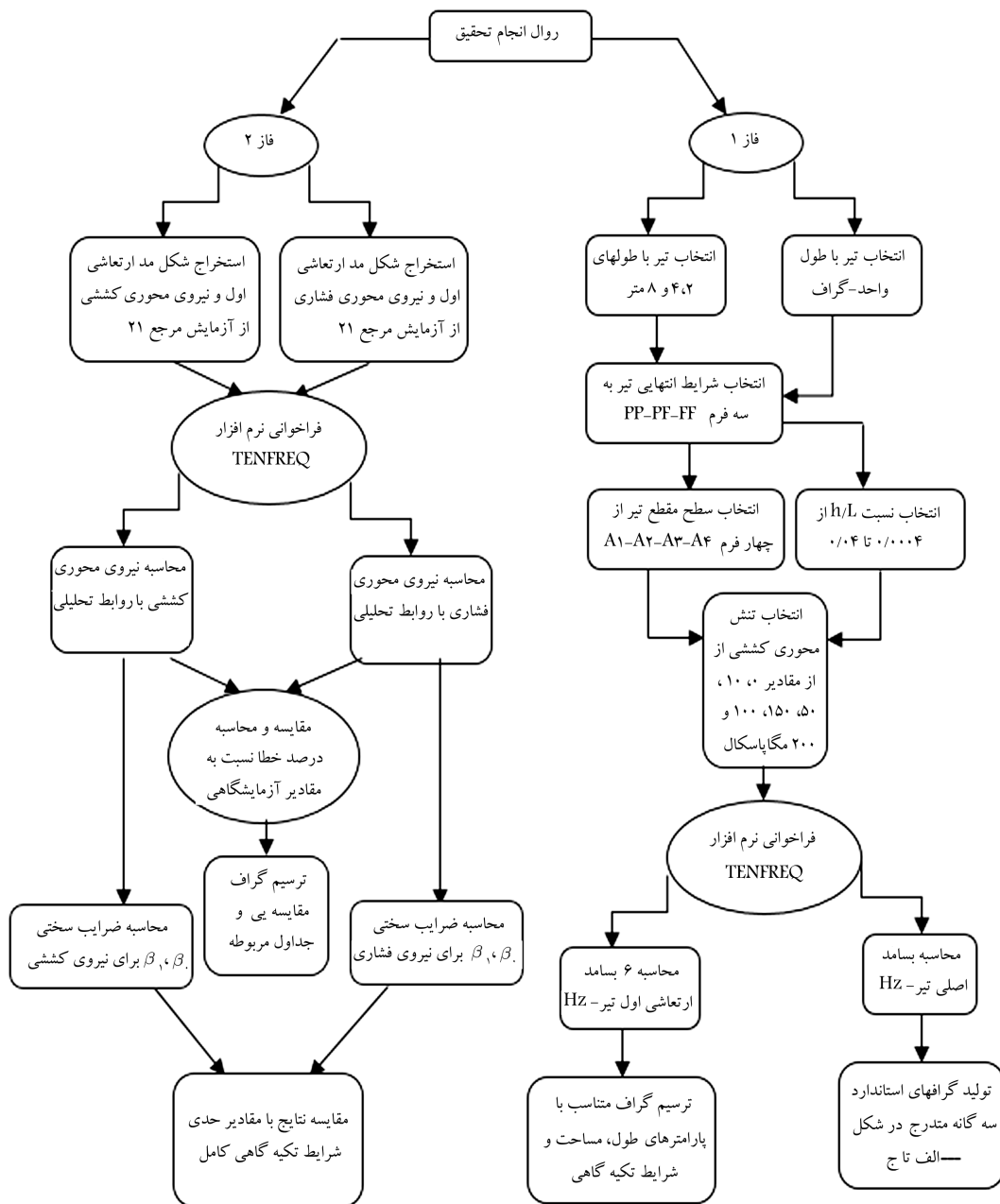
در این پژوهش تلاش شده است تا در دو فاز مجزا، تأثیر نیروی محوری کششی و فشاری در مشخصه‌های دینامیکی تیر کش بررسی و اثر پارامترهای مختلف از قبیل: سطح مقطع، طول، شرایط تکیه‌گاهی و نیروی محوری در بسامد ارتعاشی ارزیابی شود. برای مدل‌سازی تیر از مدل اویلر - برنولی استفاده شده است. در فاز اول، که تیر تحت اثر نیروی محوری کششی قرار گرفته است، اثر هر یک از موارد ذکرشده به طور جداگانه بررسی و نتایج در قالب گراف‌های مجزایی ارائه شده است. بدین جهت ۲۷ نمونه‌ی مجزا تحلیل شده است. برای محاسبه‌ی اثر پارامترهای مختلف، برنامه‌ی در MATLAB با نام TENFREQ توسط نگارندگان این نوشتار، نگارش و نتایج آن با نرم‌افزار SAP۲۰۰۰^[۲۲] مقایسه شده است.

در فاز دوم با استفاده از نتایج آزمایش به دست آمده از مرجع^[۱]، تأثیر نیروی محوری فشاری و کششی و فرآیند محاسبه‌ی آن به کمک روابط تحلیلی بررسی و نتایج با مقادیر به دست آمده از آزمایش در جای مرجع^[۱] مقایسه شده است. نکته‌ی بسیار مهم اینکه در این فاز سختی خمشی دو انتهای تیر نامعلوم فرض شده است، زیرا در بسیاری از حالات موجود، شرایط تکیه‌گاهی انتهایی مشخص نیست. آنگاه به کمک روابط تحلیلی و با استفاده از نتایج آزمایشگاهی مرجع مذکور، سختی خمشی - پیچشی دو انتهای تیر محاسبه و با شرایط حدی دو سر مفصل و دو سر گیردار مقایسه شده است. از طرفی خطای محاسباتی بین نتایج تحلیلی و آزمایشگاهی مرجع^[۱]، جهت اثبات صحت روابط تحلیلی محاسبه شده است. نتایج به دست آمده مؤید تأثیرپذیری قابل توجه بسامد تیر از پارامترهای سطح مقطع، طول، شرایط تکیه‌گاهی و نیروی محوری است. با افزایش طول تیر، تأثیر نیروی محوری در تغییر بسامد کاهش می‌یابد. از طرفی تبدیل شرایط تکیه‌گاهی از مفصل به گیردار باعث افزایش بسامد ارتعاشی شده است. همچنین برای شرایط تکیه‌گاهی گیردار در دو انتها، افزایش سطح مقطع تیر برای یک تنش محوری ثابت باعث افزایش بسامد شده است. از طرفی مقایسه‌ی نتایج آزمایشگاهی مرجع^[۱]، با مقادیر حاصل از روابط



شکل ۱. نمونه‌هایی از کاربرد المان تیر مهار به همراه شرایط اتصال انتهایی آن به دیوارهای مجاور.

همان‌گونه که پیشتر گفته شده است، محاسبه‌ی نیروی محوری کششی در المان‌های مهاری، اهمیت بسیار بالایی دارد. بدین منظور روش‌های مختلفی پیشنهاد شده است، که عمدتاً مبتنی بر ارزیابی مشخصات ارتعاشی المان از طریق انجام آزمایش‌های غیرمخرب در محل هستند.^[۸-۱۰] یکی از روش‌های رایج، ثبت کرنش و تغییرمکان است. مثلاً در پژوهشی در سال ۲۰۰۱، ضمن اعمال بار متمرکز در میانه‌ی تیر، ۳ مؤلفه‌ی تغییرمکان و نرخ تغییرات کرنش کمینه در ۳ مقطع مختلف تیر ثبت و با روابط کلاسیک تئوری کشسانی نیروی محوری تیر محاسبه شده است. برای تأیید صحت نتایج، مدل آزمایشگاهی تهیه و شرایط تکیه‌گاهی تیر معلوم فرض شده است.^[۹] از طرفی محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری بحرانی با شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم نیز در برخی کارهای پژوهشی مشاهده شده است. همچنین در برخی پژوهش‌ها، ضمن محاسبه‌ی تغییرشکل در مرکز تیر تحت اثر نیروهای مختلف فشاری و ترسیم نمودار تغییرشکل تیر در برابر نسبت خیز به نیروی محوری فشاری، مقادیر نیروی بحرانی کماتشی محاسبه شده است.^[۱۰-۱۱] در پژوهش دیگری در سال ۱۹۵۲، با استناد به این موضوع که با افزایش نیروی محوری فشاری، بسامد تیر کاهش یافته و رابطه‌ی بسامد با نیروی محوری خطی است، نیروی بحرانی کماتشی محاسبه شده است.^[۱۲] نکته‌ی مهم اینکه در تمامی موارد شرایط تکیه‌گاهی به عنوان یک پارامتر معلوم تعریف شده‌اند.^[۱۳-۱۵] یکی دیگر از روش‌های پیشنهادی، استفاده از آزمایش دینامیکی غیرمخرب است. مهم‌ترین ویژگی این آزمون نسبت به روش استاتیکی این است که به کمک آن می‌توان اثر شرایط تکیه‌گاهی و سختی



شکل ۲. مراحل طبقه بندی شده انجام پژوهش.

۲. معرفی مدل تحلیلی

۲.۱. هندسه تیر و نام گذاری مدل ها

همانگونه که در مقدمه ذکر شده است، فرایند پژوهش در دو بخش تقسیم بندی شده است. در فاز اول شرایط تکیه گاهی تیر از قبل معلوم است. در این حالت تحلیل حساسیت بسامد با تغییر در پارامترهای مختلفی همچون: سطح مقطع، طول، شرایط تکیه گاهی و تنش محوری کششی انجام شده است. در شکل ۳، تصویر شماتیک مدل های فاز یک نمایش داده شده است. از طرفی در جدول ۱، مشخصات مربوط به هر یک از مدل های مورد استفاده ارائه شده است.

تحلیلی مؤید اعتبار روابط تحلیلی است. همچنین نیروی بحرانی کمانشی فشاری به دست آمده از رابطه تئوری با مقدار متناظر با آن که از آزمایش مرجع^[۱] به دست آمده است، اختلاف ناچیزی دارد. از طرفی برای مقادیر نیروی محوری کم، سختی خمشی دو انتهای تیر به دست آمده از روابط تحلیلی با استفاده از نتایج آزمایشگاهی مرجع^[۱] با مقدار متناظر با آن برای شرایط حدی دو انتهای گیردار تقریباً منطبق است؛ اما با افزایش نیروی محوری خطای مقادیر به دست آمده از رابطه تحلیلی در مقایسه با مقادیر حدی افزایش می یابد. در انتهای این بخش برای آشنایی با فرایند کلی این پژوهش، شکل ۲ ارائه شده است، که گام های اصلی پژوهش را نشان می دهد.

جدول ۱. مشخصات و نام‌گذاری مدل‌های مورد استفاده در فاز ۱.

ردیف	طول تیر (m)	نام مقطع	ارتفاع پروفیل (cm)	عرض پروفیل (cm)	جرم واحد حجم (kg/m ^۳)	مدل کشسانی (Gpa)	تنش محوری (Mpa)
۱		A _۱	۱۰				۰، ۱۰، ۵۰
۲	۸ و ۴، ۲	A _۲	۲۰	۴۰	۷۸۵	۲۱۰	۲۰۰ و ۱۵۰، ۱۰۰
۳		A _۳	۳۰				
۴		A _۴	۴۰				

جدول ۲. مشخصات و نام‌گذاری مدل‌های مورد استفاده در فاز ۲.

ردیف	ماهیت نیرو	مقطع (mm)	مدل کشسانی (Gpa)	L (m)	L _s (m)	L _d (m)
۱	کششی	دایره به قطر ۲۰	۱۹۶	۳٫۶۲۵	۰٫۷۹۷	۰٫۹۸۵
۲	فشاری	جعبه ۳×۳×۸۰	۲۰۶	۲٫۳۸	۰٫۵	۰٫۵۶

۱ است:

$$\frac{\partial^4 v(x,t)}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + \frac{\bar{m}}{EI} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} = P(x,t) \quad (1)$$

شیوهی حل این معادله‌ی دیفرانسیل، به تفکیک متغیر معروف است. اگر مسئله در حالت ارتعاش آزاد بررسی شود، دو معادله‌ی مستقل ۲ و ۳ به دست می‌آیند:

$$\frac{d^4 \Phi(x)}{dx^4} - \delta^2 \frac{d^2 \Phi(x)}{dx^2} - \alpha^2 \Phi(x) = 0 \quad (2)$$

$$\frac{d^4 Y(t)}{dt^4} + \omega^2 Y(t) = 0 \quad (3)$$

در رابطه‌ی ۲، $\delta^2 = P/EI$ و $\alpha^2 = \omega^2 \bar{m}/EI$ است. نکته‌ی قابل ذکر این است که بررسی رابطه‌ی ۲ نشان می‌دهد که نیروی محوری کششی در شکل مود ارتعاشی و بسامدهای ارتعاشی تیر تأثیرگذار است. از آنجا که در این مطالعه یکی از اهداف پژوهش، محاسبه‌ی ویژگی‌های ارتعاشی تیر است، بنابراین تمام محاسبات بر مبنای حل معادله‌ی ۲ استوار است. حل کلاسیک معادله‌ی مذکور به صورت رابطه‌ی ۴ است:

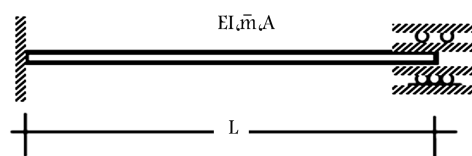
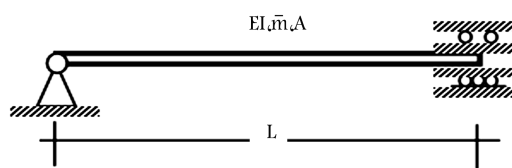
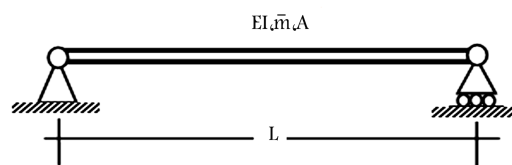
$$\Phi(x) = A \cos(\mu x) + B \sin(\mu x) + C \cosh(\varepsilon x) + D \sinh(\varepsilon x) \quad (4)$$

که در آن μ و ε از رابطه‌های ۵ و ۶ به دست می‌آیند:

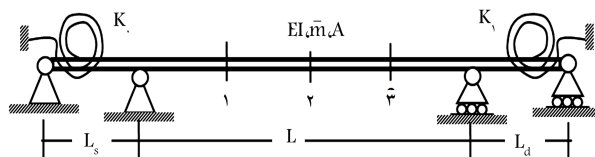
$$\mu = \sqrt{0.5 \delta^2 \left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^2} - 1 \right)} \quad (5)$$

$$\varepsilon = \sqrt{0.5 \delta^2 \left(\sqrt{1 + 4 \left(\frac{\alpha}{\delta} \right)^2} + 1 \right)} \quad (6)$$

۳.۲. معادله‌ی بسامد و شکل مود ارتعاشی مدل و تأثیر شرایط مرزی
 به منظور محاسبه‌ی بسامدها و شکل‌های مودی باید اثر شرایط مرزی مختلف در معادله‌ی ۴ وارد شود. به طور مثال برای شرایط تیر دو سر ساده، رابطه‌ی بسامد



شکل ۳. تیر با شرایط تکیه‌گاهی.



شکل ۴. تیر با شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم تحت اثر نیروی محوری فشاری و کششی.

در فاز دوم به منظور ارزیابی صحت روابط تحلیلی با مقادیر به دست آمده از نتایج آزمایشگاهی مرجع^[۱]، در دو حالت نیروی فشاری و کششی برای شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم، از تیر نمایش داده شده در شکل ۴ استفاده شده است. از طرفی مشخصات تیرها در جدول ۲ ارائه شده است.

۲.۲. معادله‌ی دیفرانسیل جزئی مدل پژوهش

فرض کنید که یک تیر دو سر ساده تحت اثر بار گسترده‌ی غیریکنواخت عمود بر محور طولی تیر واقع و به طرفین تیر، دو نیروی کششی یکنواخت وارد شده است. با فرض اینکه تیر اوپار-برنولی است (از تغییر شکل برشی صرف نظر شود)، با به کارگیری اصل هامیلتون، معادله‌ی دیفرانسیل جزئی حاکم بر حرکت سازه به صورت رابطه‌ی

(ω_n) و شکل مود ارتعاشی $(\Phi(x))$ به صورت رابطه های ۷ و ۸ است:

$$\omega_n = n\pi \sqrt{\frac{n^2 \pi^2 EI}{\bar{m}L^3} + \frac{T}{\bar{m}L^3}} \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7)$$

$$\Phi(x) = B \sin(\mu x) \left\{ 1 + \frac{\mu^2}{\varepsilon^2} \right\} \quad (8)$$

بنابراین، برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده، یک فرمول صریح برای محاسبه‌ی بسامد و شکل مود ارتعاشی قابل اثبات است. اما برای سایر شرایط تکیه‌گاهی نمی‌توان فرمول صریح ارائه کرد. در ادامه، خلاصه‌ی نتایج مربوط به انواع شرایط مرزی محتمل ارائه شده است. اگر تیر شرایط مرزی یک‌سر گیردار - یک‌سر ساده داشته باشد، معادله‌ی بسامد آن به صورت رابطه‌ی ۹ است:

$$\varepsilon \mu^2 \cosh(\varepsilon L) \sin(\mu L) - \varepsilon^2 \mu \cos(\mu L) \sinh(\varepsilon L) + \varepsilon^2 \sin(\mu L) \cosh(\varepsilon L) = 0 \quad (9)$$

بدیهی است که در رابطه‌ی ۹، مجهول اصلی بسامد است و برای حل آن باید از روش‌های عددی استفاده شود. در این پژوهش حل معادله‌ی ۹ به کمک روش نیوتن - رافسون انجام پذیرفته است. اگر شرایط مرزی دو سر تیر، گیردار فرض شود، معادله‌ی بسامد به صورت رابطه‌ی ۱۰ خواهد بود:

$$2\varepsilon \mu (1 - \cosh(\varepsilon L) \cos(\mu L)) + (\varepsilon^2 - \mu^2) \sin(\mu L) \sinh(\varepsilon L) = 0 \quad (10)$$

برای حل معادله‌ی مذکور نیز از روش‌های عددی نیوتن - رافسون استفاده شده است. به منظور حل هم‌زمان دست‌معدلات ۹ و ۱۰، و بررسی تأثیر پارامترهای مختلف در بسامد تیر، یک کد در نرم‌افزار متلب با نام TENFREQ نگارش یافته است، که صحت آن با مقایسه‌ی نتایج این کد با نرم‌افزار SAP2000 به اثبات رسیده است. در شرایط واقعی و به استناد آزمایش‌های درجایی که برای محاسبه‌ی نیروی فشاری یا کششی انجام گرفته است، عموماً شرایط تکیه‌گاهی نسبت به مفروضات تحلیلی تفاوت خواهد داشت. به عبارتی فرض گیرداری کامل یا مفصل کامل در محاسبات تحلیلی با آنچه از آزمایش به دست می‌آید، متفاوت است. به همین جهت برای آشنایی با روابط تحلیلی با استفاده از مختصات بدون بُعد، شرایط مرزی برای سختی نامعلوم تکیه‌گاهی به صورت روابط ۱۱ و ۱۲ خواهد بود:

$$\Phi(0) = 0, \quad (11 \text{ الف})$$

$$\Phi''(0) - \beta_0 \Phi'(0) = 0 \quad (11 \text{ ب})$$

$$\Phi(L) = 0, \quad (12 \text{ الف})$$

$$\Phi''(L) - \beta_1 \Phi'(L) = 0 \quad (12 \text{ ب})$$

که در آن‌ها، β_0 و β_1 از رابطه‌ی ۱۳ به دست می‌آید:

$$\beta_0 = \frac{K_0 L}{EI}, \quad (13 \text{ الف})$$

$$\beta_1 = \frac{K_1 L}{EI} \quad (13 \text{ ب})$$

که در آن، K_0 و K_1 ، ثابت فنر خمشی - پیچشی دو انتهای تیر است. به کمک شرایط مرزی مندرج در روابط ۱۱ و ۱۲، پارامترهای β_0 و β_1 در موقعیت ۲۵٪، ۵۰٪ و ۷۵٪ طول تیر از تکیه‌گاه سمت چپ تیر به صورت رابطه‌ی ۱۴ است:

$$\beta_0 = -(\mu^2 + \varepsilon^2) \frac{\alpha_1 (\Phi_1 / \Phi_2) - \alpha_2}{\alpha_2 (\Phi_1 / \Phi_2) - \alpha_2}, \quad (14 \text{ الف})$$

$$\beta_1 = -(\mu^2 + \varepsilon^2) \frac{\alpha_1 (\Phi_2 / \Phi_2) - \alpha_2}{\alpha_2 (\Phi_2 / \Phi_2) - \alpha_2} \quad (14 \text{ ب})$$

که در آن، α_1 الی α_2 از روابط ۱۵ تا ۱۷ به دست می‌آید:

$$\alpha_1 = \sin(\mu) \sinh(\varepsilon / \delta) - \sin(\varepsilon / \delta \mu) \sinh(\varepsilon) \quad (15 \text{ الف})$$

$$\alpha_2 = \sin(\mu) \sinh(\varepsilon / \delta) - \sin(\varepsilon / \delta \mu) \sinh(\varepsilon) \quad (15 \text{ ب})$$

$$\alpha_3 = 2[\cos(\varepsilon / \delta \mu) - \cosh(\varepsilon / \delta)] * [\mu \cos(\varepsilon / \delta \mu) \sinh(\varepsilon / \delta) - \varepsilon \sin(\varepsilon / \delta \mu) \cosh(\varepsilon / \delta)] \quad (16)$$

$$\alpha_4 = \mu[\cos(\mu) \sinh(\varepsilon / 2\delta) + \sinh(\varepsilon / 2\delta \mu) - \cos(\varepsilon / 2\delta \mu) \sinh(\varepsilon)] + \varepsilon[\cosh(\varepsilon) \sin(\varepsilon / 2\delta \mu) + \sin(\varepsilon / 2\delta \mu) - \cosh(\varepsilon / 2\delta) \sin(\mu)] \quad (17)$$

بنابراین، اگر مؤلفه‌ی مود ارتعاشی اول در نقاط کنترل ۲۵٪، ۵۰٪ و ۷۵٪ طول تیر معلوم باشد، به کمک روابط ۱۴ الی ۱۷ می‌توان سختی خمشی دو انتهای تیر را محاسبه کرد. لازم به یادآوری است که برای استفاده از روابط ۱۵ الی ۱۷ لازم است مقادیر μ و ε معلوم باشند. برای این کار از دو معادله‌ی ۱۸ و ۱۹ به طور هم‌زمان استفاده می‌شود:

$$\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_2} = \frac{1 + 2 \cos(\varepsilon / 2\delta \mu) \cosh(\varepsilon / 2\delta)}{\cos(\varepsilon / 2\delta \mu) + \cosh(\varepsilon / 2\delta)} \quad (18)$$

$$\varepsilon^2 = \mu^2 + n^2, \quad (19 \text{ الف})$$

$$n = (\delta L)^2 \quad (19 \text{ ب})$$

۳. ارزیابی نتایج حاصل از تحلیل مدل‌های فاز ۱

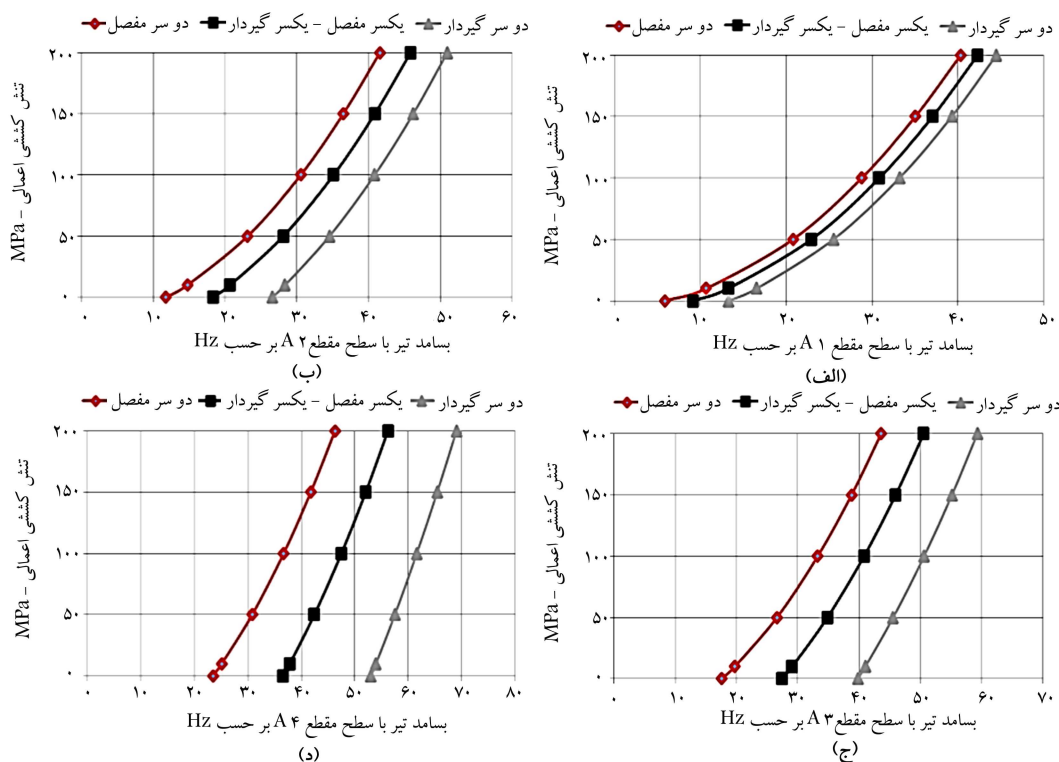
همان‌گونه که در مقدمه ذکر شده است، در فاز اول با فرض اینکه شرایط تکیه‌گاهی دو انتهای تیر معلوم باشد، تحلیل حساسیت بسامد در اثر تغییر پارامترهای سطح مقطع، طول و تنش محوری کششی انجام شده است. برای ارزیابی آثار هر یک از موارد مذکور، نتایج در ۵ بخش ارزیابی شده است:

۱. تأثیر سطح مقطع تیر برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف و طول ثابت تیر.
۲. تأثیر شرایط تکیه‌گاهی در بسامد اصلی هم‌زمان با تغییر در نیروی محوری کششی.
۳. تأثیر طول تیر با شرایط تکیه‌گاهی PP, PF و FF با سطح مقطع ثابت A_2 .
۴. تأثیر تغییر تنش محوری کششی هم‌زمان با تغییر مساحت و شرایط تکیه‌گاهی.
۵. استخراج نمودارهای استاندارد برای شرایط تکیه‌گاهی PP, PF و FF با تغییر نسبت h/L .

۱.۳. تأثیر شرایط تکیه‌گاهی در بسامد اصلی هم‌زمان با تغییر در

نیروی محوری کششی

برای ارزیابی تأثیر شرایط تکیه‌گاهی در بسامد ارتعاشی اصلی تیر، طول تیر ۲ متر در نظر گرفته شده است. سپس به ازاء مقادیر مختلف تنش محوری کششی و برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف و معلوم، بسامد تیر محاسبه شده است. نتایج محاسبات در شکل ۵ نشان داده شده است. با بررسی نمودارهای ارائه شده در شکل ۵، از دیدگاه کیفی این موضوع قابل استنتاج است که با تغییر شرایط تکیه‌گاهی از دو سر مفصل به دو سر گیردار، بسامد تیر افزایش یافته است، که نرخ تغییرات آن برای تمام حالات نیروی محوری کششی یکسان است. همچنین با افزایش سطح مقطع تیر،



شکل ۵. تأثیر شرایط تکیه‌گاهی در بسامد ارتعاشی با تغییر در تنش محوری کششی به ازاء مقادیر مختلف سطح مقطع تیر.

یک سر گیردار و دو سر گیردار به ترتیب ۲، ۱/۵۳ و ۱/۳ برابر به دست آمده است.

۲.۳. تأثیر طول تیر با شرایط تکیه‌گاهی PP، PF و FF با سطح

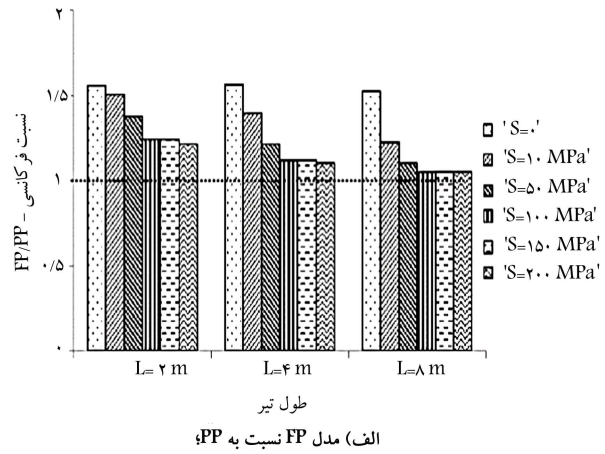
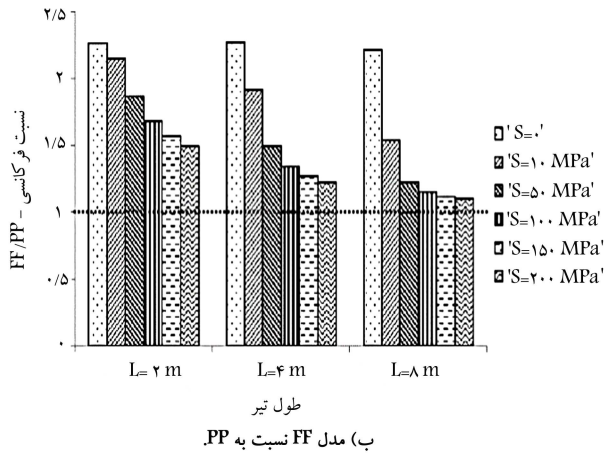
مقطع ثابت A4

یکی دیگر از پارامترهای مؤثر در بسامد تیر، طول تیر است. برای ارزیابی تأثیر طول تیر در بسامد، تیر برای شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل، یک سر مفصل - یک سر گیردار و دو سر گیردار با مقادیر مختلف تنش محوری و طول‌های ۲، ۴ و ۸ متر تحلیل شده است. در این حالت سطح مقطع تیر A4 فرض شده است (جدول ۱).

نتایج به دست آمده در نمودارهای میله‌یی شکل ۶ ارائه شده‌اند. برای درک بهتر از تأثیر طول، مقادیر بسامد محاسبه شده برای شرایط یک سر گیردار - یک سر مفصل و دو سر گیردار نسبت به بسامد متناظر با تیر دو سر مفصل هم‌پایه شده‌اند. براساس شکل ۶ الف مشاهده می‌شود که اگر تیر فاقد تنش محوری باشد (تیر خمشی)، نسبت بسامدی در طول‌های مختلف به طور متوسط ۱/۵ برآورد شده است. همچنین در این حالت، تغییر طول تأثیر قابل توجهی در بسامد تیر نمی‌گذارد؛ اما با افزایش تنش محوری و طول تیر، نسبت بسامدی کاهش می‌یابد. به طور مثال، برای طول ۲ متر و تنش ۱۰۰ مگاپاسکال این نسبت ۱/۳ و با همین نسبت تنش و طول ۸ متر، نسبت بسامدی ۱/۷ محاسبه شده است. به عبارتی دیگر، افزایش هم‌زمان طول و تنش باعث می‌شود که بسامد تیر به بسامد متناظر با حالت دو سر مفصل نزدیک شود. به علاوه در تیر با طول ۸ متر از تنش ۱۰۰ مگاپاسکال به بالا، افزایش تنش تغییری در نسبت بسامد ایجاد نکرده است. با مراجعه به شکل ۶ ب، نتایج قابل توجهی به دست می‌آید. بر این اساس در تیر با طول ۲ متر، بیشترین نسبت بسامد مربوط به حالت بدون تنش محوری فشاری است، که این نسبت مستقل از طول

تأثیر شرایط تکیه‌گاهی محسوس‌تر است. به طور نمونه برای تیر با مقطع A1، بسامد با تکیه‌گاه یک سر ساده - یک سر گیردار، ۵۶٪ به ازاء نیروی محوری صفر و ۵٪ به ازاء تنش محوری ۲۰۰ مگاپاسکال نسبت به تیر با دو سر مفصل رشد داشته است. در حالی‌که برای تیر با مقطع A4، این مقادیر به ترتیب ۵۶٪ و ۲۱٪ رشد داشته است. البته با افزایش تنش محوری کششی، درصد افزایش بسامد کاهش یافته است. به عبارتی وجود نیروی محوری کششی باعث افزایش بسامد و سختی تیر می‌شود و در نتیجه برای تیر با سطح مقطع کم، تأثیر شرایط تکیه‌گاهی کم‌رنگ می‌شود. به طور مثال در تیر با مقطع A1 برای تنش محوری ۲۰۰ مگاپاسکال، تغییر شرایط از دو سر مفصل به یک سر مفصل - یک سر گیردار و دو سر گیردار به ترتیب باعث شده است که بسامد ۵٪ و ۱۰٪ نسبت به مدل دو سر مفصل افزایش یابد. همچنین تغییر سطح مقطع تیر به حالت A4 باعث شده است که بسامد به ترتیب ۲۱٪ و ۴۹٪ نسبت به حالت A1 رشد داشته باشد.

از دیگر نقاط قابل ذکر این است که در تیر با سطح مقطع کم، نرخ تغییرات بسامد متناظر با تمام شرایط تکیه‌گاهی و تنش اعمالی به صورت غیرخطی است، در حالی‌که با تغییر سطح مقطع به A4 و تغییر شرایط تکیه‌گاهی از دو سر مفصل به دو سر گیردار، روند تغییرات بسامد به صورت خطی درآمده است. در نهایت ذکر این نکته ضروری است که برای شرایط تکیه‌گاهی معین، هر چه سطح مقطع تیر کوچک‌تر باشد، تأثیر تنش محوری محسوس‌تر است. به طور نمونه، به کمک شکل ۵ الف برای تیر دو سر مفصل، بسامد متناظر با تنش ۲۰۰ مگاپاسکال، ۶/۸ برابر بسامد بدون حضور تنش محوری است. این نسبت برای شرایط تکیه‌گاهی یک سر ساده - یک سر گیردار و دو سر گیردار، به ترتیب ۴/۶ و ۳/۳ به دست آمده است. در حالی‌که با تغییر مساحت تیر به A4 مطابق شکل ۵ د، نسبت بسامد متناظر با تنش محوری ۲۰۰ مگاپاسکال به بسامد در حالت بدون وجود تنش محوری، شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل، یک سر ساده -



شکل ۶. بسامد هم‌پایه‌شده برای تیر با طول‌های مختلف.

بسامد با تغییر مساحت در حالت دو سر مفصل در مقایسه با دو سر گیردار، هم‌زمان با افزایش طول تیر بیشتر است. به عبارتی در حالت دو سر گیردار با طول ۴ متر، اختلاف محسوسی بین بسامد تیر به ازاء مقادیر مختلف مساحت مشاهده می‌شود. در حالی که در همین مدل با طول ۸ متر، بسامد متأثر از سطح مقطع نیست. به عبارت ساده‌تر، هر چه طول تیر بیشتر شود، حساسیت بسامد به تغییرات مساحت کاهش می‌یابد. بنابراین در تیر با طول کوتاه، سطح مقطع به عنوان یک پارامتر تأثیرگذار در بسامد است، که البته شرایط دانه‌های تیر نیز بر این حساسیت می‌افزاید. در نهایت اینکه در شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار با طول کوتاه، روند تغییرات بسامد با افزایش تنش محوری هم‌زمان با افزایش مساحت تقریباً خطی است؛ اما با افزایش طول تیر، روند مذکور غیرخطی می‌شود.

۴.۳. استخراج نمودارهای استاندارد برای شرایط تکیه‌گاهی PP،

FF و PF با تغییر نسبت h/L

بر اساس نتایج به دست آمده از بخش‌های پیشین مشخص شده است که بسامد تابع طول، سطح مقطع، شرایط تکیه‌گاهی و تنش محوری است. بنابراین برای مقاصد عملی و به منظور محاسبه نیروی محوری، باید مجموعه‌یی از گراف‌های طراحی تهیه شود تا برای بسامد معلوم و سطح مقطع مشخص، بتوان نیروی محوری را محاسبه کرد. به عبارتی گراف‌های استاندارد باید اثر عوامل مؤثر در بسامد را در بر گیرند. بدین جهت برای ۳ شرط تکیه‌گاهی که پیش‌تر به آنها اشاره شده است، با انجام تحلیل بر روی ۲۱۶ نمونه‌ی مختلف، ۳ دسته گراف طراحی در شکل ۸ نمایش داده شده است. بدین منظور، هر نمونه برای نسبت h/L مشخص تحلیل و بسامد برای بازه‌ی تنش (۲۰۰-۰) مگاپاسکال محاسبه شده است. این تذکر لازم است که طول تیر در کلیه نمونه‌ها، واحد در نظر گرفته شده است. از طرفی بازه‌ی h/L به گونه‌یی انتخاب شده است که محدوده‌ی وسیعی از تیرهای کش موجود را از نقطه نظر مساحت مقطع پوشش دهد. روش استفاده از گراف‌ها به این شکل است که به کمک نتایج آزمایش درجا، می‌توان بسامد ارتعاشی اصلی تیر را محاسبه کرد. آنگاه بسامد اصلاح‌شده‌ی تیر جهت استفاده از نمودارهای استاندارد به صورت رابطه‌ی ۲۰ است:

$$f_m = f_E \times L_{net} \quad (20)$$

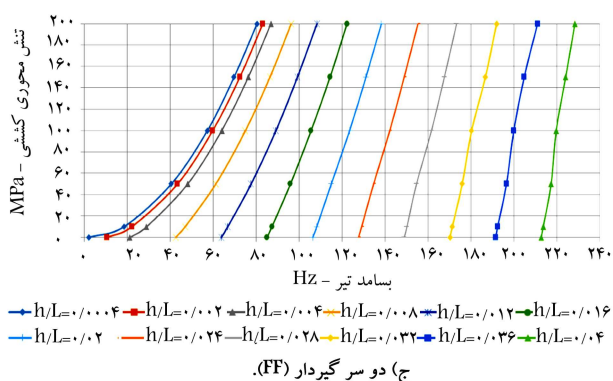
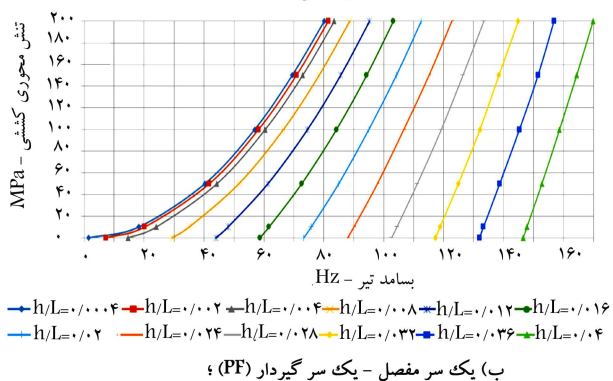
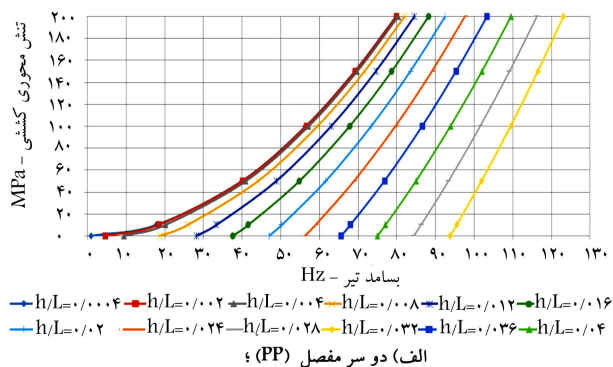
که در آن، f_m ، f_E و L_{net} به ترتیب بسامد اصلاح‌شده، بسامد به دست آمده از آزمون درجا، و طول خالص تیر است. به عبارتی نتایج تحلیل حساسیت نشان داده است

تیر است. با افزایش تنش، این نسبت کاهش یافته است؛ به قسمی که در تنش ۲۰۰ مگاپاسکال، این نسبت ۲۴٪ در مقایسه با حالت بدون تنش کاهش داشته است. به همین ترتیب در تیر با طول ۸ متر، بیشینه‌ی درصد کاهش نسبت بسامد هم‌زمان با افزایش تنش محوری، ۵۰٪ برآورد شده است. این تذکر لازم است که نرخ تغییرات نسبت بسامد هم‌زمان با افزایش طول تیر، در تیر دو سر گیردار محسوس‌تر است. به قسمی که برای طول ۸ متر، افزایش تنش محوری از صفر به ۲۰۰ مگاپاسکال (شکل ۶الف) باعث شده است که نسبت بسامد، ۲۰٪ کاهش یابد. در حالی که در شرایط مشابه و بر اساس شکل ۶ب، نرخ کاهش نسبت بسامد ۵۰٪ محاسبه شده است. بنابراین نتایج به دست آمده از مدل‌های این پژوهش نشان داده است که تأثیر تغییر شرایط تکیه‌گاهی در تیر با طول‌های بزرگ در تغییر بسامد محسوس‌تر است. به عبارتی شرایط تکیه‌گاهی در طول‌های بلند به عنوان یک پارامتر تأثیرگذار در بسامد معرفی می‌شود. نکته‌ی دیگر اینکه از تنش محوری ۱۰۰ مگاپاسکال به بالا، نسبت بسامدی در هر دو حالت تقریباً ثابت است و متأثر از تنش وارده نیست.

۳.۳. تأثیر سطح مقطع تیر با شرایط تکیه‌گاهی PP و FF با طول

متغیر

یکی دیگر از عوامل تأثیرگذار در بسامد ارتعاشی تیر، سطح مقطع تیر است. برای بررسی تأثیر این عامل، کلیه مدل‌ها برای دو حالت تکیه‌گاهی دو سر مفصل و دو سر گیردار، با طول‌های ۴ و ۸ متر تحلیل شده‌اند. از طرفی ضمن افزایش تنش محوری، سطح مقطع تیر نیز به ترتیب A_1 الی A_4 تعریف شده است. بر این اساس نمودارهای مندرج در شکل ۷الف و ۷ج مربوط به تیر با شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و شکل ۷ب و ۷د مربوط به شرایط تکیه‌گاهی دو سر مفصل است. با مراجعه به شکل ۷الف و ۷ب مشاهده می‌شود که در تمامی مدل‌ها، افزایش سطح مقطع هم‌زمان با افزایش تنش محوری باعث افزایش بسامد ارتعاشی شده است. اما در تیر با طول کوتاه (۴ متر)، تأثیر مساحت در حالت دو سر گیردار در مقایسه با دو سر مفصل محسوس‌تر است. مثلاً در حالت دو سر گیردار به ازاء تنش محوری ۲۰۰ مگاپاسکال، تغییر مساحت از A_1 به A_4 باعث شده است که بسامد تیر ۵۵٪ رشد داشته باشد، در حالی که برای مدل دو سر مفصل این تغییر ۱۴/۵٪ برآورد شده است. همچنین با افزایش طول تیر در هر دو شرایط تکیه‌گاهی، مقادیر بسامد متأثر از تغییرات مساحت نیست. سرعت هم‌گرایی

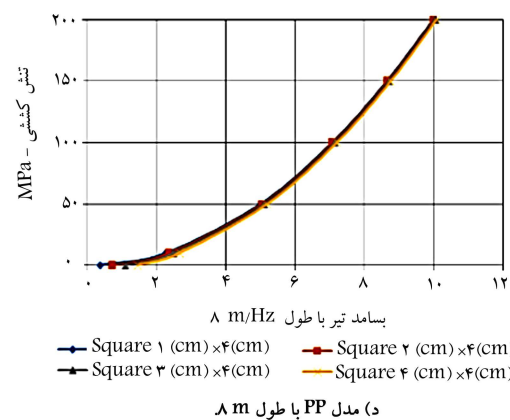
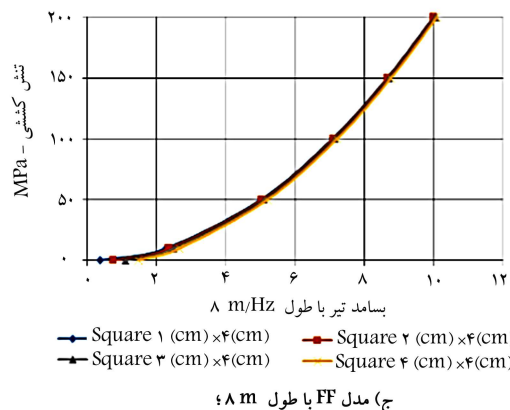
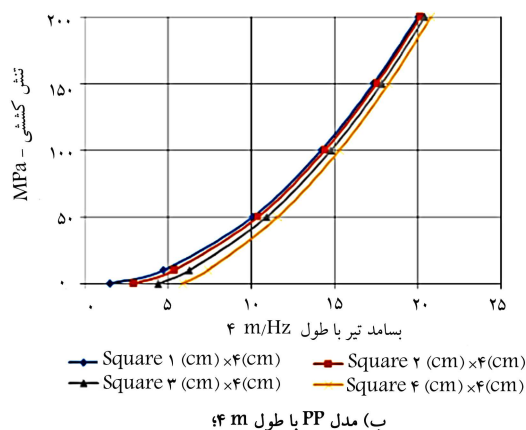
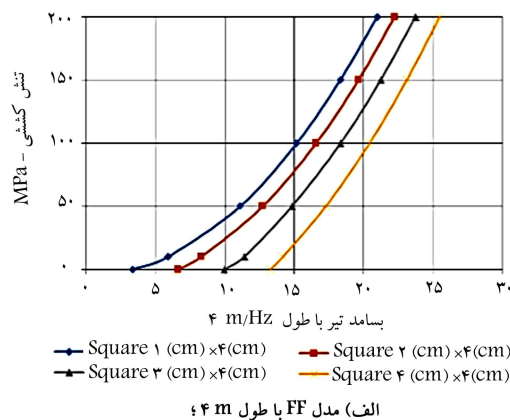


شکل ۸. نمودار استاندارد جهت محاسبه‌ی نیروی محوری کششی برای بسامد معلوم با شرایط تکیه‌گاهی.

که بسامد ارتعاشی اصلاح شده با طول تیر نسبت مستقیم دارد. آنگاه با معلوم بودن بسامد اصلاح شده و برای یک نسبت h/L و شرایط تکیه‌گاهی معین، با مراجعه به یکی از گراف‌ها می‌توان نیروی محوری را محاسبه کرد. برای آشنایی یک مثال ارائه شده است:

اگر بسامد حاصل از روش آزمون درجا ۶۹ هرتز و نسبت h/L نیز ۰٫۲ باشد، با فرض شرایط تکیه‌گاهی دو سر گیردار و تیر به طول ۲ متر، بسامد اصلاح شده ۱۲۸ هرتز و به کمک شکل ۸ ب تنش محوری ۲۰۰ مگاپاسکال است، که با مقایسه‌ی آن با نتایج به دست آمده از نرم‌افزار Sap۲۰۰۰ برای شرایط مفروض، میزان خطا در محاسبه‌ی نیروی محوری، صفر برآورد شده است. از منظر تفسیر گراف‌های مذکور نیز ذکر نکاتی ضروری است:

- در تمامی مدل‌ها با افزایش h/L ، بسامد ارتعاشی افزایش می‌یابد. البته به ازاء یک نیروی محوری ثابت، تغییر نسبت h/L از ۰٫۰۰۴ به ۰٫۰۰۴، تأثیر قابل توجهی در بسامد نمی‌گذارد.



شکل ۷. تأثیر سطح مقطع تیر در بسامد هم‌پایه شده.

۱.۴. محاسبه‌ی نیروی محوری کششی و صلبیت انتهایی تیر به

روش تحلیلی

برای محاسبه‌ی نیروی محوری و صلبیت انتهایی لازم است در ابتدا بسامد ارتعاشی تیر محاسبه شود. بدین منظور باید از روابط ۱۸ و ۱۹ به صورت هم‌زمان استفاده و پارامترهای μ و ε محاسبه شوند. براساس رابطه‌ی ۱۸، باید مؤلفه‌های مود ارتعاشی تیر در نقاط کنترل مندرج در شکل ۴ مشخص باشند، که این مقادیر از آزمایش درجا به دست می‌آیند، که برای این پژوهش از نتایج مرجع^[۱] استفاده شده است. با محاسبه‌ی μ و ε به کمک روابط ۱۵ الی ۱۷، می‌توان ثابت‌های α_1 تا α_2 و در نهایت با رابطه‌ی ۱۴، صلبیت خمشی - پیچشی دو انتهای تیر را به دست آورد. نتایج محاسبات در جدول ۳ نمایش داده شده است. براساس نتایج به دست آمده و خطای ناچیز بین نیروی محوری کششی تحلیلی (N_A)، با مقدار متناظر آزمایشگاهی (N_E)، دقت قابل قبول روابط تحلیلی اثبات می‌شود. البته با افزایش نیروی محوری کششی، خطای محاسباتی کاهش می‌یابد. این تذکر لازم است که براساس مرجع^[۱]، با استفاده از یک جک هیدرولیک، نیروی محوری کششی از یک طرف به تیر ساخته شده در آزمایشگاه به تدریج وارد شده است. از طرفی با اعمال ضربه بر نقاط کنترل تیر، ضمن ایجاد ارتعاش مصنوعی، تاریخچه‌ی شتاب ناشی از این ارتعاش ثبت شده و به کمک روش تبدیل فوری‌ی سریع، تابع پاسخ بسامدی مختلط تیر به دست آمده است. به کمک این تابع، مؤلفه‌های مود ارتعاشی تیر در نقاط کنترل تعیین شده‌اند.^[۱] برای اثبات صحت روابط تحلیلی در شکل ۹، ارتباط بین مقادیر به دست آمده از روش تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی نمایش داده شده است.

یکی دیگر از عواملی که به کمک نتایج آزمایشگاهی می‌توان به دست آورد، صلبیت خمشی دو انتهای تیر است، که در جدول ۳ ارائه شده است. براساس اطلاعات ارائه شده در مراجع^[۱۲،۱۳]، برای شرایط حدی گیرداری کامل ($K_s = K_d = \infty$)، به منظور محاسبه‌ی ضرایب سختی β_1 و β_2 رابطه‌ی تحلیلی ۲۱ پیشنهاد شده است:

$$\beta_2 = \frac{4L}{L_s} \times \frac{3I_1(\alpha_s)}{4I_1'(\alpha_s) - I_1''(\alpha_s)} \quad (21 \text{ الف})$$

$$\beta_1 = \frac{4L}{L_d} \times \frac{3I_1(\alpha_d)}{4I_1'(\alpha_d) - I_1''(\alpha_d)} \quad (21 \text{ ب})$$

که در آن، $\alpha_d = L_d/L\sqrt{n}$ و $\alpha_s = L_s/L\sqrt{n}$ است. از طرفی در رابطه‌ی

۲. افزایش نسبت h/L باعث می‌شود شیب هر یک از گراف‌ها افزایش یابد. بدین ترتیب تأثیر نیروی محوری در بسامد به ازاء h/L ثابت، کاهش می‌یابد.

۳. با تغییر شرایط تیر از دو سر مفصل به دو سر گیردار، با افزایش h/L ، علاوه بر اینکه شیب نمودارها تقریباً خطی می‌شود، بسامد نیز در هر گراف نسبت به گراف قبلی ۲ برابر شده است.

برای روشن شدن بهتر موضوع افزایش شیب هر گراف، ضمن مراجعه به شکل ۸ ج، برای $h/L = 0.10004$ ، بسامد متناظر با تنش محوری ۲۰۰ مگاپاسکال در مقایسه با حالت بدون نیروی محوری، ۱۶ برابر شده است؛ در حالی که برای $h/L = 0.70004$ این نسبت ۱/۴ برابر شده است. از طرفی با تغییر شرایط از دو سر مفصل به دو سر گیردار، این نسبت برای $h/L = 0.704$ ، ۱/۱ محاسبه شده است. لذا صلب شدن شرایط تکیه‌گاهی اختلاف بسامد حاصل از تنش ۲۰۰ مگاپاسکال را نسبت به تیر بدون تنش کاهش داده است.

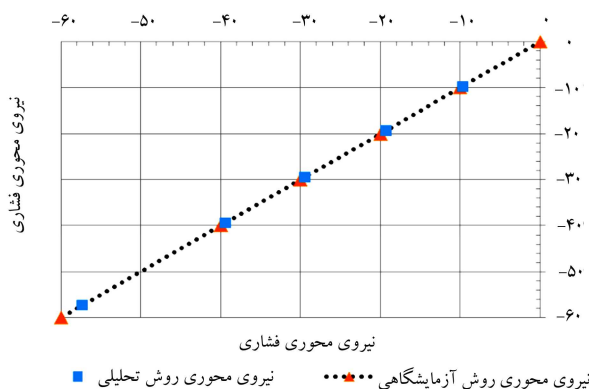
۴. ارزیابی نتایج حاصل از تحلیل مدل‌های فاز ۲

در بسیاری از شرایط واقعی، وضعیت تکیه‌گاهی به عنوان یکی از پارامترهای مجهول و مؤثر در نیروی محوری تیر کش است. همان‌گونه که در روابط ۱۱ و ۱۲ نشان داده شده است، صلبیت دو انتهای تیر به عنوان دو شرط مرزی مجزا است. بنابراین برای محاسبه‌ی شکل مود ارتعاشی و بسامد تیر، باید این مقادیر نیز معلوم باشند. پژوهش‌های انجام شده نشان می‌دهند که سختی تکیه‌گاهی فقط به کمک نتایج آزمایشگاهی و در تلفیق با روابط تحلیلی قابل ارائه است. به عبارتی فقط با اتکاء بر روابط تحلیلی، محاسبه‌ی سختی تکیه‌گاهی، بسامد و شکل مود در حضور نیروی محوری مقدور نیست. به همین جهت در این بخش ضمن استفاده از نتایج آزمایشگاهی مرجع^[۱]، با به کارگیری روابط تحلیلی ۱۱ الی ۱۹، مقدار صلبیت تکیه‌گاهی، نیروی محوری کششی یا فشاری تحلیلی، بار فشاری کمانشی و خطای نتایج نسبت به مقادیر آزمایش درجای مرجع^[۱]، محاسبه شده است. سرفصل مطالب در این بخش به این قرار است:

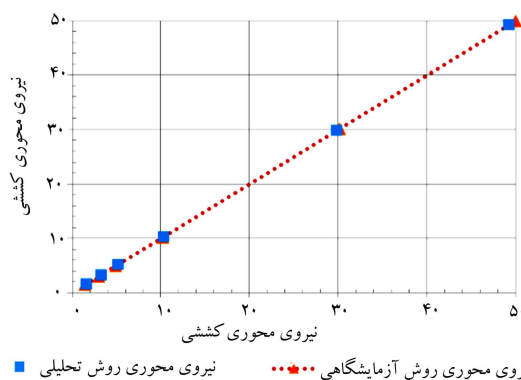
- محاسبه‌ی نیروی محوری کششی و صلبیت انتهایی تیر به روش تحلیلی.
- محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری و صلبیت انتهایی تیر به روش تحلیلی.
- محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری کمانشی.

جدول ۳. فرایند محاسبه‌ی نیروی محوری کششی تحلیلی و خطای آن نسبت به مقادیر آزمایشگاهی و ضرایب سختی تکیه‌گاهی.

Case No.	$\frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_2}$	$\frac{\Phi_1}{\Phi_2}$	γ	λ	μ	ε	n_a	N_A (KN)	N_E (KN)	Error (%)	β_2	β_1
۱	۰٫۶۲۴	۰٫۶۱۱	۱٫۲۳۵	۴٫۶۹	۴٫۰۲	۵٫۴۸	۱۳٫۹	۱٫۶	۱٫۴۵	۱۲٫۲۲	۱۳٫۴۹	۱۵٫۷۷
۲	۰٫۶۲۶	۰٫۶۲۱	۱٫۲۴۷	۵٫۰۲	۳٫۸۶	۶٫۵۲	۲۷٫۶	۳٫۲	۲٫۹۷	۸٫۹۰	۱۴٫۹۲	۱۵٫۹۴
۳	۰٫۶۳۳	۰٫۶۲۲	۱٫۲۵۵	۵٫۳۶	۳٫۷۶	۷٫۶۴	۴۴٫۳	۵٫۲	۴٫۹۵	۴٫۷۵	۱۶٫۱۵	۱۹٫۰۲
۴	۰٫۶۴۷	۰٫۶۳۱	۱٫۲۷۸	۶٫۰۱	۳٫۶۰	۱۰٫۰۵	۸۸٫۰	۱۰٫۳	۱۰٫۲۲	۰٫۸۷	۱۷٫۸۴	۲۳٫۹۳
۵	۰٫۶۶۸	۰٫۶۵۹	۱٫۳۲۷	۷٫۴۴	۳٫۳۹	۱۶٫۳۲	۲۵۴٫۸	۲۹٫۸	۳۰٫۱۵	۱٫۰۲	۲۳٫۱۴	۲۹٫۷۶
۶	۰٫۶۸	۰٫۶۶۳	۱٫۳۴۳	۸٫۳۳	۳٫۳۴	۲۰٫۷۷	۴۲۰٫۱	۴۹٫۲	۵۰	۱٫۵۷	۲۶٫۰۵	۴۸٫۵۷



شکل ۱۱. مقایسه‌ی نیروی محوری فشاری حاصل از روابط تحلیلی با مقادیر آزمایشگاهی مرجع [۱].

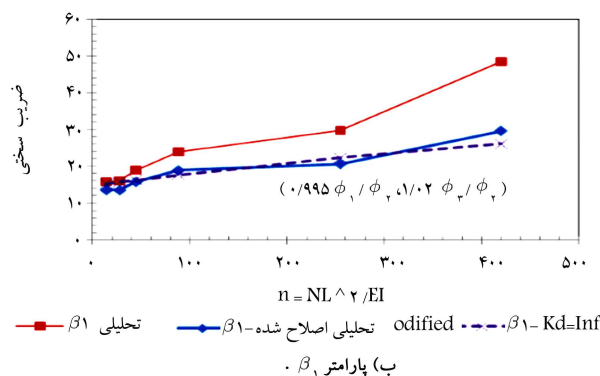
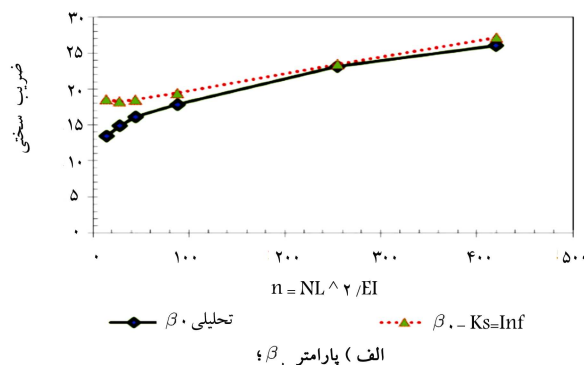


شکل ۹. مقایسه‌ی نیروی محوری کششی حاصل از روابط تحلیلی با مقادیر آزمایشگاهی مرجع [۱].

محوری کششی، سختی انتهایی تیر به حالت گیرداری کامل نزدیک می‌شود. در مقابل برای تکیه‌گاه سمت چپ، که ضریب سختی آن با β_1 معرفی شده است، نمودار تغییرات β_1 حاصل از روش تحلیلی به همراه نتایج و نیز β_1 اصلاح شده نمایش داده شده است. به استناد شکل مذکور، بین مقادیر تحلیلی و مقادیر حدی اختلاف محسوسی محاسبه شده است. در واقع با افزایش نیروی محوری، به کمک رابطه‌ی ۱۴ ب نسبت به رابطه‌ی ۲۱ ب، مقادیر بیشتری محاسبه شده است، که از دیدگاه تئوری صحیح نیست؛ زیرا بیشینه‌ی β_1 باید با حالت حدی رابطه‌ی ۲۱ ب یکی شود. بنابراین نتایج شکل ۱۰ ب نشان می‌دهد که محاسبه‌ی ضرایب سختی انتهایی معمولاً با خطا همراه است و به یک جواب دقیق منتهی نمی‌شود. به همین دلیل بار دیگر تغییرات β_1 نسبت به نیروی محوری کششی ترسیم شده است، با این تفاوت که در این حالت از مقادیر اصلاح شده‌ی $(\frac{0.995\Phi_1}{\Phi_2}, \frac{1.02\Phi_2}{\Phi_1})$ استفاده شده است. با توجه به شکل ۱۰ ب، نتایج نشان داده است که در این حالت همبستگی بهتری بین مقادیر حدی و تحلیلی وجود دارد. در نتیجه به استناد گراف‌های شکل ۱۰ می‌توان استدلال کرد که تکیه‌گاه‌های تیر در مدل آزمایشگاهی مرجع [۱]، گیردار هستند.

۲.۴. محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری و صلبیت انتهایی تیر به روش تحلیلی

به‌طور مشابه برای حالتی که نیروی وارد بر تیر فشاری است، مقادیر نیرو به کمک روابط تحلیلی محاسبه و با مقادیر آزمایشگاهی مرجع [۱]، مقایسه و نتایج حاصل در جدول ۴ ارائه شده است. از طرفی برای اعتبارسنجی نتایج آزمایشگاهی با مقادیر تحلیلی، ارتباط بین نتایج روش تحلیلی و نتایج آزمایشگاهی مرجع [۱]، در شکل ۱۱ نمایش داده شده است. با توجه به شکل مذکور، به دلیل همبستگی مناسب، صحت روابط تحلیلی قابل استنباط است. از سوی دیگر، ضرایب سختی نامعلوم تکیه‌گاهی نیز با کمک روابط ۱۳ الی ۱۹ محاسبه شده است، که مقادیر حاصل در ستون آخر جدول ۴ نمایش داده شده است. مشابه بخش ۱.۴، ضرایب سختی β_0 و β_1 با مقادیر متناظر آن، که از روابط حدی برای گیرداری کامل به‌دست آمده است، در شکل ۱۲ مقایسه شده‌اند. با مراجعه به شکل ۱۲ الف مشاهده می‌شود که با اعمال نیروی محوری فشاری و هم‌زمان با افزایش آن، سختی تکیه‌گاهی سمت چپ و به تبع آن پارامتر β_0 حاصل از رابطه‌ی ۱۴ الف کاهش می‌یابد و در تمامی موارد از مقادیر متناظر با حالت حدی گیرداری کامل کمتر است. این تذکر لازم است که β_0 متناظر با شرایط حدی گیرداری کامل در



شکل ۱۰. مقایسه‌ی ضریب سختی خمشی با وجود نیروی محوری کششی با شرایط حدی.

$$22, \alpha = \alpha_s, \alpha_d \text{ است:}$$

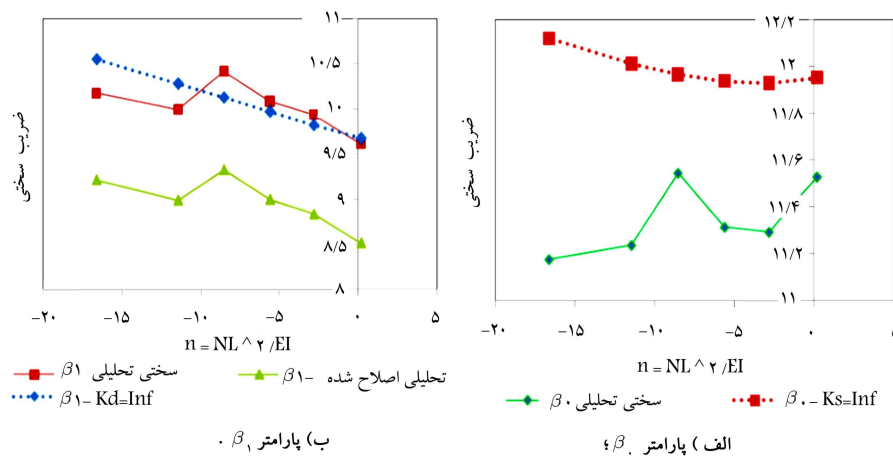
$$I_1(\alpha) = \frac{3}{\alpha} \left(\frac{1}{\tanh \alpha} - \frac{1}{\alpha} \right) \quad (22 \text{ الف})$$

$$I_2(\alpha) = \frac{6}{\alpha} \left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\sinh \alpha} \right) \quad (22 \text{ ب})$$

با محاسبه‌ی β_0 و β_1 برای شرایط گیرداری کامل و مقایسه‌ی آن با مقادیر تحلیلی، شکل ۱۰ ترسیم شده است. بررسی شکل ۱۰ الف نشان می‌دهد که در بیشتر حالت‌های اعمال نیروی محوری، ضریب سختی روش تحلیلی (β_0) با مقادیر حدی متناظر با آن به استناد رابطه‌ی ۲۱ الف همبستگی مناسبی دارد. البته برای مقادیر نیروی محوری کم، بیشینه‌ی اختلاف ۲۷٪ است. بنابراین برای نیروی محوری کم، تکیه‌گاه سمت راست تیر شرایط گیردار کامل را ندارد. اما با افزایش نیروی

جدول ۴. فرایند محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری تحلیلی و خطای آن نسبت به مقادیر آزمایشگاهی و ضرایب سختی تکیه‌گاهی.

β_1	β_0	Error (%)	N_E (KN)	N_A (KN)	n_a	ε	μ	λ	$\gamma = \frac{\Phi_1 + \Phi_2}{\Phi_2}$	$\frac{\Phi_2}{\Phi_4}$	$\frac{\Phi_1}{\Phi_2}$	Case No.
۹٫۶۱	۱۱٫۵۳	۰	۰	۰٫۶	۰٫۲	۴٫۱۹	۴٫۱۷	۴٫۱۸	۱٫۲۴۲	۰٫۶۳	۰٫۶۱۲	۱
۹٫۹۴	۱۱٫۲۹	۲٫۷۹	-۱۰	-۹٫۷	-۲٫۸	۳٫۹۰	۴٫۲۵	۴٫۰۷	۱٫۲۳۷	۰٫۶۲۵	۰٫۶۱۲	۲
۱۰٫۰۹	۱۱٫۳۲	۳٫۴۳	-۲۰	-۱۹٫۳	-۵٫۶	۳٫۶۲	۴٫۳۳	۳٫۹۶	۱٫۲۳۲	۰٫۶۲۲	۰٫۶۱	۳
۱۰٫۴۲	۱۱٫۵۵	۱٫۸۹	-۳۰	-۲۹٫۴	-۸٫۵	۳٫۳۳	۴٫۴۳	۳٫۸۴	۱٫۲۲۵	۰٫۶۱۸	۰٫۶۰۷	۴
۱۰٫۰۰	۱۱٫۲۴	۱٫۳۹	-۴۰	-۳۹٫۴	-۱۱٫۴	۳٫۰۰	۴٫۵۲	۳٫۶۸	۱٫۲۲۳	۰٫۶۱۸	۰٫۶۰۵	۵
۱۰٫۱۸	۱۱٫۱۸	۴٫۵۱	-۶۰	-۵۷٫۳	-۱۶٫۶	۲٫۴۰	۴٫۷۳	۳٫۳۷	۱٫۲۱۳	۰٫۶۱۲	۰٫۶۰۱	۶



شکل ۱۲. مقایسه‌ی ضریب سختی خمشی در حضور نیروی محوری فشاری با شرایط حدی.

شرایط تکیه‌گاهی ارتباط ایجاد می‌کنند. برای حالتی که تکیه‌گاه از نظر تئوری، سختی خمشی معلوم داشته باشد، مانند آنچه در بخش‌های ۱۰.۴ و ۲۰.۴ توضیح داده شده است، نیومارک رابطه‌ی تقریبی ۲۳ را برای تیر یک دهانه‌ی لاغر، که در معرض تنش فشاری قرار گرفته است، به منظور محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری کمانشی ارائه کرده است [۱۱، ۱۲].

$$N_{crA} = \chi \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (الف) \quad (۲۳)$$

$$\chi = \frac{(0.4 + \beta_0^{-1})(0.4 + \beta_1^{-1})}{(0.2 + \beta_0^{-1})(0.2 + \beta_1^{-1})} \quad (ب) \quad (۲۳)$$

با استناد به نتایج محاسبه‌شده در بخش ۲.۴، نیروی محوری فشاری کمانشی تحلیلی و آزمایشگاهی مرجع [۱]، به دست آمده است. بنابراین با مشخص بودن شرایط تکیه‌گاهی دو انتها و ضرایب سختی β_0 و β_1 ، می‌توان ضمن به‌کارگیری رابطه‌ی ۲۳، نیروی محوری کمانشی فشاری حاصل از آزمایش دینامیکی را محاسبه و نتیجه را با نیروی کمانشی حاصل از روش استاتیکی مقایسه کرد. همان‌گونه که در جدول ۵ مشاهده می‌شود، بین نیروی محوری کمانشی حاصل از نتایج آزمون دینامیکی درجای ارائه‌شده در مرجع [۱]، با مقدار متناظر آن از روش استاتیکی، ۳٫۱٪ خطا محاسبه شده است، که مقدار ناچیزی است.

شکل ۱۲ الف با خط‌چین نمایش داده شده است. به‌طور کلی می‌توان این‌گونه استدلال کرد که برای تکیه‌گاه سمت چپ، به ازاء تمام مقادیر نیروی محوری فشاری، تکیه‌گاه گیردار کامل نیست. در مقابل برای تکیه‌گاه سمت راست پارامتر β_1 در شکل ۱۲ ب ترسیم شده است، که در آن مقادیر سختی تحلیلی، سختی تحلیلی اصلاح‌شده و سختی حدی گیرداری نمایش داده شده است. با ارزیابی دو نمودار مذکور مشخص می‌شود که برای بیشتر مقادیر نیروی محوری فشاری، β_1 تحلیلی بیشتر از مقدار حدی گیرداری کامل است. مشابه شکل ۱۰ ب، بار دیگر پارامتر β_1 متناظر با نیروی محوری کششی ترسیم شده است، با این تفاوت که در این حالت از مقادیر اصلاح‌شده‌ی $(0.995\Phi_1/\Phi_2, 1.02\Phi_2/\Phi_2)$ استفاده شده است؛ که در این حالت همبستگی بهتری بین مقادیر حدی و تحلیلی مشاهده می‌شود.

۳.۴. نیروی محوری کمانشی فشاری

براساس روابط تحلیلی ارائه‌شده در بیشتر مراجع، برای محاسبه‌ی نیروی محوری فشاری کمانشی، باید شرایط تکیه‌گاهی انتهای تیر یا ستون معلوم باشد. به عبارتی دیگر، بیشتر روابط آماده در محاسبه‌ی بار کمانشی مثل رابطه‌ی اویبار، برای شرایط تکیه‌گاهی ایده‌آل یا تعریف ضریب طول مؤثر کمانش، بین نیروی محوری کمانشی و

جدول ۵. مقایسه‌ی نیروی محوری فشاری کمانشی به روش تحلیلی با مقدار آزمایشگاهی مرجع.^[۱]

Error (%)	N_{CrE} (KN)	$N_{CrA, Avg}$ (KN)	N_{CrA} (KN)	χ	L (M)	Case No.
			۹۵,۷۱۱	۲,۸۱۴۲		۱
			۹۵,۸۹۴	۲,۸۱۹۶		۲
۳,۰۹۶	۹۳,۱	۹۶,۰۷	۹۶,۱۰۵	۲,۸۲۵۸	۲,۳۸	۳
			۹۶,۷۵۸	۲,۸۴۵۰		۴
			۹۵,۹۰۷	۲,۸۲۰۰		۵
			۹۶,۰۷۱	۲,۸۲۴۸		۶

۵. نتیجه‌گیری

در این پژوهش، هدف اولیه‌ی ارزیابی پارامترهای مؤثر در رفتار دینامیکی تیرهای کش و مطالعه‌ی تحلیلی حساسیت‌پذیری بسامد تیر از عوامل مختلفی مانند: طول تیر، سطح مقطع تیر، شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم، نوع نیروی محوری اعم از فشاری یا کششی و اندازه‌ی تنش محوری در دو فاز جداگانه تعریف شده است. از طرفی تلاش شده است تا با بررسی نتایج تحلیلی بر پایه‌ی روابط تئوری با نتایج آزمایشگاهی حاصل از مرجع^[۱]، صحت‌سنجی روابط تئوریک انجام پذیرد. در ادامه، مهم‌ترین دستاوردهای حاصل از این پژوهش ارائه شده است. این مطالعه نشان داده است که تغییر در شرایط تکیه‌گاهی دو انتهای تیر با سطح مقطع کوچک به ازاء نیروی محوری مشابه، در افزایش بسامد ارتعاشی تیر تأثیر محسوس نخواهد داشت. همچنین با افزایش سطح مقطع، اگر تنش محوری ثابت فرض شود، تغییر نوع تکیه‌گاه باعث می‌شود که بسامد تیر نسبت به حالت دو سر مفصل افزایش یابد. از طرفی در سطح مقطع کوچک، روند تغییرات بسامد هم‌زمان با افزایش تنش محوری برای شرایط تکیه‌گاهی مختلف، غیرخطی و نسبت به افزایش تنش محوری حساس است. در حالی که به‌طور نمونه در تیر دو سر گیردار با بزرگ‌ترین سطح مقطع انتخابی، نرخ تغییرات بسامد در برابر افزایش تنش محوری خطی است.

از دیدگاه تأثیر تغییر طول، نتایج این مطالعه نشان داده است که برای تیر دو سر مفصل و دو سر گیردار بدون تنش محوری کششی، تغییر طول تأثیری در بسامد ارتعاشی نمی‌گذارد. همچنین برای شرایط دو سر گیردار، افزایش هم‌زمان طول و تنش محوری باعث شده است که بسامد تیر به مقدار متناظر با تیر دو سر مفصل نزدیک شود.

به‌علاوه این مطالعه نشان داده است که تأثیر تغییر شرایط تکیه‌گاهی در طول‌های بزرگ در تغییر بسامد تیر محسوس‌تر است. از طرفی برای تیر یک‌سر مفصل - یک‌سر گیردار، با افزایش تنش محوری فشاری، نسبت بسامدی ثابت است و متأثر از تنش محوری نیست. همچنین بررسی گراف‌ها نشان داده است که در طول‌های کم، سطح مقطع یک عامل تأثیرگذار در بسامد است، به‌خصوص اگر تیر دو انتهای گیردار داشته باشد. این تذکر لازم است که با افزایش طول تیر، بسامد متأثر از تغییر مساحت نیست، به قسمی که برای طول ۸ متر، بسامد در تمامی سطوح مقطع انتخابی و شرایط تکیه‌گاهی مختلف با هم برابر است.

برای شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم نیز نتایج نشان داده است که با استفاده از نتایج آزمون درجا مرجع^[۱]، تطابق خوبی بین نیروی محوری روابط تحلیلی و آزمایشگاهی وجود دارد. پیشینه‌ی خطا در محاسبه‌ی نیروی محوری کششی و فشاری نسبت به مقادیر آزمایشگاهی مرجع^[۱]، به ترتیب ۱۲٪ و ۵/۵٪ برآورد شده است. از طرفی برای شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم با نیروی محوری کششی در تکیه‌گاه سمت چپ، سختی فنر پیچشی نزدیک به حالت حدی دو سر گیردار به دست آمده است؛ اما برای تکیه‌گاه سمت راست، سختی در بیشتر حالات بیشتر از مقادیر حدی است. همچنین چنانچه نیروی محوری به‌صورت فشاری باشد، در نقطه‌ی اثر نیرو در تکیه‌گاه سمت چپ تیر، سختی فنر پیچشی همواره کمتر از حالت حدی دو سر گیردار به دست آمده است که به دلیل تأثیر نیروی محوری فشاری در کاهش سختی تیر است (سختی هندسی). اما در تکیه‌گاه سمت راست، به دلیل فاصله‌ی کافی تکیه‌گاه از محل اعمال نیروی فشاری، سختی در بیشتر حالات تقریباً برابر مقادیر حدی دو سر گیردار به دست آمده است. محاسبه‌ی نیروی محوری کمانشی به‌دست‌آمده از رابطه‌ی نیومارک برای شرایط تکیه‌گاهی نامعلوم و مقایسه‌ی آن با مقدار متناظر ارائه‌شده در آزمایش مرجع^[۱]، نشان داده است که تطابق خوبی بین این دو مقدار برقرار است و همچنین بین آن‌ها، اختلاف پیشینه‌ی ۳/۱٪ وجود دارد.

منابع (References)

- Tullini, N. and Ferdinando, L. "Dynamic identification of beam axial loads using one flexural mode shape", *Journal of Sound and Vibration*, **318**(1-2), pp. 131-147 (2008).
- Briccoli Bati, S., Puccetti, P. and Tonietti, U. "Experimental methods for testing the pull tension of chains", in: C. Hallai, P. Kulcsar (Eds.), *Proceedings of the 13th World Conference on Non-Destructive Testing*, Elsevier, Amsterdam, pp. 1259-1263 (1992).
- Briccoli Bati, S. and Tonietti, U. "Experimental methods for estimating in situ tensile force in tie-rods", *Journal of Engineering Mechanics*, **127**(12), pp. 1275-1283 (2001).
- Blasi, C. and Sorace, S. "Determining the axial force in metallic rods", *Structural Engineering International*, **4**(4), pp. 241-246 (1994).
- Sorace, S. "Parameter models for estimating in-situ tensile force in tie-rods", *Journal of Engineering Mechanics*, **122**(9), pp. 818-825 (1996).
- Bruschi, G., Nardoni, G., Lanza, L., Laudiero, F., Tullini, N., Mezzadri, G. and Tralli, S. "Experimental stress analysis of historical forged tie beams of archaeological museum of Spina in Ferrara", Italy, in: C. Modena, P.B. Lourenc-o, P. Roca (Eds.), *Proceedings of th Structural Analysis of Historical Constructions*, **1**, Taylor & Francis, London, pp. 489-497 (2004).
- Lagomarsino, S. and Calderini, C. "The dynamical iden-

- tification of the tensile force in ancient tie-rods”, *Engineering Structures*, **27**(6), pp. 846-856 (2005).
8. Park, S., Choi, S., Oh, S.T., Stubbs, N. and Song, H.C. “Identification of the tensile force in high-tension bars using modal sensitivities”, *International Journal of Solids and Structures*, **43**(10), pp. 3185-3196 (2006).
 9. Bati, B. and Tonietti, S. “Experimental methods for estimating in situ tensile force in tie-rods”, Reston, VA, ETATS-UNIS, American Society of Civil Engineers (2001).
 10. Bazant, Z.P. and Cedolin, L., *Stability of Structures Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories*, Oxford University Press, Oxford (1991).
 11. Singer, J., Arbocz, J. and Weller, T., *Buckling Experiments: Experimental Methods in Buckling of Thin-Walled Structures, Volume 1, Basic Concepts, Columns, Beams and Plates*, Wiley, New York, 640 p. (2000).
 12. Lurie, H. “Lateral vibrations as related to structural stability”, *Journal of Applied Mechanics*, **19**(2), pp. 195-203 (1952).
 13. Plaut, R.H. and Virgin, L.N. “Use of frequency data to predict buckling”, *Journal of Engineering Mechanics*, **116**(10), pp. 2330-2335 (1990).
 14. Virgin, L.N. and Plaut, R.H. “Effect of axial load on forced vibrations of beams”, *Journal of Sound and Vibration*, **168**(3), pp. 395-405 (1993).
 15. Shaker, F.J. “Effect of axial load on mode shapes and frequencies of beams”, NASA Technical Note (NASA TN D-8109) (1975).
 16. Livingston, T., Be'liveau, J.G. and Huston, D.R. “Estimation of axial load in prismatic members using flexural vibrations”, *Journal of Sound and Vibration*, **179**(5), pp. 899-908 (1995).
 17. Jacobson, M.J. and Wenner, M.L. “Predicting buckling loads from vibrational data”, *Experimental Mechanics*, **8**(10), pp. 35N-38N (1968).
 18. Klein, B. “Determination of effective end fixity of columns with unequal rotational end restraints by means of vibration test data”, *Journal of the Royal Aeronautical Society*, **61**, pp. 131-132 (1957).
 19. Sweet, A.L., Genin, J. and Mlakar, P.F. “Vibratory identification of beam boundary conditions”, *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*, **98**(4), pp. 387-394 (1976).
 20. Baruch, M. “Integral equations for nondestructive determination of buckling loads for elastic bars and plates”, *Israel Journal of Technology*, **11**(1-2), pp. 1-8 (1973).
 21. Amabili, M., Carra, S. and et al. “Estimation of tensile force in tie-rods using a frequency-based identification method”, *Journal of Sound and Vibration*, **329**(11), pp. 2057-2067 (2010).
 22. Computers and Structures, *SAP2000 Users Manual*, Berkeley (CA): Computers and Structures Inc. (2007).
 23. Loung, T.M.H. “Identification of the tensile force in tie-rods using modal analysis tests”, Master’s Thesis, Universidade do Minho (12 July 2010).
 24. Rayleigh, J.W.S., *Theory of Sound, I*, Dover, New York, 1877 Re-Issued (1945).